فصلنامه صنعت بیمه / سال هیجدهم / شماره ۳ / پاییز ۱۳۸۲ / شماره مسلسل ۷۱/ صفحات ۱۱۷تا۱۳۵

نظریه باورمندی و کاربردهای آن در صنعت بیمه

اصغر اکبری‌کوشکچه (۱)

چکیده

محاسبه نرخ حق بیمه با توجه به تجارب گذشته یکی از دغدغه‌های اساسی بیمه‌گران و از جمله مهم‌ترین اهداف علم آمار بیمه است. در بسیاری موارد ناگزیر از تعیین حق بیمه برای گروهی از قرادادهای بیمه هستیم که تجربه اندکی در مورد یک گروه خاص و تجربه بیشتری از دیگر قراردادها داریم که کمابیش به یکدیگر مربوط هستند. برای محاسبه حق بیمه‌ها در این حالت می‌توان از میانگین کل و یا میانگین وزنی دو گروه استفاده کرد. برای به دست آوردن میانگین وزن هر گروه نظریات گوناگونی وجود دارد که نظریه باورمندی از جمله معتبرترین روش‌ها در این رابطه است. این مقاله به دنبال بررسی کاربردهای «نظریه باورمندی با بزرگترین دقت» در تعیین حق بیمه است.

برای این منظور پس بررسی یک مدل پایه‌ای باورمندی، با استفاده از مدل تعدیل شده بولمن و بیان مثالهایی در مورد آن از جمله مثالی با توزیع پواسن آمیخته به بررسی مدل بولمن - استراپ پرداخته می‌شود و با استفاده از آن روش برآوردگرهای باورمندی مورد بحث قرار می‌گیرند و یک مثال عملی در مورد کاربرد آن در بیمه اتوموبیل در قالب ۹ گروه اتوموبیل‌ها طی ده سال مورد بررسی قرار گرفته و در مورد آن عامل‌های باورمندی مورد برآورد قرار می‌گیرند.

واژگان کلیدی

نظریه باورمندی، پلونده همگن، پلونده ناهمگن، نظریه باورمندی با بزرگترین دقت، تعیین حق بیمه، مدل بولمن - استراب.

---

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه اصفهان

مقدمه

اغلب در امور بیمه ناگزیر از تعیین حق بیمه برای گروهی از قراردادهای بیمه هستیم که تعداد محدودی تجربه در مورد یک گروه خاص و تعداد زیادی تجربه از دیگر قراردادها داریم که کمابیش به هم مربوط هستند. بنابراین مسئله تعیین الگوی نرخ بندی تجربی، برای تعیین حق بیمه برای سال بعد در هر گروه مورد نظر است که در آن هر دو تجربه مجزا و گروهی منظور شود.

برای این منظور دو نظر می‌توان درنظر گرفت. اول اینکه همان حق بیمه گروهی را درنظر بگیریم که با میانگین کل برآورد می‌شود. این روش در صورتی معقول است که پلونده [Palvande] همگن باشد، یعنی اینکه میانگین در تمام گروه‌ها یکسان باشد. اگر چنین نباشد، با این روش مخاطره‌های «خوب» امور بیمه خود را به دیگران واگذار می‌کنند و بیمه گر را با مخاطره‌های «بد» رها می‌کنند. نظر دوم این است که برای هر گروه میانگین مخاطره‌های همان گروه را به عنوان حق بیمه مجزا درنظر بگیریم. چنین حق بیمه هایی وقتی قابل استفاده هستند که پلونده ناهمگن باشد؛ اما این حق بیمه‌ها وقتی معقول است که تجربه‌ها در هر گروه به اندازه کافی بزرگ باشند. از ابتدای قرن بیستم، اغلب یک حد وسط بین این دو درنظر گرفته می‌شود، یعنی میانگین وزنی

$$z_j\overline{X}_j+(1-z_j)\overline{X} \qquad (1)$$

که در آن عامل z_j، بیان می‌کند که تجربه مجزای مربوط به گروه jام چه اندازه «قابل باور» است و فاکتور باورمندی نامیده می‌شود. یک حق بیمه در این شکل میانگین وزنی را حق بیمه باورمندی می‌نامیم. محاسبه حق بیمه براساس تجربه‌های مجزا همانند تجربه‌های گروهی موجه است، زیرا پلونده نه کاملاً همگن است و نه کاملاً ناهمگن. مخاطره‌ها در گروه jام دارای مشخصه هایی هستند خاص همان گروه و مشخصه‌هایی همانند گروه‌های دیگر.

به طور شهودی، z_j نزدیک به یک خواهد بود اگر در گروه jام در معرض بودگی[1] خیلی بزرگ باشد، واریانس درداخل گروه کوچک باشد یا واریانس بین گروه‌ها بزرگ باشد. دو روش برای به دست آوردن مقدار z_j وجود دارد. در «نظریه باورمندی با

1- Exposure

نوسان‌های محدود»[1] باورمندی کامل وقتی به دست می‌آید که در معرض بودگی به اندازه کافی بزرگ باشد، به این معنی که احتمال خطا در میانگین مجزا از یک آستانه از پیش تعیین شده کمتر باشد. در غیر این صورت، فاکتور باورمندی به نسبت تجربه‌های واقعی و آنچه برای باورمندی کامل نیاز است بستگی خواهد داشت. در این نوشتار مدل‌های پایه در «نظریه باورمندی با بزرگ‌ترین دقت»[2] را مرور می‌کنیم، که در آن عامل باورمندی به عنوان ضرایب بهینه در یک مدل بیزی با شرکت دادن اجزای واریانس دنبال می‌شود. این مدل را بولمن[3] در دهه ۱۹۶۰ توسعه داد.

۱. مدل‌های پایه باورمندی

۱ـ۱. یک مدل پایه باورمندی

برای معرفی ایدهٔ زیر بنایی نظریه باورمندی، یک مدل (پایه) باورمندی را مطالعه می‌کنیم. تجربه‌های تصادفی از ادعاهای X_{ij} از گروه j ام، $j=1,\dots,J$، را درسال t درنظر بگیرید. برای سادگی کار فرض می‌کنیم در هر گروه تنها یک قرارداد وجود دارد که در چند دوره زمانی، T، مشاهده شده است. بنابراین برای هر j داریم $t=1,\dots,T$. ابتدا فرض می‌کنیم که همهٔ این ادعاها از یک میانگین گروهی m_j به اضافه یک «نوفه سفید» تشکیل شده‌اند، یعنی اینکه همه X_{jt}ها مستقل و هم توزیع با توزیع $N(m_j,s^2)$ هستند. در واقع میانگین در بین گروه‌ها متغیر است و واریانس در همهٔ گروه‌ها مقدار ثابت $S^2>0$ است. ممکن است مساوی بودن میانگین‌ها را با استفاده از تکنیک آشنای آنالیز واریانس بیازماییم. اگر فرض صفر مبنی بر تساوی میانگین‌ها پذیرفته نشود، یعنی واریانس بین میانگین‌های گروهی بیش از مقدار مورد انتظار برای واریانس داخل گروه‌هاست. بنابراین به متغیر تصادفی زیر که، مجموع مربعات بین گروهی، نامیده می‌شود توجه می‌کنیم.

