فصلنامه صنعت بیمه/سال بیست‌ودوم/شماره۳/ پاییز۱۳۸٦/شماره مسلسل۸۷/صفحات۹۵ تا ۱۱۲

# روشی تعمیم یافته برای تأمین اعتبار طرح‌های بازنشستگی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸٦/۱۲/۰۹
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۷/۰۷/۱٦

رحیم محمودوند[۱]
دکتر محمدرضا مشکانی[۲]
رضا تقوایی[۳]

## چکیده

یکی از مهم‌ترین مسائل در طرح‌های بازنشستگی، تأمین مزایایی است که به هر عضو تحت پوشش طرح تعلق می‌گیرد و برای تأمین این مزایا می‌توان روش‌های مختلفی را به کار برد. در این مقاله، بر اساس مدل جمعیتی برای ورود و خروج اعضای طرح، یک فرمول تعمیم یافته برای محاسبه سهم مشارکت هر عضو ارائه می‌شود. در پایان نیز، بر مبنای داده‌های واقعی یکی از سازمان‌های دولتی، میزان سهم مشارکت بر اساس این روش تعمیم یافته محاسبه می‌شود.

**واژگان کلیدی:** تأمین اعتبار، حق مشارکت، طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده، اعضای فعال، ورودی‌های جدید

---

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور مرکز تویسرکان(Email:R_Mahmodvand@Yahoo.com)
۲. عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی(Email:M_Meshkani@Sbu.ac.ir)
۳. عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تویسرکان(Email: Taghvaiereza@Yahoo.com)

پرتال جامع علوم انسانی

### ۱. مقدمه

طرح بازنشستگی، قراردادی است که به موجب آن متولیان طرح، متعهد می‌شوند که در قبال دریافت مبالغی معین و تا مدتی معین در دوران بازنشستگی، برای هر یک از اعضای طرح، درآمدی ثابت فراهم کنند. درآمدی را که یک عضو بازنشسته دریافت می‌کند، مزایا و مبلغی را که یک عضو در زمان فعالیتش به صندوق طرح می‌پردازد، سهم مشارکت گویند. بر اساس میزان پوشش طرح، مزایا، حق مشارکت‌ها، تأمین اعتبار طرح، هزینه و درآمد طرح، می‌توان طرح‌های بازنشستگی را به چند نوع تقسیم کرد.

یک طرح بازنشستگی در واقع یک قرارداد است؛ اگر در ابتدای این قرارداد، مبلغ مزایایی که عضو در بازنشستگی مستحق دریافت آن است، مشخص شده باشد، طرح را «طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده[1]» می‌نامند و اگر در ابتدا میزان سهم مشارکت‌ها مشخص شود، آن را « طرح بازنشستگی با حق مشارکت تعریف‌شده »[2] می‌نامند. بنابراین در طرح بازنشستگی با حق مشارکت تعریف‌شده، برنامه‌ریزی در مورد آینده آسان‌تر است. در واقع، بر اساس میزان مبالغی که به عنوان سهم مشارکت از اعضا گرفته می‌شود (با توجه به سود حاصل از سرمایه گذاری این مبالغ) می‌توان درآمدی را برای آنها در چند سال آینده پیش‌بینی کرد. اما در طرح بازنشستگی با مزایای تعریف شده، از همان ابتدا، میزان درآمد بازنشستگی مشخص است و باید سهم مشارکت‌ها در مدت زمان فعالیت عضو (قبل از بازنشستگی) به گونه‌ای اخذ شود که بتوان مزایای مشخص شده در ابتدای قرارداد را تأمین کرد. در واقع، مسئله تأمین اعتبار، مربوط به زمان‌بندی پرداخت سهم مشارکت‌ها است. روش‌های تأمین اعتبار متعددی وجود دارد که تقریباً همه آنها به سهم مشارکت اعضای طرح بستگی دارد.

1. Defined Benefit Pension Scheme
2. Defined Contribution Pension Scheme

دافرسن[1] چند روش تأمین اعتبار را کاملاً مشروح و همراه با ویژگی‌های آنها توضیح داده است. هم‌چنین بارنت و برین[2]، مثال‌های متنوعی از این روش‌ها را مطرح کرده‌اند. آنها درباره یک روش تأمین اعتبار چنین می‌نویسند:

یک روش تأمین اعتبار، بخشی از ارزش فعلی مزایا را به فعالیت قبل از تاریخ ارزیابی (خدمت گذشته) و بخش باقی مانده (خدمت آتی) را به خدمت بعد از تاریخ ارزیابی نسبت می‌دهد.

