فصلنامه صنعت بیمه / سال پانزدهم / شماره ۵۷ / بهار ۱۳۷۹ / صفحات ۱۹ تا ۲۴

نظریهٔ ریسک و فرایندهای بیمه[۱]

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل[۲]

چکیده

محاسبهٔ حق‌بیمه از مهم‌ترین مسائل نظریهٔ ریسک است که این امر خود به شدت متأثر از مدلی است که برای توصیف وضعیتی در یک حوزهٔ بیمه به‌کار گرفته می‌شود. از سوی دیگر برای وضع هر مدل، مجموعه‌ای از مفروضات واقعی و برخی محدودیت‌ها برای در مهار داشتن وضع از لحاظ ریاضی اعمال می‌شود. با توجه به این که هر مدل در بهترین حالت تنها تقریبی از وضعیت واقعی است، افراط در اعمال محدودیت‌ها برای آن‌که وضع از نظر ریاضی ساده‌تر شود، ممکن است کاربر را به نتایجی دور از واقع برساند که این امر به ویژه در آمار بیمه می‌تواند وخامت‌بار باشد. در این مقاله ضمن بررسی اجمالی فرایند ریسک، برخی از فرض‌ها و محدودیت‌هایی که در این فرایند درنظر گرفته می‌شود، به صورت گذرا مورد بازبینی قرار می‌گیرد و ضمن این کار به بعضی از مباحث نظریهٔ احتمال که در پرداختن به این مدل نقش مؤثری دارند نیز اشاره می‌شود.

واژگان کلیدی

نظریهٔ ریسک، ذخایر آزاد، ورشکستگی، ادعای خسارت، احتمال مرگ یا بازمانی، فرآیند پوآسن، فرآیندنقطه‌ای.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

هارالت کرامر حدود هفتاد سال پیش نظر خود را دربارهٔ نظریهٔ ریسک چنین عرضه کرد: «هدف از نظریهٔ ریسک ارائه تحلیلی ریاضی از نوسانات تصادفی در یک بنگاه بیمه و بحث دربارهٔ راه‌های مختلف حفاظت در برابر تأثیرات نامطلوب آن‌هاست». یکی از این تأثیرات، تخلیهٔ «ذخایر آزاد» است و از آن‌جا که فرمول‌بندی ریاضی آن با برخی مسائل

---

۱. این مقاله در نخستین سمینار آمار بیمه (اکچواری ـ دانشگاه شهید بهشتی ـ سال ۱۳۷۸) ارائه گردید.

۲. عضو هیأت علمی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

قدیمی‌تر نظریهٔ احتمال مشابهت فراوان داشت، به ورشکستگی شرکت موسوم شد. تعریف جدیدتری از نظریهٔ ریسک به صورت تلویحی در مقدمهٔ کتاب Beard و همکاران آمده است که توصیف مناسبی از برخی از اصطلاحات فنی بیمه را نیز عرضه می‌دارد: «... تحلیل زیر ... به مطالعهٔ ادعاهای خسارت و آن بخش از حق‌بیمه‌ها محدود شده است که پس از کسر سربارهای مربوط به هزینه‌های اداری به جای می‌ماند. یعنی، حق‌بیمه‌های (خالص) ریسک به علاوهٔ سربار ایمنی». از دیدگاه گربر، حتی آن‌چه مؤلفان قدیمی آن را با عنوان نظریهٔ ریسک توصیف کرده‌اند و امروزه نظریهٔ ورشکستگی نامیده می‌شود تنها بخشی از نظریهٔ ریسک است که موضوعاتی از قبیل محاسبهٔ حق‌بیمه، نرخ‌گذاری تجربی و بیمهٔ اتکایی را دربر می‌گیرد.