$$SSB=\sum_{j=1}^{J} T(\overline{X}_j-\overline{X})^2 \qquad (۲)$$

می‌توان نشان داد که، تحت فرض صفر، SSB دارای میانگین $(J-1)s^2$ است. از آنجا که S^2 نامعلوم است، به یک برآوردگر مجزا از این پارامتر نیاز داریم. این برآوردگر با نگاهی

1. Limited Fluctuation Credibility Theory
2. Greatest Accuracy Credibility Theory
3. Buhlmann

به مجموع مربعات درون گروهی یا SSW به دست می‌آید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SSW=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(X_{jt}-\overline{X}_j)^2 \qquad (۳)$$

می‌توان نشان داد که SSW دارای میانگین $J(T-1)s^2$ است. با ضرب SSB و SSW در مقادیر مناسب می‌توان دو آماره با میانگین s^2 به دست آورد. آماره‌های به دست آمده به ترتیب «میانگین مربعات بین گروهی» و «میانگین مربعات درون گروهی» نامیده می‌شوند. ممکن است که آزمون فیشر را انجام دهیم، که یک مقدار «بزرگ» از MSB در مقایسه با MSW رد فرض صفر مبنی بر تساوی میانگین‌ها را مشخص می‌کند. آماره مورد استفاده «نسبت واریانس‌ها» یا «نسبت F» نامیده می‌شود؛

$$F=\frac{MSB}{MSW}=\frac{\frac{1}{J-1}SSB}{\frac{1}{J(T-1)}SSW} \qquad (۴)$$

تحت فرض صفر، $\frac{SSB}{S^2}$ دارای توزیع $X^2(J-1)$ است؛ $\frac{SSB}{S^2}$ نیز دارای توزیع $X^2(J(T-1))$ است. علاوه بر این می‌توان نشان داد که این دو متغیر تصادفی مستقل هستند، بنابراین آماره F دارای توزیع $F(J-1,J(T-1))$ است. برای اطلاع بیشتر می‌توانید به مبحث «آنالیز واریانس یک طرفه» در هر کتاب آمار ریاضی مراجعه کنید.

۱.۱.۱ مثال (یک پلونده ناهمگن)

فرض کنید که داده‌های زیر برای ۳ گروه در ۵ سال مشاهده شده باشد:

t=۲	t=۳	t=۴	t=۵	$\overline{X}_j$
				t=۱
۹۳/۷	۱۰۳/۹	۹۲/۵	۱۱۰/۶	۱۰۰/۰
			j=۱	۹۹/۳
۱۰۸/۳	۱۱۸/۰	۹۹/۴	۱۱۱/۸	۱۱۰/۰
			j=۲	۱۱۲/۵
۱۴۰/۹	۱۰۸/۳	۱۰۵/۰	۱۱۶/۶	۱۲۰/۰
			j=۳	۱۲۹/۲

برای این داده‌ها داریم MSB=۵۰۰ با ۲ درجه آزادی و MSW=۱۰۹ با ۱۲ درجه آزادی. این مقادیر مقدار F=۴/۶ را به دست می‌دهد، که در سطح ۰/۹۵ درصد معنی دار

است، مقدار بحرانی $F_{0/95}(2,12)=3/89$ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که داده‌ها نشان می‌دهند که میانگین ادعاها در همه گروه‌ها برابر نیست.

اگر فرض صفر رد نشود، معنی آن این است که هیچ گوه آماری علیه اینکه پلونده همگن است وجود ندارد، بنابراین میانگین کل را برای همه گروه‌ها به عنوان حق بیمه اعمال می‌کنیم. اگر فرض صفر رد شود، ظاهراً تفاوتی معنی دار بین میانگین‌های گروهی m_j وجود دارد. ممکن است کسی m_jها را مقادیر ثابت، اگرچه نامعلوم، قلمداد کند و بکوشد تا یک سیستم را در مورد آنها پیدا کند، برای مثال یک رگرسیون برای این میانگین‌ها با استفاده از داده‌های متناظر انجام دهد. در مقابل ممکن است کسی فرض کند که m_jها به وسیله یک مکانیزم تصادفی، مثلاً یک مکانیزم «نوفه سفید» مشابه به‌عنوان تغییرات درون گروهی از میانگین گروه، تولید شده‌اند. یعنی می‌توانیم متغیرهای تصادفی ادعاهای تجربی را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt} \qquad j = 1, ..., J\ ,\ t = 1, ..., T \qquad (5)$$

که در آن Ξ_j و Ξ_{jt} متغیرهای تصادفی مستقل با $E[\Xi_j]=E[\Xi_{jt}]=0$ ، $Var[\Xi_j]=a$ و $Var[\Xi_{jt}]=s^2$ هستند. بنابراین واریانس X_{jt} در (۴) عبارت است از مجموع واریانس‌های اجزای سمت راست مدل. مدل‌هایی مانند (۴) به عنوان مدل‌های اجزای واریانس[1] معروف هستند. این مدل یک شکل ساده شده از مدل کلاسیک بولمن است. یکی از ساده‌سازی‌ها این است که فرض مستقل بودن را به کار می‌بریم و بولمن فرض می‌کند که اجزای واریانس ناهمبسته هستند. علاوه بر این در مدل فوق نه تنها واریانس‌ها برای تمام مشاهدات یکسان است بلکه همه گروه‌ها نیز دارای تعداد مشاهدات یکسانی هستند، بنابراین از آن به عنوان «مدل بولمن تعدیل شده» نام می‌بریم.

تعبیر اجزای مختلف در مدل (۴) به صورت زیر است:

- m میانگین کل است، که میانگین هر قرارداد دلخواه در داخل پلونده است؛
- Ξ_j یک اختلاف تصادفی از m است که برای گروه jام مشخص شده است؛ به شرط معلوم بودن $\Xi_j=\xi$، مقدار مورد انتظار X_{jt} برابر $m+\xi$ است. در واقع میانگین X_{jt} است وقتی که طول دوره زمانی مشاهدات، T، به بی نهایت میل کند (long run mean)؛
- Ξ_{jt} عبارت است از اختلاف قرارداد در سال t ام از (long run mean)؛

1. Variance Components Model

جز Ξ_j کیفیت مخاطره را در این قرارداد خاص تبیین می‌کند. مقدار مورد انتظار $E[\Xi_j]$ برابر صفر است و واریانس آن تفاوت‌های بین قراردادها را تبیین می‌کند. توزیع Ξ_j ساختار مخاطره را در پلونده بیان می‌کند؛ این توزیع به عنوان توزیع ساختار شناخته می‌شود. Ξ_{jt} تغییرات درون گروهی را بیان می‌کند؛ تغییرات ادعاها در زمان t بین قراردادهای «خوب» و «بد» در گروه j.