نحوه تخصیص اندوخته لازم برای تأمین مزایای بازنشستگی، در روش‌های مختلف تأمین اعتبار متفاوت است؛ بعضی از روش‌ها بیشتر بر خدمت انجام شده تکیه دارند و بعضی دیگر بر اساس پیش‌بینی تا زمان بازنشستگی عمل می‌کنند. لازم به ذکر است که در متون ریاضیات بازنشستگی، اصطلاح « روش هزینه‌یابی بیمه آماری[3]» را برای هر روش تأمین اعتبار یک طرح با مزایای تعریف‌شده به کار می‌برند. روش هزینه‌یابی آماری، روشی است که بخشی از ارزش فعلی مزایای آتی را به هر سال مالی نسبت می‌دهد؛ در چنین روشی، هزینه‌ها به عمر کاری کارمند تعلق می‌گیرد (Anderson, 1992).

## ۲. طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده

همان‌طور که عنوان شد، در یک طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده در ابتدای قرارداد، مزایا بر اساس یک قاعده مشخص تعیین می‌شوند. مثلاً می‌توان از یک فرمول کلی مانند فرمول(۱) استفاده کرد.

$$S(t) = K \times N \times g(t) \times \overline{S}_h \quad , h \le N \qquad (۱)$$

1. Dufresne 1986
2. Barnet & Berin 1989
3. Actuarial Cost Method

که در آن

$S(t)$: حقوق بازنشستگی در زمان $t$

$g(t)$: ضریبی برای افزایش حقوق (برای از بین بردن اثر عواملی مانند تورم)

$\overline{S}_h$ : متوسط حقوق عضو در $h$ سال قبل از بازنشستگی

$N$: تعداد سال‌های فعالیت عضو (یا تعداد سال‌هایی که عضو سهم مشارکت پرداخته است)

$K$: ضریب ثابت است. در این صورت، یکی از مسائل مهم برای متولیان طرح، این است که سهم مشارکت اخذ شده از اعضا، جهت تأمین این مزایا به چه صورتی باشد؟ اما برای یافتن سهم مشارکت لازم، کسب اطلاعات در دو زمینه ضروی است:

– نحوه ورود اعضا (که موجب افزایش درآمد طرح می‌شود).

– خروج اعضا (که موجب افزایش هزینه‌های طرح می‌شود).

خروج اعضای طرح به چهار صورت امکان‌پذیر است:

– مرگ: در این صورت، درصدی از حقوق عضو به بازماندگانش می‌رسد.

– از کارافتادگی: در این صورت، عضو، مستحق دریافت مزایای معوقه (مزایایی که تاریخ شروع پرداخت آنها در آینده است) می‌شود.

– کناره‌گیری از کار: در این صورت، عضو مستحق دریافت مزایای معوقه است.

– بازنشستگی: در این صورت، عضو مشمول دریافت مزایای کامل بازنشستگی است.

در صورت وقوع هر یک از این حوادث، درآمد طرح کاهش پیدا می‌کند. معمولاً از اصطلاح «نقصان[1]» برای ذکر این حوادث استفاده می‌کنند. واضح است که وقوع هیچ یک از حوادث بالا، قطعیت ندارد و باید از علم احتمالات استفاده کرد. برای محاسبه احتمال رخداد هر یک از وقایع فوق برای هر فرد و در هر سنی، روش‌های

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

1. Decrement

مختلفی وجود دارد. معمولاً این احتمالات را برای سال‌های مختلف، در جدولی به نام « جدول خدمتی[1]» تهیه می‌کنند.

### ۳. بیان مسأله

همان‌طور که در تعریف طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده عنوان شد، چون در این طرح مزایا تعریف شده‌اند، می‌توان محاسبه کرد که هر عضو فعال در هر زمان معین، مشمول دریافت چه مقدار از کل مزایای بازنشستگی خود شده است؛ اما روش‌های تأمین اعتبار بر اساس دو معیار تعریف می‌شوند:

- تعهدات عایدی[2]
- هزینه عادی[3]

معیار AL برابر ارزش فعلی همه مزایایی است که در ازای فعالیت عضو یا پرداخت سهم مشارکت، تا تاریخ ارزیابی به عضو تعلق گرفته است و انتظار می‌رود دارایی‌های طرح با آن برابر باشد. معیار NC، مبلغی است که باید فرد به عنوان سهم مشارکت برای تأمین مزایایی که در ازای فعالیت سال آینده به دست می‌آورد، بپردازد. معمولاً دارایی‌های طرح در زمان ارزیابی با AL برابر نیست. مقدار تفاوت آنها را «تعهدات تأمین اعتبار نشده» گویند. NC مربوط به مزایایی است که فرد در سال بعد به دست می‌آورد و ربطی به گذشته ندارد؛ لذا متولیان طرح باید تعهدات تأمین اعتبار نشده را نیز در نظر بگیرند. بدین منظور، مقدار سهم مشارکت قابل پرداخت، برابر است با هزینه عادی به علاوه مضربی از تعهدات تأمین اعتبار نشده. بنابراین، اگر F(t) و C(t) به ترتیب میزان دارایی و سهم مشارکت طرح در زمان t باشند آنگاه:

$$C(t)= NC(t) + q.UL(t) \quad , \quad UL(t)=AL(t)-F(t)$$

1. Service Table
2. Actuarial Liability (AL)
3. Normal Cost (NC)

در این فرمول UL(t) نشان دهنده تعهدات تأمین اعتبار نشده در زمان t است و q نیز مقداری ثابت است که باید آن را به دست آورد. البته مقدار ثابت q به نرخ بازده سرمایه بستگی دارد. با استفاده از این فرمول می‌توان تعهدات تأمین اعتبار نشده در چند سال بعد را تأمین کرد. توجه کنید که مقدار q معمولاً از ۱ کمتر است و به علاوه مقداری مطلوب برای آن، برابر $q = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$ است.