نخستین تلاش‌ها برای صورت ریاضی دادن به ریسکی که یک شرکت بیمه اداره می‌کند، مربوط به Tetens است و نزدیک به یک قرن کلیهٔ مقالات فنی دربارهٔ این نظریه به آلمانی نوشته می‌شد. شاید چنین قدمتی برای نظریهٔ ریسک، حتی به صورت مقدماتی، شگفت‌آور به‌نظر برسد، اما نباید فراموش کرد که تأثیر بیمه به طور عام در نظریهٔ احتمال به حدی است که میستروف شاید به صورت مبالغه‌آمیزی، بسط نظریهٔ احتمال را، نه چنان که معمول است، برگرفته از بازی‌های شانسی یا قمار، بلکه رونق بازرگانی در عصر رنسانس و به دنبال آن رشد صنعت بیمه در اروپا دانسته است.

با این حال نباید فراموش کرد که ریاضیات آمار بیمه‌ای کلاسیک عمدتاً بر رهیافت‌های تعینی استوار بود و نکات عمدهٔ آن عموماً حول مسائلی از قبیل جدول‌های کاستی دور می‌زد که معرف برآمدهای متوسطی نظیر احتمال مرگ یا بازمانی[1] بودند. بازگشت سرمایه‌گذاری از طریق نرخ بهرهٔ ثابت واحدی نمایش داده می‌شد. با وجود این، عدم قطعیت از مشخصه‌های بنیادی صنعت بیمه است، زیرا تعداد و حدّت ادعاهای خسارت (پرداخت‌های ناشی از تصادفات یا دیگر حوادث بیمه شده) اغلب به‌طور تصادفی تغییر می‌کنند. رفتارهای سرمایه‌گذاری و تأثیر تورم نیز متغیرند. نیاز به پشتیبانی فنون تعینی کلاسیک براساس اصول تحلیلی که متغیر بودن عامل‌های پیش‌گفته را ارج گذارد، حدود یک سدهٔ پیش تشخیص داده شد که به پیدایش نظریهٔ ریسک منجر

---

1. survival

شد.

در وجهی کلی، ایدهٔ زمینه‌ای این پژوهش‌های اولیه، محاسبهٔ واریانس یک قرارداد بیمهٔ زندگی ــ و با فرض این که هر قرارداد در یک پرتفوی مستقل از یکدیگر بودند ــ یافتن مجموع این واریانس‌ها و استفاده از قضیهٔ حد مرکزی برای تعیین احتمال‌های زیان‌های انباشتهٔ گوناگون (یعنی ادعاهای خسارت مبنای حق‌بیمه‌های خالص) در دوره‌ای کوتاه‌مدت یا درازمدت بود. یک مقالهٔ مروری کلاسیک از وضعیت نظریهٔ ریسک در ابتدای قرن حاضر، مقالهٔ بوهلمان است.

رهیافتی کاملاً نو در نظریهٔ ریسک و در همین حال، زایش فرایندهای تصادفی ناپیوسته، به‌ویژه فرایند پواسون، نتیجهٔ کارهای بیمه آماردان برجستهٔ سوئدی، فیلیپ لوندبرگ است. درحالی که نظریهٔ قراردادهای «انفرادی» اساساً در مورد بیمه‌های زندگی کاربرد داشت و نظریهٔ «جمعی» جدید با در ذهن داشتن بیمه‌نامه‌های زندگی و مستمری مطرح شده بود، ذخایر هنگفتی که چنین شرکت‌هایی برای پاسخ‌گویی به عنصر «پس‌اندازها» در این بیمه‌نامه‌ها نگهداری می‌کردند با نیاز فوری به یک نظریهٔ ریاضی ریسک در تضاد بود. به عکس در بیمه‌های آتش‌سوزی، حوادث و دیگر شاخه‌های بیمهٔ غیرزندگی که در آن عنصر پس‌انداز در حق‌بیمه حضور ندارد، نظریهٔ ریسک نقش اساسی دارد و باید هم داشته باشد. نظریهٔ ریسک لوندبرگ بر فرض‌هایی مبتنی است که برای چنین شرکت‌های بیمهٔ غیرزندگی مناسب به نظر می‌رسد.