توجه کنید که در مدل فوق، متغیرهای تصادفی X_{jt} برای یک j ثابت وابسته هستند زیرا همه آنها دارای کیفیت مخاطره Ξ_j هستند. در حقیقت متغیرهای تصادفی مستقل، از قانون احتمالاتی مشابهی پیروی می‌کنند که شامل پارامترهای نامعلومی است و می‌توان از نظر دیگری آنها را وابسته فرض کرد؛ آنها با هم مرتبط هستند زیرا همگی حاوی اطلاعاتی سازگار در مورد این پارامترها هستند.

در قضیه زیر به دنبال یک برآوردگر (پیش بین) برای $X_{j,T+۱}$ مربوط به دوره زمانی آینده هستیم که یک ترکیب خطی همگن از مشاهدات $X_{۱۱},...,X_{JT}$ است و دارای میانگینی برابر با میانگین $X_{j,T+۱}$ و میانگین مربعات خطای کمینه باشد. خواهیم دید که این برآوردگر دارای شکل باورمندی است؛این برآوردگر میانگین وزنی از ادعاهای تربیو میانگین کل است. این قضیه همچنین مقدار بهینه عامل باورمندی x_jرا به دست می‌دهد. در اینجا هدف پیش بینی بهینه مقدار پرداخت در دوره بعدی (T+۱) است، زیرا این مقدار، حق بیمه‌ای را که باید برای این قرارداد اعمال شود مشخص می‌کند. فرض هایی که در مورد توزیع‌ها درنظر گرفته می‌شود شامل همه مقادیر $t=۱,...,T$ خواهد بود. توجه کنید که در قضایای زیر، شرط نرمال بودن داده‌ها مورد نیاز نیست.

۱-۱-۲. قضیه (مدل تعدیل شده بولمن؛ برآوردگر همگن)

فرض کنید ادعاهای تجربی $X_{j,t}$ در سال tام را بتوان به صورت مجموع اجزایی مستقل نوشت:

$$X_{jt}=m+\Xi_j+\Xi_{jt} \qquad j=۱,...,J \ , \ t=۱,...,T \tag{۶}$$

که در آن Ξ_j و Ξ_{jt} متغیرهای تصادفی مستقل با $E[\Xi_j]=E[\Xi_{jt}]=۰$ و $Var[\Xi_j]=a$ و $Var[\Xi_{jt}]=s^۲$ برای همه j,iها هستند. آنگاه ترکیب خطی همگن $g(X_{۱۱},...,X_{JT})=g_{۱۱}X_{۱۱}+...+g_{JT}X_{JT}$ که بهترین پیش بین ناریب $X^{*H}_{j,T+۱}$ از $X_{j,T+۱}$ با کمترین میانگین مربعات خطای

$$MSE=E[\{X_{j,T+۱}-g(X_{۱۱},...,X_{JT})\}^۲] \tag{۷}$$

است برابر است با حق بیمه باورمندی

$$X_{j,T+1}^{*H}=z\overline{X}_j+(1-z)\overline{X} \qquad (۸)$$

که در آن z عامل باورمندی بهینه (که در این حالت برای همه گروه‌ها یکسان است)، $\overline{X}_j$ برآوردگر مجزا برای m و $\overline{X}$ برآوردگر جمعی برای m هستند و داریم:

$$z=\frac{aT}{aT+s^2} \qquad (۹)$$

$$\overline{X}=\frac{1}{JT}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}X_{jt} \qquad (۱۰)$$

$$\overline{X_j}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_{jt} \qquad (۱۱)$$

توجه کنید برای اینکه (۷) یک آماره باشد باید نسبت s^2/a معلوم باشد. اگر این نسبت نامعلوم باشد باید به طریقی آن را برآورد کنیم. این حقیقت که عامل باورمندی (۸) مستقل از j است ناشی از ساده سازی فرض‌های مدل است: در معرض بودگی در همه گروه‌ها یکسان است و همه مشاهدات دارای واریانس مساوی هستند.

اگر اجازه دهیم تابع g(۰) شامل یک مقدار ثابت باشد، آن گاه به دنبال بهترین برآوردگر خطی ناهمگن هستیم، قضیه زیر این برآوردگر رابه دست می‌دهد. ابتدا باید به دو نکته توجه کنیم. اول اینکه محدودیت نااریب بودن حذف شده است. دوم اینکه در برآوردگر (۱۱) $\overline{X}$ از برآوردگر (۷) با m جایگزین شده است. این بدان معناست که حق‌بیمه باورمندی ناهمگن در گروه j ام داده‌های دیگر گروه‌ها را شامل نمی‌شود. در حق‌بیمه باورمندی همگن لازم بود که نسبت s^2/a معلوم باشد؛ در حق بیمه باورمندی ناهمگن لازم است مقدار m را نیز بدانیم.

۱-۱-۳. قضیه (مدل پایه باورمندی؛ برآوردگر ناهمگن)

تحت فرض هایی که در قضیه قبل برای X_{jt} درنظر گرفتیم، ترکیب خطی $g(X_{11},...,X_{JT})=g_0+g_{11}+...+g_{JT}X_{JT}$ که بهترین پیش بین ناهمگن $X_{j,T+1}^{*}$ از $X_{j,T+1}$ با کمترین میانگین مربعات خطا را به‌دست می‌دهد، عبارت است از حق بیمه باورمندی

$$X^*_{j,T+1}=z\overline{X}_j+(1-z)m \qquad (12)$$

که در آن $\overline{X}_{j,z}$ همان مقادیر فرمول‌های (۸) و (۱۰) هستند.

۲.۱ مثال

داده‌های مثال ۱.۱.۱ رادرنظر بگیرید. می‌توان نشان داد که در مدل (۴)، صورت F دارای میانگین $aT+s^2$ و مخرج آن دارای میانگین s^2 است. بنابراین می‌توان $1-\frac{1}{F}$ را برای برآورد z استفاده کرد. عامل باورمندی به دست آمده عبارت است از $z=0/782$. بنابراین برآوردگرهای بهینه برای سال بعد در سه گروه عبارت است از، $0/782\overline{X}_j+(1-0/782)\overline{X}$ که به ترتیب مقادیر ۱۰۲/۸، ۱۱۰ و ۱۱۷/۸۲ را برای گروه‌های اول تا سوم نتیجه می‌دهد.

