فصلنامه صنعت بیمه /سال بیست و دوم /شماره ۱/ بهار ۱۳۸۶ /شماره مسلسل ۸۵ /صفحات ۱۲۹ تا ۱۴۷

کاربرد روش‌های مونت کارلوی زنجیره مارکوفی در مدل‌های بیمه‌ای

نکیسا رومینا [۱]
دکتر مجتبی گنجعلی [۲]
دکتر فرزاد اسکندری [۳]

چکیده

در این مقاله مبلغ خسارت معوق بیمه اتومبیل شرکت‌های بیمه‌ای، که بایست در سال‌های آتی به بیمه‌گذار پرداخت شود را پیش‌بینی می‌نماییم. پیش‌بینی این مبلغ با استفاده از دو مدل و کاربرد نظریه بیزی و روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی انجام می‌شود. تعداد خسارت نیز به عنوان یک اطلاع اضافی در یک مدل از مدل‌های فوق به کار گرفته می‌شود. بنابراین اطلاعات مربوط به تعداد و مبلغ خسارت را برای مدل بندی جدید استفاده می‌کنیم. در انتها کاربرد این مدل‌ها را با استفاده از یک مثال واقعی بررسی می‌نماییم.

واژگان کلیدی: خسارت معوق، ذخیره فنی، مونت کارلوی زنجیر مارکوفی، نظریه بیزی، مدل فضای وضعیت

۱. کارشناس ارشد آمار بیمه دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی(Email: Nka- Romina@Yahoo.com)
۲.عضو هیات علمی گروه آمار دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی(Email: Ganjali@Gmail.co)
۳.عضو هیات علمی گروه آمار دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده آمار(Email: Askandari@Gmail.com)

۱. مقدمه

محاسبه ذخایر مربوط به شرکت‌های بیمه یکی از مسائل مهم در هر کشور است. از آنجا که حق بیمه پیشاپیش پرداخت می‌شود، شرکت‌های بیمه در چند نوع به ذخیره آنها می‌پردازند که یکی از آنها ذخیره فنی[1] است. ذخیره فنی متعلق به بیمه‌گذاران است و حجم عظیمی را تشکیل می‌دهد. در بعضی از کشورها میزان ذخایر شرکت های بیمه به ویژه ذخایر شرکت‌های بیمه عمر از بانک‌ها بیشتر است. به همین دلیل دولت بر این ذخایر نظارت و کنترل دارد تا در مسیر صحیح سرمایه‌گذاری شود.

ذخایر فنی بر اساس حجم و تعداد بیمه‌نامه‌های در جریان و مورد تعهد بیمه‌گر، پس از پایان دوره مالی محاسبه و به منزلهٔ درآمد دوره بعد در اول دوره ثبت می‌شود. بیمه‌گر بخشی از تعهدات خود را در دوره مالی ایفا می‌کند، ممکن است برخی تعهدات باقی بماند، بنابراین در پایان دوره ذخیره فنی محاسبه و به دوره بعد منتقل می‌شود و این عمل هر ساله تکرار می‌شود. محاسبه ذخیره فنی معمولاً به سختی انجام می‌شود. هدف از این مقاله ارائه روش آسان‌تری برای این محاسبات با استفاده از روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی[2] است. چگونگی به کار بردن این روش‌ها در بخش‌های بعد بیان خواهد شد.

۲. طرح مسأله مورد مطالعه

در اینجا مسأله مورد مطالعه را با جزئیات بیشتر بیان می‌نماییم. شرکت‌های بیمه‌ای اغلب بدهی‌های بزرگ را در همان زمان وقوع حادثه پرداخت نمی‌کنند و بدهی‌ها با یک تأخیر زمانی که ممکن است سال‌ها طول بکشد، پرداخت می‌شود. ذخیره بدهی‌های پرداخت نشده مورد توجه محققان بیمه بوده و هست.

---

1. Technical Reserve
2. Monte Carlo Markov Chain

در این مقاله مدل‌های مختلف برای محاسبه ذخیره فنی شرکت‌های بیمه برای تسویه خسارت‌های معوق را بررسی می‌کنیم. منظور از خسارت‌های معوق، مواردی است که خسارت گزارش شده ولی پرداخت نشده است و شامل خسارت‌هایی که به صورت جزئی پرداخت می‌شود یا خسارت‌هایی که رخ داده ولی گزارش نشده است، نمی‌باشد. تعیین ومحاسبه میزان این سرمایه مورد توجه بسیاری از محققان بیمه‌ای بوده است. این محاسبات معمولاً توسط روش‌های بیمه‌ای و تئوری اعتبارمندی انجام می‌گردد. روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی بر پایه تحلیل بیزی به جای روش‌های بیمه‌ای به عنوان روش جایگزین معرفی می‌شود. داده‌ها با ساختار شکل ۱ داده شده‌اند. در این شکل A_i به ازای $i=۱,۲,...,r$، بیانگر سالی است که تصادف در آن رخ داده است و B_{ij} به ازای $j=۱,۲,...,r$، بیانگر سالی است که بدهی پرداخت شده است. برای مثال، خانه ij شامل مبلغ خسارت معوق Y_{ij} است که شرکت با تأخیر $j-۱$ سال برای تصادفی که در سال i ام رخ داده است پرداخت می‌کند.