که در آن $\ddot{a}_{\overline{m}|} = \sum_{t=0}^{m-1} (L+i)^{-t}$

i: نرخ سود سالانه است (Dufresne, 1988). این مقدار را می‌توان به عنوان بخش تعهدات تأمین اعتبار نشده در یک دوره m ساله تلقی کرد(Cairns, 1995). البته ممکن است تعهدات تأمین اعتبار نشده به دو صورت مازاد یا کمبود باشد، اما در هر حال، رهیافت بالا برای تعدیل حق بیمه مطلوب است.

برای تأمین اعتبار طرح‌های بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده، روش‌های متعددی مطرح شد. اگر B(t)، میزان هزینه کل مزایای یک طرح بازنشستگی در زمان t و $\delta$ نرخ سود سرمایه طرح باشد، آنگاه برای هر زمان دلخواه مانند $t_0$ رابطه (۲) برقرار است.

$$F(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} C(t) e^{-\delta(t-t_0)} dt = \int_{t_0}^{\infty} B(t) e^{-\delta(t-t_0)} dt \qquad (۲)$$

رابطه (۲) شامل دامنه وسیعی از استراتژی‌های تأمین اعتبار است. در یک کرانگین، روش تأمین اعتبار بدون اندوخته است. در این روش:

$$\forall t : F(t) = 0 \quad , C(t) = B(t)$$

در کرانگین دیگر، طرح کاملاً از پیش تأمین شده است و در آن به هیچ سهم مشارکت اضافی بیشتری نیاز نیست. در این روش:

$$F(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} B(t) e^{-\delta(t-t_0)} dt \quad , \quad C(t) = 0 \quad , \forall t > t_0$$

رهیافت مطلوب برای تأمین اعتبار یک طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده، در نظر گرفتن سهم مشارکت‌هایی است که با گذشت زمان، ثبات داشته باشند. این

جواب بین دو جواب کرانگین بالا است، یعنی $\forall t : 0 \leq C(t) \leq B(t)$. از این رو بی‌نهایت جواب برای رابطه (۲) وجود دارد و از دغدغه‌های اصلی مدیران هر طرح بازنشستگی، تعیین سهم مشارکت مطلوب و مورد نیاز است. البته یک روش تأمین اعتبار مطلوب باید دارای چند ویژگی باشد که بوث و همکاران[1] او در سال ۱۹۹۹ چندین ملاک برای بررسی مطلوبیت یک روش تأمین اعتبار مطرح کرده‌اند.

## ٤. اهداف تحقیق

هدف اصلی از انجام این تحقیق، تعیین سهم مشارکت کارمندان متعلق به یک طرح بازنشستگی با مزایای تعریف‌شده است. باید توجه داشت که حقوق و مزایای بازنشستگان فعلی در هر طرح بازنشستگی با درآمد حاصل از دارایی‌های طرح پرداخت می‌شود و میزان این درآمد در هر زمان، بستگی مستقیم به سهم مشارکت‌های پرداختی اعضای فعال طرح دارد. لذا در این تحقیق دو هدف جزیی زیر نیز بررسی شد:

- یافتن یک مدل مناسب برای تعداد ورودی‌های جدید طرح
- یافتن یک مدل مناسب برای تعداد اعضای فعال طرح

## ۵. پیشینه تحقیق

با بررسی‌های انجام شده در سطح کشور، از طریق مراجعه به مرکز اسناد و مدارک علمی ایران و پایگاه‌های اطلاعاتی اینترنتی، تحقیقی در زمینه تأمین اعتبار طرح‌های بازنشستگی و به طور خاص، تعیین جواب‌های ممکن برای رابطه (۲) یافت نشد. اما تحقیقات مشابهی در کشور و خارج از کشور انجام شده که تا حدودی مرتبط با این موضوع است و به این شرح است:

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

1. Booth et al

– سهیلا فریدپور روحانی در سال ۱۳۸۵ تحقیقی تحت عنوان «سرمایه‌گذاری بهینه در طرح‌های بازنشستگی با سهم مشارکت تعریف شده» در دانشگاه شهید بهشتی انجام داده است.