۳.۱ تضعیف فرض‌های مربوط به توزیع

در مدل (۴) فرض کردیم که مؤلفه‌های Ξ_j و Ξ_{jt} مستقل هستند؛ می‌توان در اثبات قضایای ۲.۱.۱ و ۳.۱.۱ (پیوست ۱) دید که

$$z=\frac{Cov[X_{j,T+1}-\overline{X},\overline{X}_j-\overline{X}]}{Var[\overline{X}_j-\overline{X}]} \qquad (13)$$

$$z=\frac{Cov[X_{j,T+1}-\overline{X}_j]}{Var[\overline{X}_j]} \qquad (14)$$

بنابراین تنها کوواریانس‌های بین X_{jt}ها اهمیت دارند. لذا ممکن است ما فرض‌ها را ضعیف‌تر از استقلال درنظر بگیریم، طوری که باز هم همان نتایج به دست آید. یک مثال از چنین فرض هایی وقتی است که مستقل و هم توزیع بودن Ξ_{jt}ها فقط به شرط Ξ_j به دست بیاید و $E[\Xi_{jt}|\Xi_j]\equiv 0$ اگر توزیع هم زمان Ξ_j و Ξ_{jt} چنین باشد، نه لزومی دارد که Ξ_jها از هم مستقل باشند و نه Ξ_{jt}ها. اما در هر حال ناهمبسته هستند.

۱-۳-۱. لم

اگر متغیرهای تصادفی $\Xi_{j1}...\Xi_{jT}$ مشروط بر Ξ_j مستقل و هم توزیع با میانگین صفر باشند، آن‌گاه Ξ_{jt} و Ξ_{ju} , $t\neq u$ ناهمبسته هستند همان طور که Ξ_j و Ξ_{jt} ناهمبسته‌اند.

برهان: برای $t\neq u$ بنابر فرض، داریم $Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]\equiv 0$ وقتی که $E[\Xi_{ju}|\Xi_j]\equiv 0$ به راحتی می‌توان دید که $Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]\equiv 0$، بنابراین با استفاده از قاعده تجزیه کوواریانس برای توزیع‌های شرطی، هر دو کوواریانس زیر برابر صفر هستند:

$$Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}]=E[Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]]+Cov[E[\Xi_{jt}|\Xi_j],E[\Xi_{ju}|\Xi_j]] \quad (۱۵)$$
$$Cov[\Xi_j,\Xi_{jt}]=E[Cov[\Xi_j,\Xi_{jt}|\Xi_j]]+Cov[E[\Xi_j|\Xi_j],E[\Xi_{jt}|\Xi_j]]$$

فرض‌ها می‌توانند ضعیف‌تر هم بشود، مثلاً می‌توان به جای شرط $Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]\equiv 0$ قراردهیم $E[Cov[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]]\equiv 0$. توجه کنید که در مدل لم ۱.۲.۱، متغیرهای تصادفی X_{jt} ناهمبسته نیستند، بلکه فرض می‌کنیم مستقل هستند.

۱-۳-۲. مثال (توزیع پواسن آمیخته)

فرض کنید X_{jt} تعداد ادعاهای سالانه یک بیمه مشخص اتوموبیل را نشان دهد. تعداد تصادفات راننده مربوط دارای توزیع پواسن با پارامتر Λ_j است که در آن Λ_j دارای یک توزیع ساختاری است. چنین متغیر تصادفی دارای توزیع پواسن آمیخته[1] است. در این حالت اولین مؤلفه در (۵) عبارت است از میانگین تعداد ادعاها، $m=E[X_{jt}]=E[\Lambda_j]$ از یک راننده دلخواه. مؤلفه دوم عبارت است از $\Xi_j=\Lambda_j-m$ و نشان دهنده تفاوت بین این راننده و راننده‌ای است که تعداد ادعاهای سالانه او برابر میانگین ادعاهاست. مؤلفه سوم برابر است با $\Xi_{jt}=X_{jt}-\Lambda_j$ که نوسان‌های سالانه حول میانگین تعداد ادعاها را تعیین می‌کند. در این حالت، مؤلفه‌های دوم و سوم، اگرچه ناهمبسته‌اند، مستقل نیستند زیرا برای مثال

$.Var[X_{jt}-\Lambda_j|\Lambda_j-m]=Var[X_{jt}|\Lambda_j]=\Lambda_j$

مدل (۴) حتی با تضعیف فرض‌های استقلال، در بعضی موارد برای کاربردهای عملی رضایت بخش نیست. فرض کنید X_{jt} در (۴) کل ادعاهای سالانه راننده مثال ۲.۲.۱ را نشان دهد که از توزیع پواسن پیروی می‌کند. بنابراین جدای از پارامتر پواسن، پارامترهای توزیع ادعاهای مجزا نیز وجود دارند. آن گاه واریانس شرطی قسمت نوفه، به شرط مؤلفه دوم (میانگین ادعاها در سال)، تابعی از مؤلفه دوم نیست. برای فایق آمدن بر این مشکل بولمن مدل‌های عمومی‌تری رامطالعه کرد، که در آن یک تغیر تصادفی ناپیدای Θ_j به عنوان پارامتر ساختار درگیر می‌شود؛ این قاعده دراغلب متنهای مربوط به تئوری باورمندی دنبال شده است. در اینجا حق بیمه مخاطره بجای $m+\Xi_j$، امید شرطی $\mu(\theta_j)=defE[X_{jt}|\theta_j]$ است. اگر $E[X_{jt}|\theta_j]$ یک به یک نباشد، قراردادهای با Ξ_j

---

1. Mixed Poisson Distribution

یکسان در مدل اساسی بالا ممکن است دارای الگوهای متفاوتی از تغییرات سالانه $Var[\Xi_{jt}|\theta_j$ در مدل بولمن باشند.

۲. مدل بولمن - استراب

۱.۲ مقدمه

در فصل قبل مدل متعادل بولمن را درنظر گرفتیم که در آن مشاهدات به مؤلفه‌های مستقل واریانس تجزیه می‌شدند و از این نظر متعادل بود که تعداد سال‌های مشاهدات برای همه قراردادها برابر T و واریانس همه مشاهدات یکسان است. در مدل بولمن - استراب قراردادها قابل تعویض نیستند. اولین تغییر آن است که به جای تعداد سال‌های مشاهدات T، مقادیر متفاوت T_j را برابر قراردادها درنظرمی‌گیریم. یک تغییر اساسی‌تر این است که واریانس‌های متفاوتی را به قراردادها نسبت می‌دهیم. این واریانس‌های متفاوت، که ممکن است در طول زمان هم تغییر کنند، به طور طبیعی از جایگزینی مخاطره‌های داخل قرارداد با متوسط مخاطره‌های یکسان به دست می‌آید؛ واریانس‌ها در این حالت نسبت معکوس با تعداد مخاطره‌ها دارند (وزن‌های طبیعی). اگر چنین اطلاعی در دست نباشد تقریب‌های تعداد کل ادعاها می‌توانند به عنوان جایگزین استفاده شود. ممکن است یک آکچوئر بخواهد یک سری از وزن‌ها را براساس نظر خود به بعضی از مشاهدات بدهد، مثلاً چون او کمی بیشتر از دیگران مطمئن است.