از آنجا که آگاهی از تعداد خسارت رخ داده می‌تواند ما را در برآورد بهتر مبلغ خسارت معوق یاری نماید، اطلاعات مربوط به تعداد خسارات نیز جمع‌آوری گردیده است. تعداد خسارت برای هر خانه نیز دارای همان ساختار مثلثی است و در شکل ۲ نشان داده شده است. عدد n_{ij} نشان دهنده تعداد خسارتی است که در سال i ام رخ داده و شرکت بیمه با تأخیر $j-۱$ سال مقدار Y_{ij} را به ازای آنها می‌پردازد. نماد T_i نشان دهنده تعداد کل خسارات در سال iام است. مبالغ خسارت معوق بوسیله نرخ تورم تعدیل و پرداخت می‌شود.

شکل۱. ساختار داده‌های مبلغ خسارت معوق

		B				
		B_1	B_2	$\cdots$	B_{r-1}	B_r
	A_1	Y_{11}	Y_{12}	$\cdots$	$Y_{1,r-1}$	Y_{1r}
	A_2	Y_{21}	Y_{22}	$\cdots$	$Y_{2,r-1}$	
A	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
	A_{r-1}	$Y_{r-1,1}$	$Y_{r-1,2}$			
	A_r	Y_{r1}				

شکل ۲. ساختار داده‌های تعداد خسارت معوق

		B					
		B_1	B_2	$\cdots$	B_{r-1}	B_r	
	A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	$n_{1,r-1}$	n_{1r}	T_1
	A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	$n_{2,r-1}$		T_2
A	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
	A_{r-1}	$n_{r-1,1}$	$n_{r-1,2}$				T_{r-1}
	A_r	n_{r1}					T_r

برای پیش‌بینی مثلث پایینی شکل ۱ و ۲ روش‌ها و مدل‌های بسیاری پیشنهاد شده است. دو نوع از مهمترین آنها مدل لگ‌نرمال و مدل فضای وضعیت می‌باشد. برای

اطلاعات بیشتر به تیلور و اش[1]، رنشاو[2] و ورال[3] مراجعه نمایید. رنشاو(۱۹۹۴) تقریب درستی از گشتاور خطای پیش‌بینی برای مدل لگ نرمال به دست آورده است. خلاصه‌ای از مدل‌های پیشرفته‌تر برای این مسأله توسط هبرمن و رنشاو[4] ارائه شده است. ورال (۱۹۹۶) به بررسی مدل‌های جمعی تعمیم یافته پرداخت. دی‌یانگ و زنویرت[5] یک بررسی کلی از مدل فضای وضعیت[6] در مسائل مربوط به ذخیره فنی انجام داده‌اند. استفاده از ساختار بیزی در روش‌های مدل بندی به کار رفته در این مقاله به دلیل نیاز به استفاده از اطلاعات پیشین نمی‌باشد بلکه برای راحتی محاسبه است ما امکان استفاده از مدل‌های پیچیده‌تر را فراهم می‌آورد. روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلوی زنجیر مارکوفی برای تولید نمونه وبرآورد توزیع‌های پسین استفاده می‌شود. برخی روش‌های مدل بندی در زیر بخش بعد آمده است.

۲-۱. روش‌های مدل‌بندی

در این بخش به ارائه چهار مدل برای پیش‌بینی خسارت‌های معوق می‌پردازیم. ابتدا دو مدل که در گذشته استفاده شده است یعنی مدل لگ‌نرمال (مدل ۱) و مدل فضای وضعیت (مدل ۳) را تحلیل بیزی کرده، سپس این مدل‌ها را با مدل‌بندی همزمان تعداد و مقادیر ادعا و استفاده از تعداد ادعای کل برای مشخص کردن پارامترها تعمیم می‌دهیم. با انجام این تغییرات مدل‌های ۲ و ۴ حاصل می‌گردد.

۲-۱-۱. مدل ۱: مدل لگ‌نرمال

ساده‌ترین مدل برای داده‌های شکل ۱، مدل لگ‌نرمال است. این مدل توسط رنشاو (۱۹۸۹)، رنشاو و ورال(۱۹۹۴) و ورال (۱۹۹۱، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۶) معرفی و بررسی شده

1. Taylor & Ashe, 1983
2. Renshaw, 1989
3.Verral 1991, 1993, 1996
4. Heberman & Rensha, 1996
5. Dejong & Zehnwirth, 1983
6. State Space

است. ورال (۱۹۹۱) برآوردهای بیزی برای پارامترهای این مدل را به دست آورد. این مدل را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$Z_{ij} = \log \frac{Y_{ij}}{\inf_{ij}} \qquad (1)$$

$$Z_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^{2}),\ \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \qquad i, j = 1, 2, \cdots, r.$$

در مدل فوق Y_{ij} بیانگر مبلغ خسارت پرداخت نشده، $\inf_{ij}$ نشان دهنده تورم در سال مورد نظر و برای مبلغی است که با تأخیر $j-1$ سال پرداخت می‌شود. Z_{ij} لگاریتم مبلغ خسارت معوق می‌باشد که با تورم تعدیل شده است. همچنین $N(\mu_{ij}, \sigma^{2})$ نشان دهنده توزیع نرمال با میانگین μ_{ij} و واریانس σ^{2}است. در مدل(۱) فرض شده است که امید لگاریتم تعدیل یافته مبلغ خسارت، μ_{ij}، که در سال iام رخ داده و با تأخیر $j-1$ سال پرداخت می‌شود، توسط یک پیشگوی خطی، مدل‌بندی می‌شود. این پیشگوی خطی شامل امید لگاریتم تعدیل یافته مبالغ خسارت، μ است که در همان سال وقوع خسارت پرداخت شده. عاملی که بیانگر تغییرات ناشی از سال وقوع خسارت بوده را با α_i و عاملی که بستگی به تأخیر در پرداخت خسارت دارد، با β_j نشان داده شده است.