– در خارج از کشور، دافرسن در سال ۱۹۸٦ تحقیقی تحت عنوان «تأمین اعتبار طرح‌های بازنشستگی» در دانشگاه سیتی یونیورسیتی[1] انجام داده است که به نظر می‌رسد در مقایسه با تحقیق‌های مشابه دیگری که درباره تأمین اعتبار طرح‌های بازنشستگی انجام شده، جامع‌تر و کامل‌تر است. سگمن[2] نیز تحقیقی تحت عنوان «روش‌های سرمایه‌گذاری بهینه در طرح‌های بازنشستگی با مزیت تعریف شده» در بانک مرکزی دانمارک انجام داده است. در هیچ یک از این تحقیق‌ها درباره مدل ورود و خروج و تعیین سهم مشارکت بر اساس چنین مدلی بحث نشده است. چند روش تأمین اعتبار معمول که در این تحقیق‌ها و پژوهش‌های مشابه مطرح شده‌اند، به طور خلاصه در ادامه آمده است.

**۱–۵. روش تأمین اعتبار واحدی**

دراین روش، مزایایی که یک فرد بازنشسته دریافت می‌کند به چند واحد تقسیم می‌شود. هر واحد، مربوط به یکی از سال‌های فعالیت عضو است. تعهد عایدی در هر زمان برای این روش، عبارت است از ارزش فعلی تمام واحدها از کل مزایای بازنشستگی که تا آن زمان به وی تعلق گرفته است. هم‌چنین هزینه عادی برای این روش، برابر ارزش فعلی یک واحد از کل مزایایی است که به ازای خدمت در سال آینده (یا به ازای پرداخت سهم مشارکت در سال آینده) به هر یک از اعضا تعلق می‌گیرد. ارزش فعلی مزایای تعلق‌گرفته در هر زمان، می‌تواند به دو صورت محاسبه شود. در روش اول، مبنای محاسبه مزایای بازنشستگی را حقوق فعلی عضو در نظر

1. City University
2. Siegmann 2007

می‌گیرند. در روش دوم، ابتدا تمام حقوق‌هایی که شخص از این به بعد (تا زمان بازنشستگی) دریافت خواهد کرد پیش‌بینی می‌شود و سپس بر مبنای حقوق‌های برآوردشده، مزایای بازنشستگی محاسبه می‌شود. روش اول را «روش تأمین اعتبار واحدی جاری[1]» و روش دوم را «روش تأمین اعتبار واحدی پیش‌بینی شده[2]» می‌نامند. برای توضیح بیشتر درباره این روش، مثالی ساده در پیوست ارائه شده است.

**۲-۵. روش سن ورودی[3]**

در این روش، هزینه عادی با میزان حق بیمه لازم برای تأمین مزایای بازنشستگی پیش‌بینی شده در طول دوره فعالیت فرد برابر است. همچنین مقدار AL تفاوت ارزش فعلی مزایای بازنشستگی پیش‌بینی شده و ارزش فعلی هزینه عادی قابل پرداخت در آینده را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، AL برابر ارزش فعلی هزینه‌های عادی پرداخت شده از سن ورود تا زمان ارزیابی است و ممکن است دلیل نام‌گذاری این روش نیز همین موضوع باشد.

**۳-۵. روش سن بازنشستگی[4]**

در این روش، AL برابر ارزش فعلی مزایای تعلق گرفته با احتساب همه افزایش حقوق‌ها تا زمان بازنشستگی است. هزینه عادی، ارزش فعلی مزایایی است که انتظار می‌رود در آینده تعلق بگیرند.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

1. Current Unit Credit Method
2. Projected Unit Credit Method
3. Entry Age Method
4. Attained Age Method

### ٤-٥. روش تجمعی[1]

در این روش، نرخ سهم مشارکت، برابر ارزش فعلی کل تعهدات اعضای موجود منهای ارزش فعلی دارایی‌ها است؛ مشروط بر آنکه افزایش حقوق‌های مورد انتظار نیز در نظر گرفته شوند. این نرخ به صورت درصدی از همه حقوق‌های مشمول بازنشستگی آتی با احتساب افزایش حقوق‌های آتی است
(Barnet & Berin, 1989, Booth et al, 1999, Dufresne, 1986)

## ٦. مدل‌سازی اعضای طرح

برای مدل‌سازی اعضای طرح، ابتدا نمادها و پیش فرض‌های مسئله معرفی می‌شوند. سپس مدل ریاضی برای اعضای فعال طرح مشخص می‌شود و در نهایت روش تأمین اعتبار تعمیم یافته بیان می‌گردد.

### ٦-١. معرفی نمادها و پیش فرض‌های مسئله

t: زمانی که از تأسیس طرح می‌گذرد (بر حسب سال)

a: کمترین سن ورود به طرح

r: سن بازنشستگی عادی

x: سن عضو فعال

Am(x,t): تابع چگالی تعداد اعضای فعال با سن x در زمان t

Ne(x,t): تابع چگالی تعداد ورودی‌های جدید با سن x در زمان t

$\mu_x$: نرخ نقصان در جدول خدمتی مورد استفاده طرح برای افراد به سن x

$l_x$: تعداد زنده‌ها در جدول خدمتی مورد استفاده طرح برای افراد به سن x

فرض بر این است که همه نقص‌های جدول خدمت، مستقل از زمان است و نرخ نقص‌های ساده معرفی شده در بالا، مجموع نرخ‌های نقص‌ها برای هر علت خروج از طرح است.

1. Aggregate Method

### ۲-٦. مدل ریاضی برای اعضای فعال طرح

با اندکی بررسی، می‌توان دید که مدل جمعیتی برای اعضای فعال طرح بر اساس معادله دیفرانسیل (۳) به دست می‌آید (Bowers et al, 1986):

$$\frac{\partial Am(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial Am(x,t)}{\partial t}=Ne(x,t)-Am(x,t)\mu_x \qquad (۳)$$

اگر تابع چگالی تعداد ورودی‌های جدید–$Ne(x,t)$– همیشه در محدوده $a \le x \le r$ متناهی باشد، جواب رابطه (۳) به صورت زیر است:

$$Am(x,t)=\begin{cases}\int_{x-t}^{x}\frac{L_x}{L_z}Ne\,(z,t-x+z)dz & ,\quad t \le x-a\\ \int_{a}^{x}\frac{L_x}{L_z}Ne\,(z,t-x+z)dz & ,\quad t \ge x-a\end{cases}$$

یعنی تعداد افراد فعال در هر گروه سنی، برابر مجموع همه ورودی‌های جدیدی است که از قبل، وارد طرح شده‌اند و تا زمان حاضر زنده مانده‌اند.

### ۳-٦. روش تأمین اعتبار تعمیم‌یافته

از ویژگی‌های یک روش تأمین اعتبار مطلوب، این است که سهم مشارکت تعیین شده دارای ثبات باشد. بنابراین فرض می‌کنیم برای هر $t$، مقدار $C(t)$ برابر $C_S$ باشد. اولین مرحله، تعیین تابع چگالی فرضی تعداد ورودی‌های جدید است که برای یک جامعه مانا از اعضای فعال، آن را با $Ne_{\circ}(x)$ نشان می‌دهیم. اگر جامعه اعضای فعال در زمان $t_{\circ}$ معلوم باشد، آنگاه از تابع $Am(x)$ برای نشان دادن تابع چگالی تعداد اعضای فعال با سن $x$ در یک جامعه مانا استفاده می‌کنیم: $Am(x,t)=Am(x)=Am(x,t_{\circ})\ ,\ t>t_{\circ}$

با توجه به معادله اخیر و رابطه (۳)، تابع چگالی تعداد ورودی‌های جدید مورد نیاز، به صورت زیر است:

$$Ne_{\circ}(x)=Am'(x)+Am(x)\mu_x$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

تابع چگالی تعداد ورودی‌های جدید واقعی، $Ne(x)$، بر مبنای تعداد مورد انتظار ورودی‌های جدید به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Ne(x) = Ne_{\circ}(x) + Ne_{1}(x) \qquad (٤)$$

در رابطه (٤)، تابع چگالی $Ne_1(x)$ تفاوت بین توزیع تعداد ورودی‌های جدید مورد انتظار و توزیع تعداد ورودی‌های جدید مورد نیاز برای مانا ماندن جامعه است. وجود مقادیر منفی برای $Ne_1(x)$ کاملاً قابل قبول است؛ در واقع $Ne_1(x)$ زمانی منفی می‌شود که جامعه اعضای فعال مورد انتظار کاهش یابد. با این وجود، $Ne_1(x)$ را یک تابع چگالی برای مازاد تعداد ورودی‌های جدید در نظر می‌گیریم. در ادامه متغیرهای زیر، تعریف و استفاده می‌شوند:

$PVB_{\circ}$: ارزش فعلی مزایای مربوط به فعالیت آتی جامعه مانای اعضای فعال طرح

$PVB_1$: ارزش فعلی مزایای مربوط به ورودی‌های جدید مازاد

$PVC_{\circ}$: ارزش فعلی هر واحد از سهم مشارکت اعضای جامعه مانا

$PVC_1$: ارزش فعلی هر واحد از سهم مشارکت ورودی‌های جدید مازاد

با توجه به تعریف‌های بالا، واضح است که برای برقراری توازن مالی طرح باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$PVB_{\circ} + PVB_{1} = \left(PVC_{\circ} + PVC_{1}\right)C_{s}$$

که بعد از ساده‌سازی، فرمول زیر برای سهم مشارکت استاندارد به دست می‌آید:

$$c_S = \frac{k\bar{a}_r \int_a^r \left[ Am(x,t_{\circ}) + Ne_1(x)(r-x) \right] \frac{L_r}{L_x} e^{-\delta(r-x)} dx}{AM_{\circ} + \int_a^r Ne_1(x)\bar{a}_{\overline{x:r-x|}} dx} \qquad (٥)$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