برای سهولت در نمادگذاری (بدون این که به کلیت مطلب خدشه‌ای وارد شود) فرض می‌کنیم هر T_j با مقدار ثابت T برابر است. برای مدل بولمن - استراب، هر ادعای تجربی از قرارداد jام، در سال tام را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt} \qquad j = 1,...,J \;,\; t = 1,...,T \tag{۱۹}$$

مؤلفه‌های ناپیدای Ξ_j مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس a هستند. Ξ_{jt}ها مستقل با میانگین صفر هستند و واریانس‌های آنها متناسب با عکس وزن‌های ω_{jt} هستند، که با s^2/ω_{jt} نشان می‌دهیم، پارامترهای m، a و s^2 ساختار مخاطره را در پلونده مشخص می‌کنند و پارامترهای ساختار نامیده می‌شوند. مؤلفه‌های Ξ_j و Ξ_{jt} مستقل فرض می‌شوند. وزن ω_{jt} از X_{jt} دقت نسبی این متغیر تصادفی را منعکس می‌کند. اعداد ω_{jt} وزن‌های طبیعی نامیده می‌شوند، در واقع ω_{jt} یک میانگین از ω_{jt} متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع را نشان می‌دهد.

اگر تعریف کنیم:

$$Y_{jkt}=m+\Xi_j+\Xi_{jkt} \qquad k=1,...,\omega_{jt} \tag{۲۰}$$

که در آن Ξ_j تعریف شده در (۱۹) است و Ξ_{jtk} انحراف‌های مستقل و هم توزیع بامیانگین صفر و واریانس s^2 هستند. اگر بنویسیم:

$$X_{jt}=\frac{1}{\omega_{jt}}\sum_{k=1}^{\omega_{jt}} Y_{jkt} \tag{۲۱}$$

خواهیم داشت:

$$X_{jt}=m+\Xi_j+\Xi_{jt} \quad , \quad \Xi_{jt}=\sum_{k=1}^{\omega_{jt}} \Xi_{jkt} \tag{۲۲}$$

و از آنجا $Var[\Xi_{jt}]=s^2/\omega_{jt}$ بنابراین X_{jt} فرض‌های مدل (۱۹) را با وزن‌های ω_{jt} برآورده می‌سازد.

در ادامه این فصل برآوردگرهای باورمندی را برای مدل بولمن - استراب به دست می‌آوریم: برآوردگر خطی بهینه برای $X_{j,T+1}$ یا، آنچه نتیجه یکسانی دارد، برآوردگر خطی بهینهٔ حق بیمه مخاطره $m+\Xi_j=E[X_{j,T+1}|\Xi_j]$ همانند بخش ۱ برآوردگر همگن از جایگزینی m در برآوردگر ناهمگن با برآوردگر خطی نااریب با کمترین واریانس از آن به دست می‌آید. در مدل متعادل بولمن این برآوردگر $\overline{X}$ بود در حالی که اینجا ضرایب بهینه متفاوت هستند.

۲.۲ برآوردگرهای باورمندی

در نظریه باورمندی برآوردگرهای ناهمگن اغلب بیشتر از همگن مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا این برآوردگرها خواص مفیدی دارند که در فصل‌های بعد به آنها اشاره می‌کنیم. اما برآوردگرهای همگن برای کاربردهای عملی مناسب‌تر هستند، زیرا آنها دارای برآوردگرهای داخلی از پارامتر m هستند که باعث کاهش تعداد پارامترهای مجهول می‌شود. بنابراین هر دو را بررسی می‌کنیم.

ابتدا چند نمادگذاری را برای مجموع‌های وزنی معرفی می‌کنیم. مجموع روی هر زیرنویس را با جایگزینی آن زیرنویس با علامت «Σ» نشان می‌دهیم. یک میانگین وزنی با وزن‌های $\omega_{jt}/\omega_{j\Sigma}$ و $\omega_{j\Sigma}/\omega_{\Sigma\Sigma}$ را به ترتیب با جایگزینی t و j با w نشان می‌دهیم. اگر وزن‌ها، وزن‌های باورمندی z_j/z_Σ باشند یک z جایگزین t می‌شود. دقت کنید که این وزن‌ها برای همه قراردادها یکسان نیست. برای مثال می‌توان نوشت:

$$\omega_{j\Sigma}=\sum_{t=1}^{T}\omega_{jt} \quad ; \quad \omega_{\Sigma\Sigma}=\sum_{j=1}^{T}\omega_{j\Sigma} \; ;$$

$$z_{\Sigma}=\sum_{j=1}^{T} z_j \quad ; \quad X_{j\omega}=\sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_{jt}}{\omega_{j\Sigma}} X_{jt} \; ; \tag{۲۳}$$

$$X_{\omega\omega}=\sum_{j=1}^{J} \frac{\omega_{j\Sigma}}{\omega_{\Sigma\Sigma}} X_{j\omega} \; ; \; X_{z\omega}=\sum_{j=1}^{J} \frac{z_j}{z_{\Sigma}} X_{j\omega}$$

در ادامه کوواریانس‌های مربوط به حق بیمه‌های مخاطره، مشاهدات و میانگین‌های وزنی که در (۲۳) آمده‌اند را می‌آوریم.

۲-۲-۱. لم

اگر درنظر بگیریم که ادعاهای X_{jt} را می‌توان به صورت زیر تفکیک کرد:

$$X_{jt}=m+\Xi_j+\Xi_{jt} \tag{۲۴}$$

که در آن Ξ_jها مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس α هستند. علاوه بر این Ξ_{jt}ها مستقل با میانگین صفر و واریانس Ξ_{jt} باشند؛ همچنین مؤلفه‌های Ξ_j و Ξ_{jt} مستقل باشند، آن‌گاه رابطه‌های کوواریانس زیر به دست خواهد آمد:

$$Cov=[\Xi_j, X_{it}]=\delta_{ji} a \quad ; \quad \delta_{ij}=\begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases} \; ;$$

$$Cov[X_{jt}, X_{iu}]=\delta_{ij}(a+\delta_{ut} s^2/\omega_{jt}) \quad ;$$

$$Cov[X_{jt}, X_{j\omega}]=Var[X_{j\omega}]=a+s^2/\omega_{j\Sigma}=a/z_j \quad ; \tag{۲۵}$$

$$Cov[X_{j\omega}, X_{z\omega}]=Var[X_{z\omega}]=a/z_{\Sigma} \quad ;$$

$$Cov[X_{j\omega}, X_{\omega\omega}]=s^2/\omega_{\Sigma\Sigma}+a\omega_{j\Sigma}/\omega_{\Sigma\Sigma} \quad ;$$

$$Var[X_{\omega\omega}]=s^2/\omega_{\Sigma\Sigma}+a\sum_{j=1}^{J} \{\omega_{j\Sigma}/\omega_{\Sigma\Sigma}\}^2 .$$

با استفاده از این روابط می‌توانیم برآوردگر باورمندی ناهمگن را با نمادی سازگار با نمادهای ۱.۱.۱ به دست آوریم.