مدل ۱ نیاز به قیود مناسبی دارد تا بتوانیم پارامترهای مدل را مشخص نماییم. این قیود در مدل پارامتری شده فوق به صورت $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ می‌باشد. با این شرط پارامترها قابلیت شناسایی دارند. در غیر این صورت که برای دو مقدار متفاوت بردار پارامترها، تابع درستنمایی دو مقدار متفاوت اخذ می‌کند (Casella & Berger: 1990).

پارامترهایی که در این مدل لازم است برآورد شوند عبارتند از μ، σ^{2}، $\alpha = (\alpha_2, \cdots, \alpha_r)^T$، $\beta = (\beta_2, \cdots, \beta_r)^T$. مقدارهای‌عددی $Z^L = \{\log(Y_{ij}) : i + j > r + 1\}$ نیز پیش‌گویی می‌شوند. در بخش بعد چگالی پسین این پارامترها را بدست آورده و آنها را برآورد می‌نماییم.

جهت تکمیل فرمول‌بندی بیزی از تابع‌های پیشین استفاده می‌نماییم.

$$\begin{aligned} \mu &\sim N(0, \sigma_\mu^2), \alpha_i \sim N(0, \sigma_{\alpha_i}^2), \\ \beta_j &\sim N(0, \sigma_{\beta_j}^2),\ i,j = 2, \cdots, r, \\ \tau &= \sigma^{-2} \sim G(a_\tau, b_\tau). \end{aligned}$$

در فرمول فوق $G(a,b)$ نشان دهنده توزیع گاما با میانگین $\frac{a}{b}$ است. در این نوع مسائل معمولاً تابع‌های پیشین ناآگاهی‌بخش[1] را در نظر می‌گیرند.

اشکال مهم این مدل آن است که اطلاعات مربوط به تعداد خسارت‌های پرداخت شده را در نظر نمی‌گیرد. به عبارت دیگر، پیش‌بینی خسارت معوق در آینده، تنها به مبلغ خسارت پرداخت شده بستگی دارد. یعنی آگاهی از اینکه یک افزایش ناگهانی در تعداد تصادفات برای یک سال خاص داریم هیچ تأثیری بر روی پیش‌بینی مبالغ خسارت معوق نمی‌گذارد. بنابراین مدلی که اطلاعات ناشی از تعداد تصادفات هر سال را نیز در نظر بگیرد، مورد نیاز است.

۲-۱-۲. مدل ۲: مدل لگ‌نرمال و چند جمله‌ای

در اینجا یک مدل سلسله مراتبی که از همه اطلاعات شکل (۱) و (۲) استفاده کند، پیشنهاد می‌شود.

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & n_{ij} = 0 \\ inf_{ij} e^{Z_{ij}} & n_{ij} > 0 \end{cases}$$

با فرض اینکه $n_{ij} > ۰$ داریم:

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= \log \frac{Y_{ij}}{inf_{ij}}, \\ Z_{ij} &\sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),\ \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \log(n_{ij}), \\ (n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{ir})^T &\sim Multinomial((\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r), T_i), \quad \log(\frac{\pi_j}{\pi_1}) = \beta_j^*. \end{aligned} \qquad (۲)$$

1. Non-Informative

در مدل Y_{ij}، $\inf_{ij}$ و Z_{ij} مشابه مدل ۱ تعبیر می‌شوند. $(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ir})^T$ نشان‌دهنده تعداد تصادفاتی است که در سال iام رخ داده و با تأخیر $j-1$، $j = 1,2,\cdots,r$ پرداخت شده‌اند. π_j احتمال تعداد تصادفاتی است که با $j-1$ سال تأخیر پرداخت می‌شود. در مقایسه با مدل (۱) به مدل پیش‌گوی خطی عبارت $\log(n_{ij})$ اضافه شده است. بنابراین μ بیانگر امید لگاریتم تعدیل یافته پرداخت‌های غیر معوق می‌باشد. به عبارت دیگر μ میانگین کلیه مبالغی است که به ازای خسارت‌هایی که در همان سال وقوع رخ داده، پرداخت شده است. در این مدل α_i و β_j به ترتیب نشان‌دهنده اثر سال وقوع خسارت و اثر تأخیر در پرداخت خسارت هستند و β_j^*، نسبت تصادفاتی که با تأخیر $j-1$ سال پرداخت می‌شود به تصادفاتی که بدون تأخیر پرداخت می‌شود. برای ساده سازی مدل و برآورد پارامترهای آن از قیود محدود کننده به صورت $\beta_1^* = 0$ استفاده می‌شود.