به‌صورت اجمالی، یک پورتفوی، برای مثال بیمه‌نامه‌های آتش‌سوزی را می‌توان در معرض دو مجموعه از تغییرات تصادفی قرار داد:

۱. فرایندتصادفی (نقطه‌ای) لحظات‌زمانی‌که ادعاهای خسارت در آن رخ می‌دهند؛ و

۲. مبلغ ادعای خسارت ــ که فرض می‌شود بی‌درنگ پرداخت می‌شود ــ که بر اثر آتش‌سوزی ایجاد شده است.

فرایندهای نقطه‌ای و خواص ریاضی آن‌ها مبحثی مهم و دائماً رو به گسترش را در نظریهٔ احتمال تشکیل می‌دهند، اما نظریهٔ ریسک عمدتاً خود را به فرایندهای نقطه‌ای مانا[1] محدود کرده است که می‌توان به اختصار آن‌ها را چنین توصیف کرد که در آن‌ها

---

1. stationary

$p_n(t)$، احتمال این که n پیشامد (ادعای خسارت) که در بازهٔ زمانی به طول t رخ دهند، به نقطهٔ آغازین این بازه بستگی ندارد. ساده‌ترین فرایند نقطه‌ای مانا، فرایند پواسون است که در آن بازه‌های بین پیشامدهای متوالی، متغیرهای تصادفی مستقلی با توزیع نمایی‌اند. در مقاله‌های متعددی تلاش شده است که فرایند پواسون به یک «فرایند تجدید» توسیع یابد اما به ندرت در مسائل واقعی از این مدل استفاده شده است. در تعدادی از مقاله‌ها که با کاربردها سروکار داشته‌اند، نشان داده شده است که

الف) فرایند پواسون تنها مطابقتی کلی با فرایند ادعاهای خسارت واقعی دارد؛

ب) طول بازه‌های متوالی ادعاهای خسارت مستقل نیستند؛

پ) برای توزیع بازه‌های ادعای خسارت واقعی می‌توان همواره به صورت موفقیت‌آمیزی عضوی از خانواده فرایندهای پواسون آمیخته را برازش داد.

فرایندهای پواسون آمیخته را دوبوردیو معرفی کرد. یکی از خاصیت‌ها و صفت مشخصهٔ فرایندهای پواسون آمیخته این است که اگر n ادعای خسارت در بازه‌ای به طول t رخ دهند، توزیع آن‌ها مستقل و همتوزیع با توزیع یکنواخت بر این بازه است.

یکی از اعضای نسبتاً آشنای خانوادهٔ پواسون آمیخته که تا حد موفقیت‌آمیزی به آمارهای ادعای خسارت غیرزندگی برازش داده شده است، عبارت است از توزیع دوجمله‌ای منفی

$$p_n(t) = \binom{n+h-1}{n} \left(\frac{h}{h+t}\right)^h \left(\frac{t}{h+t}\right)^n, \quad h>0, \; n=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

امادر خصوص توزیع مبالغ ادعای خسارت باید گفت که هر توزیعی که برای سهولت پیوسته درنظر گرفته می‌شود، بر بخش مثبت محور طول‌ها کفایت می‌کند. نمونه‌های عملی از این توزیع‌ها، توزیع پاره‌تو و توزیع لگ‌نرمال است.

بنابراین، درحالت کلی مجموع (تصادفی) مبالغ ادعای خسارت تا لحظهٔ t، فرایند ریسک یا فرایند ادعاهای خسارت تجمعی $\{S_t\}$ را تشکیل می‌دهد که همراه با فرایند حق‌بیمه $\{P_t\}$ تشکیل یک ریسک، یعنی از دیدگاه اصل موضوعی نظریهٔ ریسک، زوج مرتب (P_t, S_t) رامی‌دهند. از لحاظ تحلیل ریاضی موضوع آن‌چه اهمیت دارد تفاضل $P_t - S_t$ است. می‌توان با تمهیدی P_t را یک فرایند تعینی گرفت و عنصر تصادفی آن را (در