۲-۲-۲. قضیه (برآوردگر بولمن - استراب ناهمگن)

مشاهدات X_{jt} را با شرایط مدل بولمن - استراب درنظر بگیرید. برای یک قرارداد ثابت j، برآوردگر باورمندی ناهمگن برای حق بیمه مخاطرهٔ $m+\Xi_j$ برابر است با:

$$(m+\Xi_j)^{*}=z_j X_{j\omega}+(1-z_j)m \tag{۲۶}$$

در اینجا $X_{j\omega}$، (۲۳) را ببینید، برآوردگر مجزای $m+\Xi_j$ است. عامل باورمندی z_j برای
قــــرارداد
j ام نیز عبارت است از:

$$z_j=\frac{a\omega_{j\Sigma}}{a\omega_{j\Sigma}+s^{۲}} \qquad (۲۷)$$

با پارامترهای ساختاری $m=E[X_{jt}]$, $a=Var[\Xi_j]$ و $s^{۲}=\omega_{jt}Var[\Xi_{jt}]$

۲-۲-۳. نکته (شرایط بهینه بودن $(m+\Xi_j)^*$)

شرط لازم و کافی برای بهینه بودن برآوردگر باورمندی ناهمگن $(m+\Xi_j)^*$ همراه با شرط برای $i\neq j$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۱): E[m+\Xi_j]=E[(m+\Xi_j)^*]$$
$$(۲): Cov[m+\Xi_j,X_{it}]=Cov[(m+\Xi_j)^*,X_{it}] \qquad (۲۸)$$

۲-۲-۴. قضیه (برآوردگر باورمندی همگن)

با استفاده از نمادگذاری (۲۳)، حل مسئله

$$\min_{h_{it}} E[\{m+\Xi_j-\sum_i\sum_t h_{it}X_{it}\}] \qquad (۲۹)$$

به طوری که

$$E[m+\Xi_j]=\sum_i\sum_t h_{it}E[X_{it}] \qquad (۳۰)$$

عبارت است از

$$(m+\Xi_j)^{*H}=z_jX_{j\omega}+(۱-z_j)X_{z\omega} \qquad (۳۱)$$

۲-۲-۵. نکته (برآوردگرهای همگن و ناهمگن)

برآوردگر باورمندی همگن $m+\Xi_j$ از $\sum_i\sum_t h_{it}X_{it}=z_jX_{j\omega}+(۱-z_j)X_{z\omega}$ در عین حال بـــهترین بـــرآوردگـــر نـــااریب خـــطی از بـــرآوردگـــر بـــاورمندی نـــاهمگن $z_jX_{j\omega}+(۱-z_j)m$ $(m+\Xi_j)^*$ نیز هست. براساس نمادگذاری این نوشتار می‌توان این مطلب را به صورت $(m+\Xi_j)^{*H}=((m+\Xi_j)^*)^{*H}$ نوشت. برای اثبات، توجه کنید که

$$Var[m+\Xi_j-\sum_i\sum_t h_{it}X_{it}]=$$
$$Var[m+\Xi_j-(m+\Xi_j)^*+(m+\Xi_j)^*-\sum_i\sum_t h_{it}X_{it}]= \qquad (۳۲)$$
$$Var[m+\Xi_j-(m+\Xi_j)^*]+Var[(m+\Xi_j)^*-\sum_i\sum_t h_{it}X_{it}],$$

کــه در آن قســمت کــوواریــانس بــه عــلت شــرایــط (۲۸) و ایــن حــقیقت کــه $(m+\Xi_j)^* = g + \sum_i \sum_t g_{it} X_{it}$ یک ترکیب خطی از X_{it}ها است حذف می‌شود. همان طور که حل h_{it}، با محدودیت $h_{\Sigma\Sigma} = ۱$، سمت چپ (۳۲) راکمینه می‌کند، به وضوح، با توجه به (۲۸)، قسمت دوم سمت راست را نیز کمینه می‌کند و اثبات کامل می‌شود.

۲-۲-۶. قضیه (میانگین مربعات خطاها)

میانگین مربعات خطای برآوریاب‌های باورمندی ناهمگن و همگن برابرند با:

$$MSE_j = E[\{m+\Xi_j - (m+\Xi_j)^*\}^۲] = a(۱-z_j) \qquad (۳۳)$$

$$MSE_j^H = E[\{m+\Xi_j - (m+\Xi_j)^{*H}\}^۲] = a(۱-z_j)(۱+\frac{۱-z_j}{z_\Sigma})$$

اگر MSE_j و MSE_j^H را مقایسه کنیم، خواهیم دید که وقتی ناگزیر از برآورد m هستیم، میانگین‌مربعات‌خطابه‌اندازه $۱۰۰(۱-z_j)/z_\Sigma\%$ افزایش می‌یابد. این‌افزایش‌بازیادشدن‌تعداد قراردادها (از طریق z_Σ) و یا بزرگ شدن دوره زمانی T (از طریق $۱-z_j$ ،z_Σ) کمتر خواهد شــد؛ زیــرا در ایــن صــورت m دقــیق‌تر بـرآورد مـی‌شود، هـمچنین اگـر z_j بـه یک نزدیک‌تر باشد، وزن کمتری به مؤلفه $X_{z\omega}$ برای برآورد M تعلق می‌گیرد.

۲-۲-۷. نکته (بهترین برآوردگر خطی نااریب m)

در مدل کلاسیک (۲۴) با $a = ۰$، یعنی بدون مؤلفه Ξ_j، بهترین برآوردگر خطی نا اریب برای، متغیر تصادفی $X_{\omega\omega}$ است. تحت فرض‌های مدل بولمن - استراب، لم ۱.۲.۲، $X_{z\omega}$، جواب بهینه برای مسئله زیر است:

$$\min_{f_{jt}: f_{\Sigma\Sigma} = ۱} Var\,[\sum_j \sum_t f_{it} X_{jt}]. \qquad (۳۴)$$

با استفاده از (۲۴) واریانس موردنظر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} Var\,[\sum_j \sum_t f_{it} X_{it}] &= Var\,[\sum_j \sum_t f_{it} (m + \Xi_j + \Xi_{jt})] \\ &= Var\,[m f_{\Sigma\Sigma} + \sum_j f_{j\Sigma} \Xi_j + \sum_j \sum_t f_{it} \Xi_{jt}] \qquad (۳۵) \\ &= \sum_j f_{j\Sigma}^۲ [a + \sum_t \frac{f_{jt}^۲}{f_{j\Sigma}^۲} \cdot \frac{s^۲}{\omega_{jt}}]. \end{aligned}$$

برای یک j ثابت، نسبت‌های $f_{jt}/f_{j\Sigma}$ که مقدار داخل قلاب را کمینه می‌کنند باید شرط $f_{jt}/f_{j\Sigma} = \omega_{jt}/\omega_{j\Sigma}$ را برآورده کنند. اما این بدان معناست که مسئله کمینه کردن (۳۴) به