مرحله دوم مدل (۲,۲) یا مدل چند جمله‌ای برای تعداد ادعا به صورت زیر است:

$$n_{ij} \sim poisson(\lambda_{ij}),\ log(\lambda_{ij}) = \mu^* + \alpha_i^* + \beta_j^*$$

به شرط اینکه:

$$\sum_{j=1}^{r} n_{ij} = n_{i.} = T_i \quad , \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} = \lambda_{i.} = T_i$$

که در آن T_i نشان‌دهنده تعداد کل تصادفاتی است که در سال iام رخ داده است. μ^* و α_i^* پارامترهای مزاحم هستند. برای جزییات بیشتر به اگرستی[1] مراجعه شود.

پارامترهایی که در این مدل می‌بایست برآورد شوند عبارتند از:

$$\mu، \sigma^2، \alpha = (\alpha_2, \cdots, \alpha_r)^T، \beta = (\beta_2, \cdots, \beta_r)^T، \beta^* = (\beta_2^*, \cdots, \beta_r^*)^T$$

مقدارهای عددی که باید پیش‌گویی شوند شامل:

$$Z_L^f = \{log(Y_{ij}) : i+j > r+1\}،\ N^L = \{n_{ij} : i+j > r+1\}،$$

---

1. Agresti, 1990

با فرض نامشخص بودن T_i، تعداد تصادفات رخ داده دارای خاصیت عدم حتمیت است. در چنین مواقعی می‌توان مدل لگ‌نرمال خطی برای تعداد تصادفات رخ داده را بدون شرط بر روی λ_{ij} و n_{ij} به کار برد. فرمول (۲) متوسط پرداختی به ازای ادعای نهایی $(PPCF = Y_{ij} / n_{ij})$ را مدل بندی می‌کند. علاوه بر این داشتن اطلاعات اضافی در مورد تعداد کل تصادفات $(T_1, T_2, ..., T_r)$ می‌تواند مفید باشد. در این مدل نیز از توابع پیشین ناآگاهی بخش استفاده می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\mu &\sim N(0, \sigma_\mu^2), \alpha_i \sim N(0, \sigma_{\alpha_i}^2), \\
\beta_j &\sim N(0, \sigma_{\beta_j}^2),\ j = 2, \cdots, r, \\
\tau &= \sigma^{-2} \sim G(a_\tau, b_\tau), \\
\beta_j^* &\sim N(0, \sigma_{\beta_j^*}^2),\ j = 2, \cdots, r.
\end{aligned}
$$

۲-۱-۳. مدل ۳: مدل فضای وضعیت برای مقادیر ادعا

مدل دیگری که برای این نوع مسائل استفاده می‌شود، مدل فضای وضعیت (خطی پویا) است، که در آن پارامترها به صورت بازگشتی به هم بستگی دارند.

مدل فضای وضعیت را می‌توان به این صورت نشان داد:

$$
\begin{aligned}
Z_{ij} &= \log \frac{Y_{ij}}{inf_{ij}}, \\
Z_{ij} &\sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),\ \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

تحت شرط $i = 1, 2, \cdots, r$ و $\alpha_1 = \beta_{i1} = 0$ برای هر پارامتر، معادلات بازگشتی به صورت زیر است:

$$
\beta_{ij} = \beta_{i-1,j} + \upsilon_i, \quad \upsilon_i \sim N(0, \sigma_\upsilon^2), \quad i = 2, \cdots, r, j = 2, \cdots, r
$$

تنها تفاوتی که در مقایسه با مدل ۱ مشاهده می‌شود، جایگزینی β_j با β_{ij} است. بنابراین اثر تأخیر در لگاریتم تعدیل یافته مبلغ خسارت با سال وقوع نیز تغییر می‌نماید.

کمیت‌هایی که در این مدل باید برآورد شوند عبارتند از: μ، σ^2، σ_u^2، σ_h^2، $\alpha=(\alpha_2,...,\alpha_2)$، $\beta^T=(\beta_2^T,...,\beta_2^T)^T$، $i=2,...,r$، و مقدار عددی $Z^L=\{\log(Y_{ij}):i+j>r+1\}$ نیز پیش‌گویی می‌شود. در بخش بعد چگالی پسین این کمیت‌ها را بدست آورده و آنها را برآورد می‌نماییم.

در مدل فضای وضعیت فقط کافی است توزیع پیشین برای اولین پارامتر فضای وضعیت تعریف شود. توزیع‌های پیشین برای همه پارامترهای دیگر به طور خودکار از شرایط مدل فضای وضعیت به دست می‌آید. برای جزییات بیشتر به کارلین و همکاران[۱] مراجعه شود. بنابراین توابع پیشین زیر برای پارامترها در نظر گرفته می‌شود:

$$\beta_{ij} \sim N(0,\sigma^2_{\beta_{ij}}) \ , \ \mu \sim N(0,\sigma^2_\mu)$$

قیود محدود کننده بر روی α_i بیانگر جرم احتمال پیشین بر روی $\alpha_1=0$ است. پیشین برای σ^{-2} گاما در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این تابع توزیع گامای ناآگاهی بخش برای پارامترها به صورت $\sigma_v^2 \sim G(a_v,b_v)$ و $\sigma_h^{-2} \sim G(a_h,b_h)$ است. توجه کنید که اگر $\sigma_v^{-2}=0$ یعنی به ازای $i,j,k=1,\cdots,r,\ i\neq k$ داشته باشیم $\beta_{ij}=\beta_{kj}$، مدل تبدیل به مدل ۱ می‌شود.