که در این رابطه $\delta$ نرخ سود است:

$$AM_{\circ} = \int_{a}^{r} Am(x,t_{\circ})dx \quad , \quad \bar{a}_{r} = \int_{\circ}^{\infty} e^{-\delta t} \frac{L_{r+t}}{L_r} dt \quad , \quad \bar{a}_{z:\overline{r-z|}} = \int_{\circ}^{r-z} e^{-\delta t} \frac{L_{z+t}}{L_z} dt$$

## ۷. مثال کاربردی

جدول (۱) نمایانگر تعداد ورودی‌های جدید و تعداد اعضای فعال مربوط به اداره بیمه تأمین اجتماعی شهرستان تویسرکان است. در این طرح، غیر از سن ٦٥ سالگی بازنشستگی امکان پذیر نیست و هم‌چنین، کمترین سن ورود به طرح برابر ۲۵ سال است.

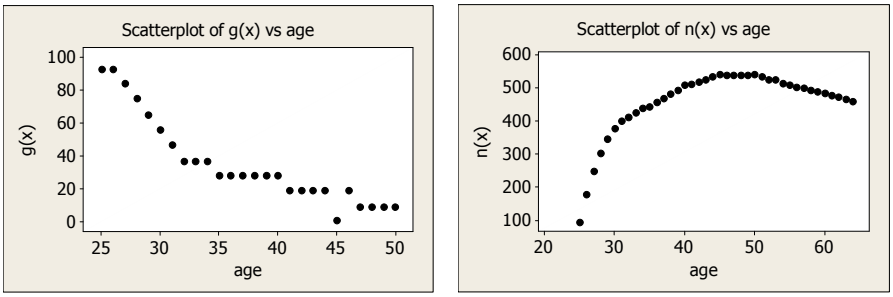
جدول ۱. تعداد اعضای فعال و ورودی‌های جدید مربوط به اداره بیمه تأمین اجتماعی تویسرکان

| سن | تعداد اعضای فعال | ورودی‌های جدید | سن | تعداد اعضای فعال | ورودی‌های جدید |
|---|---|---|---|---|---|
| ۲۵ | ۹۳ | ۹۳ | ٤٥ | ٥٤٠ | ۱ |
| ۲٦ | ۱۷۸ | ۹۳ | ٤٦ | ٥۳۹ | ۱۹ |
| ۲۷ | ۲٤۷ | ۸٤ | ٤۷ | ٥۳۹ | ۹ |
| ۲۸ | ۳۰۳ | ۷٥ | ٤۸ | ٥۳۹ | ۹ |
| ۲۹ | ۳٤٦ | ٦٥ | ٤۹ | ٥۳۹ | ۹ |
| ۳۰ | ۳۷۸ | ٥٦ | ٥۰ | ٥٤۰ | ۹ |
| ۳۱ | ٤۰۰ | ٤۷ | ٥۱ | ٥۳۳ | |
| ۳۲ | ٤۱۲ | ۳۷ | ٥۲ | ٥۲٦ | |
| ۳۳ | ٤۲٥ | ۳۷ | ٥۳ | ٥۲٥ | |
| ۳٤ | ٤۳۸ | ۳۷ | ٥٤ | ٥۱٤ | |
| ۳٥ | ٤٤٤ | ۲۸ | ٥٥ | ٥۰۸ | |
| ۳٦ | ٤٥٦ | ۲۸ | ٥٦ | ٥۰۳ | |
| ۳۷ | ٤٦۸ | ۲۸ | ٥۷ | ٤۹۹ | |
| ۳۸ | ٤۸۱ | ۲۸ | ٥۸ | ٤۹٤ | |
| ۳۹ | ٤۹٤ | ۲۸ | ٥۹ | ٤۸۹ | |
| ٤۰ | ٥۰۸ | ۲۸ | ٦۰ | ٤۸۳ | |
| ٤۱ | ٥۱۲ | ۱۹ | ٦۱ | ٤۷۷ | |
| ٤۲ | ٥۱۹ | ۱۹ | ٦۲ | ٤۷۲ | |
| ٤۳ | ٥۲٥ | ۱۹ | ٦۳ | ٤٦٦ | |
| ٤٤ | ٥۳۳ | ۱۹ | ٦٤ | ٤٥۹ | |

### ۱-۷. توصیف داده‌ها

برای توصیف داده‌ها از یک نمودار پراکندگی ساده استفاده شد (شکل ۱). بر اساس این شکل، به نظر می‌رسد که یک منحنی نمایی برای داده‌ها مناسب باشد.