مسئله زیر تقلیل یابد:

$$\min_{f_{j\Sigma}:f_{\Sigma\Sigma}} Var\,[\sum_j f_{j\Sigma} X_{j\omega}]. \qquad (۳۶)$$

باز هم مقادیر بهینه $f_{j\Sigma}$ باید شرط $f_{j\Sigma}=\dfrac{z_j}{z_\Sigma}$ را برآورده کنند. بنابراین برآوردگر موردنظر در (۳۴)، یا معادل آن در (۳۶)، عبارت است از

$$\sum_j f_{j\Sigma} X_{j\omega}=\sum_j \frac{z_j}{z_\Sigma} X_{j\omega}=X_{z\omega}=m^{*H}$$

۲-۲-۸. نکته (خاصیت خطی)

تاکنون برآوردگرهای $(m+\Xi_j)$ را به عنوان یک پارامتر به دست می‌آوریم. اما می‌توان آنها را به صورت مجموع برآوردگرهای باورمندی جداگانه مؤلفه‌های m, Ξ_j بنویسیم.

برآوردگر ناهمگن میانگین کل m به وضوح خود m است؛ برآوردگر Ξ_j^* از Ξ_j، در مقایسه نتیجه نکته ۳.۲.۲، منحصراً به وسیله دو معادله زیر تعیین می‌شود:

$$E[\Xi_j]=E[\Xi_j^*];$$
$$Cov[\Xi_j, X_{it}]=Cov\,[\Xi_j^*, X_{it}]\,,\ \forall i,t \qquad (۳۷)$$

این دستگاه معادلات، معادل است با

$$E[m+\Xi_j]=E[m+\Xi_j^*];$$
$$Cov\,[m+\Xi_j, X_{it}]=Cov\,[m+\Xi_j^*, X_{it}]\ ,\ \forall i,t \qquad (۳۸)$$

بنابراین، با استفاده از نکته ۳.۲.۲،

$$(m+\Xi_j)^*=m+\Xi_j^* \qquad (۳۹)$$

این خاصیت برای برآوردگرهای همگن وقتی که m به وسیله بهترین برآوردگر خطی نا اریب خود $m^{*H}=X_{z\omega}$ برآورد می‌شود نیز برقرار است. می‌توان نشان داد که

$$\Xi_j^{*H}=z_j(X_{j\omega}-X_{z\omega}). \qquad (۴۰)$$

بنابراین با اضافه کردن $m^{*H}=X_{z\omega}$ به (۴۰) خواهیم داشت:

$$m^{*H}+\Xi_j^{*H}=z_j X_{j\omega}+(۱-z_j)X_{z\omega}=(m+\Xi_j)^{*H}. \qquad (۴۱)$$

خاصیت خطی را در حالت کلی در فصل بعد بررسی می‌کنیم.

۲-۳. برآورد پارامترها

برآوردگرهای باورمندی بخش قبل به پارامترهای ساختاری m , a و $s^۲$ که عموماً نامعلوم

هستند بستگی دارد. برای آنکه بتوانیم این برآوردها را در عمل به کار ببریم، ناگزیر از برآورد این پارامترها هستیم. در قضیه زیر چند برآوردگر نااریب را ارائه می‌کنیم. می‌توانیم پارامترهای نامعلوم را در برآوردگرهای باورمندی به وسیله این برآوردها جایگزین کنیم با این امید که کیفیت برآوردگرهای به دست آمده هنوز خوب است.

برآوردگرهای a, s^2 براساس مجموع وزنی مربعات داخل گروهی

$$SSW=\sum_j\sum_t W_{jt}(X_{jt}-X_{j\omega})^2, \qquad (۴۲)$$

و مجموع وزنی مربعات بین گروهی

$$SSB=\sum_j W_{j\Sigma}(X_{j\omega}-X_{\omega\omega})^2. \qquad (۴۳)$$

هستند. توجه کنید که اگر همه وزن‌های W_{jt} مساوی یک درنظر گرفته شوند، این عبارت‌ها به عبارت‌های بخش ۲.۱ تبدیل خواهند شد.

۲ـ۳ـ۱. قضیه (برآوردگرهای نااریب)

برآوردگر های

$$m^\bullet=X_{\omega\omega},$$
$$S^{2\bullet}=\frac{1}{J(T-1)}\sum_j\sum_t \omega_{jt}(X_{jt}-X_{j\omega})^2,$$
$$a^\bullet=\frac{\omega_{\Sigma\Sigma}[\sum_j \omega_{j\Sigma}(X_{j\omega}-X_{\omega\omega})^2-(J-1)s^{2\bullet}]}{\omega_{\Sigma\Sigma}^2-\sum_j \omega_{j\Sigma}^2} \qquad (۴۴)$$

برآوردگرهای نااریب برای پارامترهای متناظر خود در مدل بولمن - استراب هستند. یعنی

$$E[m^\bullet]=m, E[s^{2\bullet}]=s^2, E[a^\bullet]=a. \qquad (۴۵)$$

۲ـ۳ـ۳. نکته (بسط مدل به دوره‌های در معرض بودگی نامساوی)

در مدل بولمن استراب فرض کردیم که تعداد دوره‌های در معرض بودگی مخاطرات T برای هر قرارداد j مساوی است. برای تطبیق با شرایط موجود که در آن تعداد متفاوت دوره‌های $T_j>0$ برای هر قرارداد ممکن است موجود باشد، مشاهدات X_jt با $t=1,...,T_j$ می‌توان مشاهدات با وزن‌های صفر را به قراردادهایی که T_j آنها کوچک‌تر از بزرگ‌ترین T_j است اضافه کرد تا دوره‌ها با هم برابر شوند یا نمادگذاری‌ها را به

صورت زیر اصلاح کرد:

$$X_{j\omega}=\sum_{t=1}^{T_j}\frac{\omega_{jt}}{\omega_{j\Sigma}}X_{jt}\ ;\ \omega_{j\Sigma}=\sum_{t=1}^{T_j}\omega_{jt} \tag{۴۶}$$

بنابراین برآوردگرهای m , a و s^2 باید به صورت زیر تغییر کنند:

$$s^{2\bullet}=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T_j}\omega_{jt}(X_{jt}-X_{j\omega})^2 \Big/ \sum_{j=1}^{J}(T_j-1). \tag{۴۷}$$

۲-۳-۳. کاربرد در بیمه اتوموبیل

در این قسمت، نتایج این بخش به وسیله یک کاربرد عددی با داده‌های بیمه اتوموبیل، تبیین می‌شود. برای این کار یک پلونده با نه گروه از اتوموبیل‌ها که برای یک دوره ده ساله مشاهده شده‌اند را درنظر می‌گیریم. مخاطره مرتبط با گروه j ام ($j=1,...,9$) در سال t ام ، ... ، ۱۰ ، به وسیله یک متغیر تصادفی X_{jt} مشخص شده است که میانگین حاصل برای ω_{jt} اتوموبیل است. فرض کرده‌ایم که مخاطره‌های X_{jt} با وزن‌های (طبیعی) ω_{jt}، فرض‌های مدل بولمن - استراب را برآورده می‌سازد.