۲-۱-۴. مدل ۴: مدل فضای وضعیت برای متوسط مبلغ خسارت به ازای هر تصادف

تعمیم مدل فضای وضعیت به صورتی که بتوان از اطلاعات شکل (۱) نیز استفاده نمود، مدل زیر ارائه می‌شود:

$$Y_{ij}=\begin{cases} 0 & n_{ij}=0 \\ inf_{ij}e^{[illegible]} & n_{ij} [illegible] \end{cases}$$

با فرض $n_{ij}>0$ نتیجه می‌شود:

---
1. Carlin & et.al, 1992

$$Z_{ij} = \log\frac{Y_{ij}}{inf_{ij}},$$

$$Z_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), \qquad \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} + \log(n_{ij}), \tag{۴}$$

$$(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ir})^T \sim multinomial((\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r), T_i), \quad \log(\frac{\pi_j}{\pi_1}) = \beta_j^*, \quad \beta_1^* = 0.$$

روابط بازگشتی زیر نیز برقرار است:

$$\beta_{ij} = \beta_{i-1j} + v_i \ , \quad v_i \sim N(0, \sigma_v^2), \quad i = 2, \cdots, r \ , \ j = 2, \cdots, r$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + h_i \ , \quad h_i \sim N(0, \sigma_h^2), \quad i = 2, \cdots, r \ .$$

در ایـــن مـــدل Y_{ij}، $\inf_{ij}$، Z_{ij} و $(n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ir})^T$ مـــشابه مـــدل ۲ تعبیـــر می‌شوند. در مقایسه با مدل ۳ عبارت $\log(n_{ij})$ به مدل اضافه شده است لذا μ بیانگر امید لگاریتم تعدیل یافته پرداختی‌های غیرمعوق می‌باشد. به عبارت دیگر μ، میـانگین کلیه مبالغی است که به ازای خسارت‌هایی که در همان سال وقـوع رخ داده، پرداخـت شده است. α_i و β_{ij} نیز به صورت مدل ۳ تعبیر می‌شوند. بخش دوم مـدل یـا مـدل چند جمله‌ای دقیقاً مانند مدل ۲ و توابع پیشین این مدل مانند مدل ۲ و ۳ تعریف می‌شوند.

می‌توان مدل فضای وضعیت را برای تعداد تصادفات، به کار برد ولی این امر باعث پیچیدگی مدل می‌شود، در صورتی که اثر خاصی بر روی نتایج ندارد زیرا مساله مـورد علاقه برآورد مبلغ خسارت است. به علاوه، این کار باعث به وجود آمدن مشکلاتی در همگرایی و مشخص نشدن پارامترها می‌شود.

۲-۲. چگالی شرطی پسین برای مدل‌های به کار رفته

توزیع‌های پسین شرطی برای به کار بـردن MCMC در مـدل هـای ذکـر شـده، در ایـن قسمت ارائه می‌شود. نمونه‌گیری مکـرر از ایـن چگـالی‌هـای شـرطی بعـد از سـوختن[1] و

1. Burn-in

استفاده از تاخیر[1] نمونه مناسب، نمونه‌های لازم از چگالی پسین را به ما می‌دهد. از آنجا که محاسبات مربوط به مدل‌های به کار رفته در مدل تکراری وپیچیده است؛ محاسبات مربوط به مدل ۱ ذکر گردیده وبرای سه مدل دیگر به دلیل شباهت از ذکر آن می‌شود.

۱-۲-۲. محاسبات مربوط به مدل یک

مدل یک شامل پارامترهای μ ، α ، β و σ^{-2} است. مبالغ و تعداد تصادفات به دو بخش داده‌های مشاهده برای $i+j \le r+1$ و داده‌های گمشده (پارامترها) برای $i+j > r+1$ تقسیم می‌شود.

اگر Z^U نشان دهنده لگاریتم مبالغ خسارت پرداخت شده (تعدیل شده با تورم) و Z^L نشان دهند لگاریتم مبالغ خسارت‌های پرداخت نشده (تعدیل شده با تورم) باشد، Z ماتریسی است که شامل هر دو مبالغ خسارت پرداخت شده و پرداخت نشده می‌باشد (تعدیل شده با تورم). فرض کنید Z^L نیز به عنوان پارامتر در نظر گرفته می‌شود آنگاه بردار پارامتر به وسیله $(\mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2},Z^L)$ نشان داده می‌شود و بردار داده‌ها به وسیله Z^U نشان داده می‌شود. با استفاده از تئوری بیزی و نشان دادن چگالی‌های پیشین، حاشیه‌ای و شرطی بوسیله f توزیع‌های پسین به صورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
f(\mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2},Z^L \mid Z^U) \;\propto\; & \\
&\propto f(Z^U \mid \mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2},Z^L) f(\mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2},Z^L) \\
&\propto f(Z^U \mid \mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2}) f(Z^L \mid \mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2}) \\
&\propto f(Z \mid \mu,\alpha,\beta,\sigma^{-2}) f(\mu) f(\alpha) f(\beta) f(\sigma^{-2}).
\end{aligned}
$$