شکل ۱. نمودار پراکندگی برای بررسی ارتباط بین تعداد اعضای فعال و ورودی‌های جدید با فاکتور سن




بعد از بررسی داده‌های جدول ۱ تابع $n(x,t_o)=a(x-25)e^{-b(x-25)^c}$ به جمعیت اعضای فعال در این مثال برازش داده شد. نتایج برازش در جدول ۲ بیان شد. مطابق با نتایج جدول ۲، مقدار معنی‌داری برای برآورد پارامترهای مدل در نظر گرفته شد. برای تابع چگالی تعداد اعضای فعال در هر سه مورد از ۰/۰۵ کمتر است، یعنی می‌توان گفت که مدل داده شده در سطح ٪۵ معنی‌دار است. در ضمن مقدار ضریب تعیین برای این مدل برابر ۰/۹۹۶ است؛ که نشان دهنده مناسب بودن مدل به دست آمده است.

جدول ۲. برازش مدل برای تعداد اعضای فعال مثال

| پارامتر | مقدار برآورد | خطای معیار برآورد | مقدار آماره آزمون | مقدار معنی‌داری |
|---|---|---|---|---|
| a | ۱۱۸/۱۱۰ | ۸/۴۰۱ | ۱۴/۰۶ | ۰/۰۰۰ |
| b | ۰/۲۶۰ | ۰/۰۳۰ | ۷/۲۰ | ۰/۰۰۰ |
| c | ۰/۶۰۲ | ۰/۰۴۱ | ۱۹/۷۹ | ۰/۰۰۰ |

اکنون با استفاده از رابطه (۳)و با فرض اینکه $\mu_X = 0/05$ است نتیجه می‌گیریم:

$$g_o(x)=118/11e^{-0/26(x-25)^{0/60}}\left[1-0/16(x-25)^{0/6}+0/05(x-25)\right]$$

برای ورودی‌های جدید نیز تابع $g(x) = a\, e^{-b(x-25)}$ در نظر گرفته شد که نتایج حاصل از برازش این مدل در جدول ۳ موجود است. با توجه به جدول ۳، مقدار معنی‌داری برای برآورد پارامترهای مدل در نظر گرفته شده برای تابع چگالی تعداد ورودی‌های جدید در هر دو مورد از ۰/۰۵ کمتر است؛ یعنی می‌توان گفت که مدل داده شده در سطح ٪۵ معنی‌دار است. در ضمن، مقدار ضریب تعیین برای این مدل برابر ۰/۹۸۸ است که نشان دهنده مناسب بودن مدل به دست آمده است.

جدول ۳. برازش مدل برای تعداد ورودی‌های جدید در مثال

| پارامتر | مقدار برآورد | خطای معیار برآورد | مقدار آماره آزمون | مقدار معنی‌داری |
|---|---|---|---|---|
| a | ۹۸/۱۹۰ | ۲/۵٤۱ | ۳۸/۷۲ | ۰/۰۰۰ |
| b | ۰/۱۰۷ | ۰/۰۰٤ | ۲۵/۸٦ | ۰/۰۰۰ |

اکنون می‌توان مقدار $g_1(x)$ را با توجه به رابطه (٤) به دست آورد. در ادامه با استفاده از رابطه (۵)، مقدار سهم مشارکت استاندارد برای مقادیر مختلف $\delta$ محاسبه شده است. مقادیر جدول ٤ سهم مشارکت استاندارد برای هر عضو را نشان می‌دهد. یعنی برای مثال، زمانی که سود سرمایه طرح برابر ۰/۰۱ است، سهم مشارکت استاندارد برای هر عضو برابر ۵/۹۳ واحد است. با توجه به جدول ٤ مقدار حق بیمه با افزایش نرخ سود به میزان قابل توجهی کم می‌شود.

جدول٤. مقدار سهم مشارکت محاسبه شده برای مثال (بر حسب درصدی از حقوق)

| نرخ سود ($\delta$) | ۰/۰۱ | ۰/۰۲ | ۰/۰۳ | ۰/۰٤ | ۰/۰۵ | ۰/۰٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| سهم مشارکت | ۵/۹۳ | ٤/۵۱ | ۳/۵٤ | ۲/۸۵ | ۲/۳٤ | ۱/۹٦ |

## ۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تعمیم یافته برای محاسبه میزان سهم مشارکت استاندارد برای اعضای فعال در یک طرح بازنشستگی با مزایای تعریف شده ارائه شده است. برای این منظور جامعه اعضای یک طرح را به سه بخش تقسیم نموده‌ایم:

- جامعه اعضای فعال
- جامعه ورودی‌های جدید

– جامعه خارج شوندگان از طرح، شامل: بازنشستگان، از کارافتادگان، مستعفیان و فوتی

سپس از برابر قرار دادن هزینه تأمین مزایای جامعه خارج شوندگان طرح با درآمد حاصل از اعضای فعال و ورودی‌های جدید، یک فرمول کلی برای محاسبه سهم مشارکت به دست آمد.

در پایان، با استفاده از داده‌های مربوط به اداره تأمین اجتماعی شهرستان تویسرکان با استفاده از فرمول‌های به دست آمده به محاسبه سهم مشارکت در ازای نرخ سودهای متفاوت پرداخته شد. با توجه به نتایج به دست آمده (جدول ٤) مشاهده می‌شود که با افزایش نرخ سود، میزان سهم مشارکت استاندارد کاهش می‌یابد و میزان سهم مشارکت در ازای نرخ سود ٦٪ تقریباً نزدیک به ٢٪ حقوق عضو طرح است. البته باید متذکر شد که میزان حق بیمه قابل پرداخت برابر میزان سهم مشارکت استاندارد، به علاوه هزینه‌های اضافی دیگر (مانند هزینه‌های اداری و ...) است.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

## پیوست

در جدول ۱ پیوست، اطلاعات مربوط به یک طرح بازنشستگی شامل دو عضو داده شده است. در این جدول، سن عضو در هنگام ورود به طرح (EA)، سن فعلی عضو (CA)، خدمت انجام شده (PS)، خدمت آتی (FS)، آخرین حقوق مشمول بازنشستگی (FSP) و تعداد سال‌هایی که هر کدام از اعضا، مزایا دریافت می‌کنند(PO) داده شده است.

جدول ۱. وضعیت اعضای یک طرح بازنشستگی فرضی

| EA | CA | PS | FS | FSP | PO |
|---|---|---|---|---|---|
| ۳۵ | ۵۵ | ۲۰ | ۱۰ | ۲ | ۱۰ |
| ٤۵ | ۵۵ | ۱۰ | ۱۰ | ۱/٦ | ۵ |

در اینجا بر سرمایه‌ها سودی در نظر گرفته نمی‌شود و مزایای بازنشستگی به ازای هر سال خدمت (یا پرداخت حق مشارکت) برابر ٪۲ آخرین حقوق مشمول بازنشستگی است. در این مثال، اولین عضو پس از بازنشستگی در هر سال مزایایی برابر میلیون تومان ۱/۲=۰/۰۲×۲×۳۰ دریافت خواهد کرد. پس، کل مزایایی که عضو اول دریافت می‌کند برابر ۱۲= ۱/۲×۱۰ است. به طور مشابه، کل مزایایی که عضو دوم دریافت خواهد کرد، برابر ۳/۲=۵×۱/٦×۰/۰۲×۲۰ میلیون تومان است. پس عضو اول باید ۱۲ میلیون تومان و عضو دوم ۳/۲ میلیون تومان را طی ۳۰ سال تأمین کنند. بنابراین مقدار هزینه عادی مربوط به هر سال برای عضو اول برابر $\frac{۱۲}{۳۰}$=۰/٤ میلیون تومان یعنی ٤۰۰ هزار تومان و برای عضو دوم برابر $\frac{۳/۲}{۲۰}$=۰/۱٦ میلیون تومان یعنی ۱٦۰ هزار تومان است.

اما تا زمان فعلی عضو اول مبلغ ۸ =۰/٤×۲۰ میلیون تومان از کل مزایا را کسب نموده و عضو دوم نیز مقدار۱/٦=۰/۱٦×۱۰ میلیون تومان از کل مزایایش را کسب

کرده است. بنابراین اگر مقدار تعهدات عایدی و مقدار هزینه عادی در زمان حال به ترتیب با AL(0) و NC(0) نمایش داده شوند، نتیجه می‌شود که:

$$AL(0) = 20\times 0/4 + 10\times 0/16 = 9/6$$

$$AL(t) = AL(0) + NC(0)\times t \quad , t = 1,2,...,10$$

$$NC(t) = 0/4 + 0/16 = 0/56 \quad , t = 1,2,...,10$$

که t زمان بر حسب سال است.

## منابع


۱. فریدپور روحانی، سهیلا ۱۳۸۵، *سرمایه‌گذاری بهینه در طرح‌های بازنشستگی با سهم مشارکت تعریف شده*، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار بیمه، دانشگاه شهید بهشتی.

2. Anderson, AW 1992, *Pension mathematics for actuaries*, Ac-Tex Publication, Winsted, Connecticut.

3. Barnet, N & Berin, BN 1989, *Fundamental of pension mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.

4. Booth, P, Chadburn, R, Cooper, D, Haberman, S & James, D 1999, *Modern actuarial theory and practice*, CRC Press, Boca Raton, United States.

5. Bowers, NL, Gerber, Hu, Hickman, JC, Jones, DA & Nesbitt, CJ 1986, *Actuarial mathematics*, Socity of Actuaries, Achaumburg, Illinois.

6. Cairns, AJG 1995, *Pension funding in a stochastic environment*, 5TH AFIR International Colloquium, vol. 1, pp. 429-53.

7. Dufresne, D 1986, *The dynamics of pension funding*, Ph.D Thesis, City University, London.

8. Dufresne, D 1988, 'Moments of pension contributions and fund levels when rates of return are random', *The Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 115, Part III, no. 461, pp. 535-44.

9. Siegmann, A 2007, 'Optimal investment policies for defined benefit pension funds'. *PEF*. vol. 6, no. 1, pp. 1-20.