جدول ۱.۲ شامل یافته‌های x_{jt} از X_{jt} و تعداد اتوموبیل‌ها ω_{jt} در داخل قلاب است. کل در معرض بودگی در پلونده ۱۵۱۰ است. تجربه‌ها در گروه‌های ۳، ۶ و ۹ محدود هستند. از (۴۴) برآوردهای زیر برای m , a و s^2 به دست می‌آید:

$$m^\bullet=۴۳۹/۸۳\ \ ;\ s^{2\bullet}=(۸۳۳/۷۳)^2\ \ ;\ a^\bullet=(۱۶۱/۸۵)^2 \tag{۴۸}$$

عامل‌های باورمندی $z_j^\bullet$ براساس این برآوردها در سطر دوم جدول ۲.۲ آمده است. در سطر سوم، متوسط اندازه ادعاهای X_{jt} برای هر گروه از اتوموبیل‌ها آمده است. با استفاده از این معلومات می‌توانیم حق بیمه باورمندی را در هر گروه برای سال آینده برآورد کنیم.

جدول ۱.۲ میانگین ادعاهای ۹ گروه از اتوموبیل‌ها در ۱۰ سال

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
گروه ۱	۵۴۰ (۴۴)	۵۱۴ (۵۰)	۵۷۶ (۵۶)	۴۸۳ (۵۸)	۴۸۱ (۵۸)	۴۹۳ (۵۶)	۴۳۸ (۵۴)	۵۸۸ (۵۲)	۵۴۱ (۵۲)	۴۴۱ (۴۶)
گروه ۲	۹۹ (۲۰)	۱۰۳ (۲۰)	۱۶۳ (۲۴)	۱۲۶ (۳۲)	۰ (۲۸)	۲۱۹ (۲۸)	۳۷۰ (۲۸)	۲۷۳ (۲۲)	۱۵۵ (۲۶)	۲۷۵ (۲۲)
گروه ۳	۰ (۸)	۴۰۰ (۶)	۱۰۴۲ (۱۰)	۳۱۳ (۶)	۰ (۰۸	۸۳۳ (۴)	۰ (۶)	۰ (۰۴	۰ (۴)	۰ (۴)
گروه ۴	۲۷۵ (۲۲)	۲۷۸ (۲۲)	۴۳۰ (۱۸)	۱۹۶ (۲۰)	۶۶۷ (۱۲)	۱۸۵ (۱۰)	۵۱۷ (۱۲)	۲۰۴ (۱۰)	۳۲۳ (۶)	۹۶۸ (۰۶)
گروه ۵	۵۴۳ (۲۶)	۹۸۴ (۲۴)	۷۲۷ (۲۲)	۵۶۲ (۱۸)	۷۲۲ (۲۰)	۶۱۰ (۱۶)	۷۹۴ (۱۲)	۲۹۹ (۱۴)	۵۸۰ (۱۴)	۴۸۸ (۸)
گروه ۶	۰ (۶)	۰ (۸)	۰ (۶)	۶۴۵ (۶)	۸۳۳ (۲)	۰ (۴)	۰ (۲)	۷۶۹ (۲)	۰ (۲)	۰ (۲)
گروه ۷	۳۳۳ (۱۸)	۴۰۴ (۲۰)	۴۰۰ (۲۰)	۳۶۱ (۱۶)	۵۸۸ (۱۸)	۳۴۹ (۱۸)	۴۳۵ (۱۴)	۴۷۶ (۱۲)	۶۳۵ (۱۲)	۵۵۶ (۱۰)
گروه ۸	۴۹۴ (۱۶)	۱۳۳ (۱۶)	۷۳۵ (۱۴)	۵۱۹ (۱۶)	۱۰۰۰ (۱۴)	۶۴۱ (۱۶)	۳۳۹ (۱۲)	۵۱۳ (۸)	۲۲۷ (۸)	۲۴۴ (۸)
گروه ۹	۱۶۶۷ (۶)	۳۱۳ (۶)	۵۵۶ (۴)	۷۶۹ (۲)	۱۸۱۸ (۴)	۰ (۲)	۱۴۲۹ (۴)	۰ (۲)	۰ (۴)	۰ (۲)

جدول ۲.۲ فاکتورهای باورمندی برآوردشده و حق بیمه‌ها

گروه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$z_j^{\bullet}$	۰/۵	۰/۹۰	۰/۶۹	۰/۸۴	۰/۸۷	۰/۶۰	۰/۸۶	۰/۸۳	۰/۵۸
$X_{j\omega}^{\bullet}$	۵۰۹	۱۷۸	۳۰۱	۳۶۰	۶۵۴	۱۷۸	۴۴۱	۵۰۶	۷۹۵
$P_j^{\bullet}$	۵۰۶	۲۰۴	۳۴۴	۳۷۳	۶۲۶	۲۸۳	۴۴۱	۴۹۵	۶۴۶
$(MSE_j^{\bullet})^{1/2}$	۳۶	۵۱	۹۰	۶۵	۵۸	۱۰۲	۶۱	۶۷	۱۰۵

منابع

1. BERNARDO, J.M. and SMITH, ADRIAN F.M. (1994), Bayesian theory, Wiley, England.
2. DANNENBURG, D.R.(1996a), Basic actuarial credibility models - Evaluations and extensions; Ph.D. Thesis/Tinbergen Institute, Amesterdam.
3. DANNENBURG, D. R., R. KAAS and M.J. GOOVAERTS (1996b), Practical actuarial credibility models, iAE, Amesterdam.
4. HACHEMEISTER C.A., Credibility for regression models with application to trend; in "Credibility, Theory and application", Proceeding of the Berekely Actuarial Research Conference on Credibility; Academic Press, New York, 129-169.
5. MOOD A.M., F.A. GRAYBILL, and D.C. BOES (1974), Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, USA.

منابع

1. BERNARDO, J.M. and SMITH, A.F.M. (1994). Bayesian theory, Wiley, England.
2. DANNENBURG, D.R. (1996). Basic actuarial credibility models — Evaluations and extensions, Ph.D. Thesis, Tinbergen Institute, Amsterdam.
3. DANNENBURG, D.R., KAAS, R. and GOOVAERTS, M. (1996). Practical actuarial credibility models, IAE, Amsterdam.
4. HACHEMEISTER, C.A., Credibility for regression models with application to trend. In 'Credibility: Theory and application', Proceedings of the Berkeley Actuarial Research Conference on Credibility, Academic Press, New York, 129-169.
5. MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A. and BOES, D.C. (1974). Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, USA.