که در آن $a=(\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ و $b=(\beta_2,\ldots,\beta_r)$ توزیع‌های شرطی بدین صورت است:

---

1. Lag

$$f(\mu \mid .) \propto f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}) f(\mu)$$

$$f(\alpha \mid .) \propto f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}) f(\alpha)$$

$$f(\beta \mid .) \propto f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}) f(\beta)$$

$$f(\sigma^{2} \mid .) \propto f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}) f(\sigma^{-2})$$

$$f(Z^{L} \mid .) \propto f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}).$$

با فرض اینکه هیچ داده گمشده‌ای در مبالغ خسارت نداشته باشیم توزیع $f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2})$ تابع درستنمایی کامل است. بنابراین:

$$f(Z \mid \mu, \alpha, \beta, \sigma^{-2}) = (2\pi\sigma^{2})^{(-r^{2}/2)} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^{2}} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (Z_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j]^{2}\Big)$$

بنابراین توزیع‌های شرطی بدست می‌آید:

$$1)\ f(\mu \mid .) = N\Big(\frac{Z_{..}}{r^{2} + \sigma^{2}/\sigma_{\mu}^{2}}, \frac{\sigma^{2}}{r^{2} + \sigma^{2}/\sigma_{\mu}^{2}}\Big),$$

$$Z_{..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} Z_{ij}$$

$2)[a]$

$$f(\alpha_i \mid .) = N\Big(\frac{Z_{i.} - Z_{1.} - r\sum_{k \neq 1, i} \alpha_k}{2r + \sigma^{2}/\sigma_{\alpha_i}^{2}}, \frac{\sigma^{2}}{2r + \sigma^{2}/\sigma_{\alpha_i}^{2}}\Big), \quad i = 2, \cdots, r,$$

$$Z_{i.} = \sum_{j=1}^{r} Z_{ij},$$

$$[b] \quad \alpha_1 = -\sum_{i=2}^{r} \alpha_i,$$

$3)[a]$

$$f(\beta_j \mid .) = N\Big(\frac{Z_{.j} - Z_{.1} - r\sum_{k \neq 1, j} \beta_k}{2r + \sigma^{2}/\sigma_{\beta_j}^{2}}, \frac{\sigma^{2}}{2r + \sigma^{2}/\sigma_{\beta_j}^{2}}\Big), \quad j = 2, \cdots, r,$$

$$\ln_{.j} = \sum_{i=1}^{r} \log(n_{ij}) \quad , \quad Z_{.j} = \sum_{i=1}^{r} Z_{ij}$$

$$[b] \quad \beta_1 = -\sum_{j=2}^{r} \beta_j,$$

$$4)\ f(\tau = \sigma^{-2} \mid .) = G(a_{\tau} + r^{2}/2, \beta_{\tau} + SS/2)$$

$$SS = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (Z_{ij} - \mu_{ij})^{2} \quad , \quad \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

$$5)\ f(Z_{ij} \mid .) = N(\mu_{ij}, \sigma^{2}) \quad , \quad i = 2, \cdots, r, \ j = r - i, 2, \cdots, r$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

۳. مثال کاربردی

برای ملموس شدن نتایج نظری بخش‌های قبل در این بخش یک مثال شرح داده می‌شود. ابتدا روش جمع‌آوری داده‌ها بررسی شده و در قسمت بعد، تحلیل داده‌ها با استفاده از روش‌های بیان شده در بخش‌های قبل انجام می‌شود.

۳-۱. جمع‌آوری داده‌ها

با توجه به ساختار مورد مطالعه، با مراجعه به چندین شرکت بیمه‌ای معتبر در ایران و بررسی سوابق شرکت‌ها از نظر ذخیرهٔ اطلاعات سال‌های قبل به صورت رایانه‌ای یا دستی، یک شرکت انتخاب و داده‌های آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

داده‌های این شرکت در رشتهٔ خسارت اتومبیل در سه قسمت حوادث، بدنه و شخص ثالث به صورت رایانه‌ای موجود بودند. از آنجا که احتمال وقوع حادثه‌ای که منجر به خسارت در یکی از چند گزینهٔ بالا گردد را با توزیع یکنواخت در نظر می‌گیریم، داده‌های مربوط به مبالغ خسارت‌ها را با هم تلفیق کرده که البته به همان نسبت داده‌های مربوط به تعداد خسارت نیز با هم تلفیق می‌شوند.

داده‌های مورد بررسی (مربوط به سال‌های ۸۳-۷۷)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۷۷	۳۹۶۸۱	۳۱۱۳۴	۱۱۲۸۴	۴۴۴۳	۱۱۰۰	۱۱۴	۲۷۴
۷۸	۳۷۰۴۷	۳۳۲۹۱	۱۱۶۱۷	۶۰۳۶	۵۰۶	۱۳۶	
۷۹	۴۰۳۰۵	۳۳۹۳۵	۱۴۵۱۵	۲۲۳۹	۸۱۳		
۸۰	۴۳۵۹۴	۳۷۳۰۰	۱۱۰۸۷	۱۴۴۹			
۸۱	۷۴۸۷۷	۵۱۲۶۷	۱۳۶۵۵				
۸۲	۱۷۴۵۲۳	۱۳۹۳۸۰					
۸۳	۲۳۷۸۸۴						

مبالغ خسارت معوق (میلیون ریال)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	T
۷۷	۳۸۵۵۰	۲۶۹۵	۷۹۶	۲۵۹	۷۱	۱۸	۱۲	۴۲۴۰۱
۷۸	۳۲۵۰۱	۲۷۲۲	۸۶۹	۳۱۰	۳۵	۱۱		۳۶۴۷۴
۷۹	۲۹۵۶۷	۲۹۰۷	۷۶۶	۱۱۴	۳۰			۳۳۴۰۹
۸۰	۲۴۲۵۹	۲۳۶۹	۵۰۱	۶۲				۲۷۲۱۸
۸۱	۲۸۰۰۴	۲۹۴۳	۴۶۴					۳۲۵۱۶
۸۲	۵۰۶۶۳	۶۲۴۴						۵۷۷۶۵
۸۳	۶۰۰۰۷							۶۶۶۶۱

تعداد خسارت معوق

شاخص تورم	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲	۱۳۸۳
درصد	۱۱۸/۱	۱۴۱/۸	۱۵۹/۷	۱۷۷/۹	۲۰۶	۲۳۸/۲	۲۷۴/۵

شاخص تورم

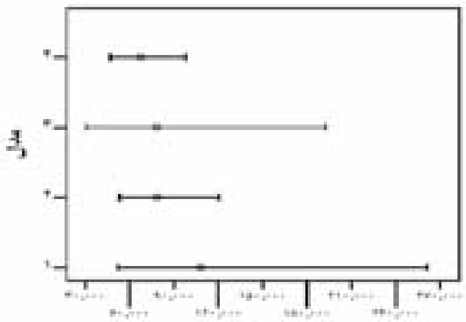
مدل	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	کل
یک	۸۵۷۳۰	۲۶۹۸۰	۵۴۴۷	۱۳۶۵	۴۲۶	۲۱۸	۱۲۳۳۰۰
sd	(۴۷۷۵۰)	(۱۶۴۵۰)	(۲۹۱۴)	(۸۷۵)	(۲۵۸)	(۲۱۶)	(۵۸۲۸۰)
دو	۵۹۷۶۰	۱۷۰۶۰	۲۵۹۷	۷۷۱	۲۶۰	۲۸۷	۸۰۷۲۰
sd	(۱۴۵۰۰)	(۴۳۵۳)	(۶۱۴)	(۲۳۱)	(۸۸)	(۱۲۹)	(۱۷۳۲۰)
سه	۶۲۵۷۰	۱۸۹۴۰	۳۸۵۲	۱۰۲۰	۳۱۳	۲۲۵	۸۶۹۳۰
sd	(۴۷۶۳۰)	(۲۳۳۲۰)	(۲۰۵۲)	(۷۸۳)	(۲۰۶/۷)	(۳۹۲/۵)	(۶۷۹۷۰)
چهار	۵۱۳۱۰	۱۲۳۵۰	۲۴۳۷	۶۵۱/۴	۲۱۸/۳	۲۳۶/۶	۹۰۱۰۱
sd	(۱۱۰۲۰)	(۳۲۱۶)	(۴۹۴/۸)	(۱۸۳/۶)	(۷۴/۲۸)	(۹۰۱/۵)	(۱۳۱۴۰)

میانگین پسین و انحراف معیار مبالغ خسارت معوق که در سالهای آتی بایستی پرداخت گردند

(ارقام به میلیون ریال)

مدل	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲	۱۳۸۳
یک	۱۰۱	۱۳۶	۳۴۶/۲	۲۲۵۲	۲۴۴۰۰	۹۳۸۵۰
sd	(۷۸)	(۷۴)	(۱۶۲)	(۱۰۸۲)	(۱۲۵۳۰)	(۵۷۶۹۰)
دو	۲۳۶	۶۸۱	۲۲۶	۱۰۶۰	۱۱۴۵۰	۶۸۹۷۰
sd	(۶۵)	(۴۷)	(۴۶)	(۲۱۸)	(۲۴۷۰)	(۱۷۵۶۰)
سه	۱۰۷	۱۴۵	۴۱۹	۲۲۹۶	۱۶۸۵۰	۶۷۴۶۰
sd	(۸۱)	(۸۴)	(۲۱۴)	(۱۰۴۲)	(۸۸۱۲)	(۲۰۸)
چهار	۲۲۷	۱۷۵	۲۲۰	۱۰۳۷	۹۸۴۵	۵۸۶۲۰
sd	(۶۱)	(۴۲)	(۴۰)	(۱۹۱)	(۱۹۳۲)	(۱۲۶۳۰)

شکل ۳. مقایسه بازه اطمینان مبالغ خسارت معوق کل در مدل‌ها (ارقام به میلیون ریال)



۲-۳. تحلیل برآوردها با استفاده از فاصله اطمینان

با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که بازه اطمینان به دست آمده برای مدل‌های ۲ و ۴ دارای طول کم‌تر و در نتیجه احتمال پوشش بیشتری است. به نظر می‌رسد مدل ۲ و ۴ در مقایسه با مدل‌های ۱ و ۳ بهتر عمل کنند و البته با در نظر گرفتن این موضوع که در مدل‌های ۲ و ۴ تعداد تصادفات نیز در مدل‌بندی استفاده شده است می‌توان نتیجه گرفت که این امر باعث بهبود برآورد در مدل‌ها گردیده است.

شکل ۴. مقایسه بازه اطمینان مبالغ خسارت معوق در مدل‌ها به تفکیک سال (ارقام به میلیون ریال)

۳-۳. تحلیل برآوردها با استفاده از DIC

معیار دیگری که برای مقایسه مدل‌ها استفاده می‌شود، معیار انحراف اطلاع یا به اختصار DIC است. در این معیار فرض می‌شود که میانگین توزیع پسین یک برآورد مناسب از پارامترها است. در صورتی که توزیع پسین چوله یا دومدی باشد، ممکن است DIC معیار مناسبی نباشد.

شاخص DIC

مدل‌ها	مدل ۲	مدل ۴
DIC	۲۸۳۵/۹۳۴	۲۸۳۰/۰۴۳

DIC تعمیم شاخص معیار آکائیک است. مدلی که دارای DIC کمتر باشد بهترین پیش‌گو برای داده‌ها است.

از آنجا که در تحلیل داده‌ها با استفاده از بازه اطمینان به این نتیجه رسیدیم که مدل ۲ و۴ بهتر عمل می‌کنند، به مقایسه DIC این دو مدل می‌پردازیم. به وضوح در می‌یابیم که مدل ۴ نتایج بهتری را می‌تواند پیش‌گویی کند ولی از آنجا که برآوردهای مدل ۲ و ۴ چندان تفاوتی با هم ندارند و مدل ۲ ساده‌تر است، پس بر اساس اصل امساک مدل ۲ برای این داده‌ها توصیه می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

برای محاسبهٔ ذخیره فنی مربوط به خسارت معوق بیمه اتومبیل از روش‌های بیمه‌ای وتئوری اعتبارمندی استفاده می‌شود. هدف از این مقاله ارائه روش آسانتری برای این محاسبات با تکیه بر ساختار بیزی مدل‌های به کار رفته و انجام محاسبات با استفاده از روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی می‌باشد. استفاده از ساختار بیزی فقط به دلیل راحتی محاسبه است. دو مدل لگ‌نرمال و مدل فضای وضعیت در این مقاله استفاده شده است

و اثر به‌کارگیری تعداد خسارت که منجر به بهبود مدل گردید نیز مقایسه شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که آگاهی از اینکه یک افزایش یا کاهش ناگهانی در تعداد تصادفات برای یک سال خاص داریم برروی بهبود پیش‌بینی، همانطور که در مدل‌های ۲و ۴ دیده شد اثر گذار می‌باشد.

از آنجا که مدل‌های بسیاری مثل مدل‌های جمعی تعمیم یافته (ورال، ۱۹۹۶) توسط متخصصان برای پیش‌بینی خسارت معوق بیمه اتومبیل پیشنهاد شده است، می‌توان اثر تعداد و همچنین چگونگی استفاده از روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی را در آنها نیز مقایسه نمود.

منابع

1.Agresti, A 1990, *Categorical data analysis*, John Wiley & Sons New York.

2.Carlin, B.P 1992, 'State space modeling of non-standard actuarial time serie', *Insurance: Mathematics and Economics*, no.11, p.p 209-22.

3.Carlin, B.P, Polson, N.G & Stoffer, D.S 1992, 'A monte carlo approach to non-normal and nonlinear state-space modeling', *Journal of the American Statistical Associatian,* No. 87,P. 493-500.

4.Casella,G. & Berger, Roger L 1990, *Statistical Inference* ,Wadsworth & Books, p.511.

5. De jong, P & Zehnwirth, B 1983, 'Claims reserving, state space models and kalman filter,'*The Journal of the Institute of Actuaries*, no. 110, p.p 157-81.

6.Heberman, S & renshow, A.E 1996, 'Generalized linear models and science', *The Statistician*, no. 45, p.p 407-36.

7.Renshaw, A.E 1989, 'Chain ladder and interactive modelling', *The Journal of The Institute of Actuaries*, no. 116, p.p 559-87.

8.Renshaw, A.E 1994, On the second moment properties and the implementation of certian GLIM based on stochastic claims reserving models', *Technical Report*, no. 65, Department of Actuarial Statistics, City University, London, Uk.

9.Taylor, G.C & Ashe, F.R 1983, 'Second moments of estimates of outstanding claims', *Journal of Econometrics*, no. 23, p.p 37-61.

10.Verrall, R 1991, 'Chain ladder and maximum likelihood', *The Journal of the Institute Of Actuaries*, no. 118, p.p 489-99.

11.Verrall, R 1993, 'Negative increment claims: chain ladder and linear models', *The Journal of the Institute of Actuaries*, no. 120, p.p 171-83.

12.Verrall, R 1996, 'Claims reserving and generalized additive models', *Insurance: Mathematics and Economics*, no. 19, p.p 31-43.