صورت وجود) به فرایند S_t منتقل کرد. در حالت کلی می‌توان فرایند ریسک را به صورت

$$S_t = \sum_{t_i \in A_t} Y_{t_i} \qquad (۲)$$

توصیف کرد که A_t همان فرایند تصادفی (نقطه‌ای) مذکور در (۱) و Y_{t_i} همان مبلغ ادعای خسارت مذکور در (۲) است. محاسبهٔ حق‌بیمه براساس اصول مختلف و انتظارات معین که علاوه بر خسارت‌های احتمالی، هزینه‌های سربار را بپوشاند، ذخیره‌ای معین ایجاد کند و مسائلی از این قبیل، به ساختار فرایند S_t بستگی دارد. در این مورد آن‌چه در بالا درخصوص نحوهٔ انتخاب فرایند لحظات زمانی وقوع خسارت‌ها بیان شد، حداقل قابل قبول است و انتخاب این فرایند به صورت‌های ساده (از نظر ریاضی) و مثلاً به صورت فرایند پواسون مرکب

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \qquad (۳)$$

که در آن N_t یک فرایند پواسون همگن با پارامتر λ و $\{Y_i\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و (مجموعاً) مستقل از $\{N_t\}$ باشند، می‌تواند کار را تسهیل کند، اما نباید انتظار داشت که حتی در وضعیت‌های بسیار ساده با واقعیت تطبیق کند. در واقع اگرپذیرش این مدل موجه باشد، می‌توان به اتکای میانگین‌گیری، مسألهٔ ورشکستگی را به‌طور کامل نفی کرد. زیرا کافی است در عبارت

$$C_t = u + ct - S_t \qquad (۴)$$

با استخراج میانگین، c را طوری تعیین کنیم که حاصل مثبت باشد. در این عبارت u سرمایهٔ اولیهٔ شرکت و c نرخ حق‌بیمه است. اگر $E[Y_i] = \mu$، کافی است که c را بزرگ‌تر از $\lambda\mu - \frac{u}{t}$ انتخاب کنیم و از ورشکستگی رها شویم اما آیا این فرض‌ها، واقعیت‌ها را مطابق میل ما تغییر می‌دهند؟

بنابراین، به جای احتراز از مباحث نظری احتمال، که البته ممکن است به مقدماتی طولانی ، حوصله و وقت زیادی نیاز داشته باشند مناسب است با تجهیز بیمه آماردانان به ابزارهای قوی نظریهٔ احتمال، آن‌ها را به کنترل هرگونه وضعیتی قادر سازیم. برای مثال، به کمک مبحث مارتینگل می‌توان انواع مسائل نظریهٔ ریسک و از جمله توقف بهینهٔ فرایند برای محاسبهٔ حق‌بیمهٔ مطلوب را به طرزی مناسب حل کرد. البته در سطح عالی‌تر

برای مرتبط کردن صنعت بیمه با بازارهای سرمایه از موضوعی روبه گسترش در نظریهٔ احتمال به نام آنالیز تصادفی بی‌نیاز نیستیم. در اهمیت و نیاز فرایندهای بیمه به چنین مباحثی تنها خاطرنشان کردن این نکته کافی است که علاوه بر مقالاتی که به‌طور مداوم در مجلات متعدد آمار و احتمال و ریاضی دربارهٔ مسائل بیمه به چاپ می‌رسند، حداقل ده نشریهٔ اختصاصی در این زمینه وجود دارد.

منابع

1. Beard, R.E. Pentikainen T. and Pesonen, E. (1984). Risk Theory. 3rd ed., Chapman & Hall , London.
2. Buhlman H. (1970), Mathematical Methods in Risk Theory, Springer - Verlag, New York.
3. Cramer, H. (1930), On the Mathematical Theory of Risk, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
4. Gerber H.U. (1994), Martingales and Tail Probabilities, ASTIN Bulletin 24 , 145-146.
5. Rolski, T. Schmidli, H. Schmidt. V. Teugels. J. (1999), Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley & Sons, Chichester.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی