journal for the History of Science

Print issn: 1735-0573 • Online issn: 2717-1965

University of Tehran

About the Works of Aḥmad ibn ʿUmar al-Karābīsī, A Mathematician of the 4th AH/ 10th AD

Narges Assarzadegn

Isfahan Mathematics House (IMH), Isfahan, Iran

E-mail: narges.assarzadegan@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-7614-6060)

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received 12 February 2025

Revised 16 April 2025

Accepted 25 April 2025

Published online 20 July 2025

Keywords:

Aḥmad ibn ʿUmar al-Karābīsī, Annulus, Critiques of the Postulates in Euclid's *Elements*, Euclid's Fifth Postulate (Parallel Postulate), *Kitāb al-Taqāsīm li-Uqlīdis* (Euclid's Book of Divisions), Mathematics of the Islamic Golden Age, Torus, Toroid.

ABSTRACT

Aḥmad ibn ʿUmar al-Karābīsī (4th AH/10th AD), an eminent mathematician, authored two extant treatises:

1. *Sharḥ Mushkil Ṣudūr Maqālāt Kitāb Uqlīdis* (Explanation of Problematic Propositions in Euclid's Elements) – A commentary on the postulates of Euclid's Elements (Books I.1–11, excluding I.8–9), synthesizing philosophical insights with analyses of Greek and Islamic scholars to enhance pedagogical clarity.
2. *Masāḥat al-Ḥalaq* (Measurement of Rings) – A geometric treatise establishing definitions and proofs for theorems on annular shapes and circular segments.

The *Sharḥ Mushkil Ṣudūr*, preserved in only two manuscripts, holds exceptional historical significance as evidence of al-Karābīsī's access to Arabic translations of Euclid's *Elements* and Greek commentaries. His work demonstrates methodological parallels with al-Nayrīzī's commentary and Gerard of Cremona's Latin translations, while uniquely engaging with Euclid's fifth postulate. Attributed but lost works include *Tafsīr Uqlīdis* (Commentary on Euclid), *Ḥisāb al-Dawr* (Calculation of Cycles), *Kitāb al-Waṣāyā* (Book of Directives), and *Kitāb al-Hindī* (Indian Treatise). This study offers a critical analysis of *Sharḥ Mushkil Ṣudūr*, presents a critical edition and translation of *Masāḥat al-Ḥalaq*, and provides annotations on key theorems, underscoring al-Karābīsī's contributions to the mathematical heritage of the Islamic Golden Age.

Cite this article: Assarzadegan, N. (2024). About the Works of Aḥmad ibn ʿUmar al-Karābīsī, A Mathematician of the 4th AH/ 10th AD, 22 (2), 133-181. DOI: http//doi.org/ 10.22059/JIHS.2025.390440.371817

تاریخ علم
شاپا الکترونیکی: ۱۹۶۵-۲۷۱۷ • شاپا چاپی: ۰۵۷۳-۱۷۳۵

در بارهٔ آثار احمدبن عمر کرابیسی، ریاضی‌دان سدهٔ چهارم هجری قمری

نرگس عصارزادگان

خانهٔ ریاضیات اصفهان، اصفهان، ایران

رایانامه: narges.assarzadegan@gmail.com (https://orcid.org/0000-0002-7614-6060)

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقالهٔ پژوهشی

تاریخ دریافت ۱۴۰۳/۱۱/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

کلیدواژه‌ها:
اصول اقلیدس، حلقه، ریاضیات دورهٔ اسلامی، شکوک مصادرات اصول اقلیدس، کتاب التقاسیم، کرابیسی، مصادرهٔ پنجم مقالهٔ اول اصول، مطوّق.

چکیده

از احمدبن عمر کرابیسی ریاضی‌دان ممتاز سدهٔ چهارم هجری دو رساله بر جای مانده است: شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و مساحت الحلق. رسالهٔ اول شرحی بر مصادرات اصول اقلیدس (مقالات ۱ تا ۱۱ به جز مقالات ۸ و ۹) با هدف تسهیل یادگیری متعلم و با دیدگاهی کمابیش فیلسوفانه و مبتنی بر نظرات دانشمندان یونانی و اسلامی و رسالهٔ دوم شامل تعاریف و قضایایی در بارهٔ شکل‌های هندسی مطوّق و حلقه‌هاست. رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس که تنها دو نسخه از آن باقی است از دیدگاه تاریخی اهمیت بسیاری دارد، چون سندی است که نشان می‌دهد کرابیسی به نسخهٔ عربی اصول و برخی شرح‌های یونانی آن دسترسی داشته است و اثر او شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با شرح اصول نیریزی و ترجمهٔ لاتینی شرح اصول توسط ژرار کرمونایی دارد. از طرفی، او در این اثر خود به اصل موضوع یا مصادرهٔ پنجم مقالهٔ اول اصول پرداخته است. رساله‌های دیگری نیز در منابع به کرابیسی منسوب است: تفسیر اقلیدس، حساب الدور، کتاب الوصایا، کتاب الهندی که هیچ‌کدام اکنون موجود نیستند. رساله‌های او از ارزشمندترین آثار دورهٔ اسلامی به شمار می‌آیند. در این نوشته در بارهٔ رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس توضیحاتی عرضه می‌شود و رسالهٔ مساحت الحلق تصحیح و ترجمه می‌شود و توضیحات کوتاهی در بارهٔ برخی قضایا عرضه می‌شود.

استناد: عصارزادگان، نرگس (۱۴۰۳). در بارهٔ آثار احمدبن عمر کرابیسی، ریاضی‌دان سدهٔ چهارم هجری قمری. تاریخ علم، ۲۲ (۲)، ۱۳۳-۱۸۱

DOI: http//doi.org/ 10.22059/JIHS.2025.390440.371817

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

مقدمه

از تولد و زندگی احمد بن عبدالله بن محمد بن سرمد ابن عمر[1] معروف به کرابیسی[2] نیشابوری حاسب (؟ – د. ۳٦۱ق یا ۳۷٦ق) ریاضی‌دان مسلمان سدهٔ چهارم هجری/دهم میلادی آگاهی چندانی نداریم (اسماعیل پاشا، ٦٥/۱؛ حاجی خلیفه، ۱۸/٦). برخی مورخین او را متعلق به نیمهٔ دوم سدهٔ سوم دانسته‌اند (قربانی، ۳۸۹؛ عمر کحاله، ۲۱۸/۲)، اما چون ابن ندیم (۳۲۰– ۳۸۰ق) او را در فهرست منجّمان و مهندسان تازه‌کار آورده (٤۷۹) و تاریخ اتمام الفهرست ۳۷۷ق بوده است، پس کرابیسی باید از دانشمندان نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم هجری باشد.

کرابیسی به عنوان برجسته‌ترین مهندسان و از دانشمندان علم اعداد و شارحان اصول اقلیدس بوده است (ابن ندیم، ٤۷۹، ٥۰٤؛ حاجی خلیفه،[3] ٥٥۲/۱). حاجی خلیفه او را کرابیسی الهندسی نامیده (۱۸/٦) و احسان اوغلو و روزنفلد[4] (۸۹) او را کرابیسی هندی و احتمالاً دارای اصل و نسب هندی دانسته‌اند [5]

از کرابیسی دو رسالهٔ عربی باقی است: شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و مساحت الحلق. مساحت الحلق در ۱۹۳۱ میلادی تصحیح و به آلمانی ترجمه و شرح شده و در ۱۹۳۳ بر آن شرح، تکمله‌ای نوشته شده است (نکـ: منابع مقاله). چند نسخهٔ خطی از مساحت الحلق بر جای مانده است (برای آگاهی از سایر نسخه‌ها نکـ: سزگین،[6] ۲۷۷؛ احسان اوغلو و روزنفلد، ۸۹؛ بروکلمان،[7] ٥۹٦/٤)، اما از رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس تنها دو نسخه (کتابخانهٔ بانکی‌پور،[8] شمارهٔ ۲٤۳۰؛ کتابخانهٔ ملی رشت،[9] شمارهٔ C۸۱) باقی

---

۱. در نسخهٔ مساحة الحلق ۲٤۳٤/۱٤ دانشگاه تهران (۱٤۰)، احمدبن عیسی الکرابیسی نامیده شده است

۲. کرابیس جمع کرباس است و کرابیسی یعنی کرباس ساز و کرباس فروش

۳. حاجی خلیفه اینجا نوشته است نسخه به خط مؤلف را دیده است.

4. Rosenfeld & Ihsanoğlu

٥. این به نظر درست نمی‌آید. منشأ این خطا می‌تواند خواندن کلمهٔ «هندی» به جای «هندسی» باشد.

6. Sezgin

7. Brockelmann

۸. نسخهٔ کتابخانهٔ خدابخش (بانکی‌پور) ٥۸ برگ دارد و به خط زیبای نستعلیق نوشته شده است. تاریخ نسخه معلوم نیست اما احتمالاً باید از سدهٔ نهم هجری باشد (فهرست کتابخانهٔ خدابخش، ۲۲/۲۲–۲۷).

۹. در قیاس با نسخهٔ بانکی‌پور، مقدمهٔ نسخهٔ رشت ناقص است و صفحات اول آن موجود نیست (نسخهٔ رشت، ٤–۱۲۳). نسخهٔ کتابخانهٔ رشت ۱۲۳ صفحه دارد .

است. نسخه‌ای از رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس از ابن هیثم (۳۵٤-٤۳۰ق) به رسالهٔ کرابیسی در کتابخانهٔ ملی رشت الحاق شده است[۱] (۱۲٦-۳۸۹). در منابع رساله‌های ناموجود تفسیر اقلیدس، حساب الدور، کتاب الوصایا، کتاب الهندی از کرابیسی یاد شده است (ابن ندیم، ۳۴۰، قفطی، ۷۹). در ادامه نخست محتوای رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس بررسی و سپس رسالهٔ مساحت الحلق ترجمه و تصحیح می‌شود و در صورت لزوم توضیحات مختصری در پانویس عرضه می‌شود .

رسالهٔ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس

مقالهٔ اول کتاب اصول اقلیدس شامل تعاریف، اصل‌های موضوع (اصول مسلم، مصادرات) [۲]، اصل‌های بدیهی (بدیهیات) [۳] و قضایایی[٤] است [٥] مثلاً «نقطه آن است که جزء ندارد» یک تعریف از مقالهٔ اول اصول است، «کل بزرگ‌تر از جزء است» یک اصل بدیهی است و اصل موضوع یا مصادرهٔ پنجم مقالهٔ اول که مورد مناقشهٔ ریاضی‌دانان یونانی و دورهٔ اسلامی بوده و رساله‌های متعددی در بارهٔ آن تألیف شده است[٦] چنین است:

> اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموع دو زاویهٔ درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بی‌نهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌بُرند [۷]

---

۱. این دو نسخه به یک دست خط کتابت شده‌اند. ابتدا و انتهای رسالهٔ ابن هیثم نیز هیچ نشانی از نویسنده و تاریخ دیده نمی‌شود. در انتهای رسالهٔ ابن هیثم نوشته شده است: «کاتب الحروف محمدعلی، سیوم ذی حجه، تمام شد.»

2. Postulates

3. Axioms

4. Theorems

٥. مقالات دوم تا یازدهم به جز مقالات هشتم و نهم شامل تعاریف و قضایاست. مقالات ۸ و ۹ و ۱۲ و ۱۳ فقط شامل قضایاست.

٦. مثلاً رسالهٔ شرح مصادرات کتاب اقلیدس و شرح معانیه، و حل شکوک المقالة الاولی از ابن هیثم، شرح ما أشکل من مصادرات اقلیدس عمرخیام، در حل مشکل مصادرهٔ خطوط موازی ابن سالار، الرسالة الشافیه عن الشک في الخطوط المتوازیة و تحریر اصول اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی، المطالب العالیة و جامع العلوم فخر رازی، اصلاح کتاب اصول عباس ابن سعید جوهری و في برهان المصادرة مشهورة من اقلیدس از ثابت بن قره

۷. کنکاش برای حل این اصل به کشف اصل توازی در هندسه‌های نااقلیدسی منجر شد.

کرابیسی در بارۀ تفاوت میان اصل‌های بدیهی که آنها را «اشیاء المتعارفة» و اصل‌های موضوع یا مصادرات که آنها را «اشیاء التي صادر علیها» نامیده است می‌گوید:

> مصادرات نزد خاصه شناخته شده‌اند و اشیای متعارفه نزد خاصه و عامه شناخته شده‌اند و قابل انکار نیستند و دانستن آن‌ها برای فهم کل اصول لازم است (نسخۀ رشت، ۲۸).

کرابیسی در رسالۀ شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس مقالاتی را شرح کرده که علاوه بر قضایا شامل تعاریف و اصول بدیهی و موضوعه[1] است. همان طور که حکیم عمر خیام (۴۳۹- ۵۲۶ق) در شرح ما أشکل من مصادرات اقلیدس گفته است اثبات مقدمات و مبادی کتاب اصول بر عهدۀ فلسفۀ اولی و علم کلی حکمت است (همایی، ۲۲۷)، کرابیسی در شرح مقالۀ اول اصول، مبادی فلسفی مربوط به تعاریف اولیه چون نقطه، بسیط و زاویه را از دیدگاه دانشمندان و فلاسفۀ یونانی از جمله سامیوس <کذا> [2] ارشمیدس، افلاطون و خرمیدس <کذا> [3] گفته (نسخۀ رشت، ٦، ۸ و ۱۰) و به مقایسۀ اعمال فیلسوفان و مهندسان[4] پرداخته است (نکـ: دنبالۀ مقاله). لذا این اثر کرابیسی مؤید ارتباط میان فلسفه و هندسه در سدۀ چهارم هجری است.[5]

در سرتاسر رساله، متن اصول با «قال اقلیدس» و شرح کرابیسی با «قال احمد» متمایز شده است [6] بر اساس شواهد متنی در مواضعی شرح با «أقول»، «فأقول»، «أفرض» و موارد مشابهی (نسخۀ رشت، ٦، ۲٤، ٤۹، ٦٦، ٦۸، ۷۰ و ..) آغاز شده است، لذا محتمل است که این رساله را شخص دیگری جز

---

۱. یعنی مقالاتی به جز ۸، ۹، ۱۲ و ۱۳.

۲. شاید آریستارخوس ساموسی (Aristarchus of Samos) (۳۱۰- ۲۳۰ ق.م) یا کانن ساموسی (Conon of Samos) (۲۸۰- ۲۲۰ ق.م) باشد. برنتیس که تنها نسخۀ کتابخانۀ خدابخش را در اختیار داشته آن را «؟انیوس» خوانده است (ص ۳۲).

۳. خارمیدس (Χαρμίδης) نام یکی از مکالمات افلاطون و نام برادرزادۀ اوست. ممکن است خرمیذس (قفطی، ۱۸)، جرمیدس یا خرومیدس باشد (نکـ: برنتیس، ۳۳، ۳٤)

٤. یعنی کسانی که به کار هندسه مشغول بودند.

۵. برای اطلاعات بیشتر نکـ: معصومی همدانی، حسین، «متکلم و ریاضی‌دان: فخر رازی و آثار هندسی ابن هیثم»، تاریخ علم، دورۀ ۱۱، شمارۀ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ۱۳۹-۱۵۷.

٦. نسخۀ کتابخانۀ بانکی‌پور (خدابخش) با این جمله شروع شده است: «رب أعن قال احمد بن عمر کرابیسی» و به «تم کتاب احمدبن عمر الکرابیسی» خاتمه یافته است.

کرابیسی با هدف نقل از شرح او بر اصول نوشته و خود نیز توضیحاتی بر آن افزوده باشد، یا ممکن است این سبک محاورهٔ غیرمستقیم ویژهٔ رساله‌ای آموزشی در آن دوره باشد. شرح‌های دقیق نویسنده نشان از هوشمندی او دارد. مؤلف در مقدمه بعد از یاری جستن از خداوند متعال و صلوات بر پیامبرش می‌گوید هر علمی طبقاتی و هر صناعتی[1] درجاتی دارد که بعضی از بقیه بالاتر است و هر صناعتی مراتبی دارد که بعضی بر بعضی تقدم دارند و برای آموزش مبتدی باید ترتیب این مراتب رعایت شود. او «مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس و اصول علم قضایا» را که برای متعلم مبتدی دشوار است شرح داده است تا بخواند و بفهمد و شکوکی را که در قضایای آن رخ می‌دهد توضیح داده است تا بهتر فهمیده شود (نسخهٔ بانکی‌پور، شمارهٔ ۲۴۳۰گ ۲پ).

کرابیسی در این رساله از یعقوب ابن اسحاق کِنْدی (سدهٔ دوم و سوم هجری) در تعریف زاویهٔ مسطحه و در چند موضع از حجاج بن مطر حاسب[2] (سدهٔ دوم و اوایل سدهٔ سِوم هجری) و شرح نسخهٔ مأمونی نام برده است [3] او در تعریف چهارضِلعی «منحرَف» که دو ضلع متقابل موازی دارد و تعریف چهارضلعی «شبه منحرَف» به کتاب تقاسیم اقلیدس استناد کرده است[4] (نسخهٔ رشت، ۲۲). کتاب تقاسیم اقلیدس (تقسیم اشکال یا کتاب القسمة) را ثابت بن قره اصلاح کرده است (ابن ندیم، ۴۸۰) اما اکنون اثری از این اصلاح بر جای نمانده است. متن کتاب تقاسیم اقلیدس از بین رفته است و تنها ارجاعاتی به این اثر در شرح پروکلوس بر اصول اقلیدس باقی است. سجزی (ح ۳۳۰–ح۴۱۵ق) جملات ابتدایی همهٔ قضایای کتاب تقاسیم را به علاوهٔ برهان چهار قضیه به عربی ترجمه کرده و وپکه[5] در ۱۸۵۱م ترجمهٔ فرانسوی آن را منتشر کرده است (هوخندایک،[6] ۱۴۴).[7]

---

۱. کرابیسی هندسه را به عنوان «صناعت» معرفی کرده است.

۲. حجاج بن مطر از مترجمین علوم به عربی در اوایل خلافت عباسیان بود و دو ترجمهٔ موسوم به هارونی و مأمونی از کتاب اصول اقلیدس به‌انجام رساند (قربانی، ۲۲۵).

۳. «وقد أوضحه الحجاج بن مطر الحاسب في شرحه للنسخة المأمونية» (نسخهٔ رشت، ۷۲ و ۷۳).

٤. منحرف را امروز ذوزنقه می‌نامیم؛ «قال احمد قد قال اقلیدس فی کتاب التقاسیم انه انما یسمی المنحَرف من السطوح ذوات الاضلاع الأربعة ما كان منها ضلعان فقط من أضلاعه يتقابلان متوازيين والضلعان الآخَران کیف وقعا. والسطوح الآخَر ذوات الأربعة الأضلاع یسمی الشبهة بالمنحرفة».

5. Woepcke, F. (1851). *Le traité d'Euclide sur la division* (*des figures planes*). Journal Asiatique, 16(5), 233–245.

6. Hogendijk

شرح کرابیسی در بررسی سیر انتقال کتاب اصول و شرح‌های آن به دنیای اسلام سند مهمی است. یاد کردن از برخی تعاریف به قول مؤلفان یونانی پیش‌گفته، دسترسی کرابیسی را به ترجمه‌های عربی اولیه از کتاب *اصول* و شرح‌های یونانی آن، که اکنون موجود نیستند، تأیید می‌کند. شباهت‌ها و تفاوت‌های شرح او با شرح ریاضی‌دان معاصر او، ابوالعباس نیریزی[1] (نیمهٔ دوم سدهٔ سوم و اوایل سدهٔ چهارم) نشان می‌دهد که این دو مؤلف از منابع اصیلی که برخی یکسان و برخی متفاوت‌اند بهره برده‌اند. از طرفی ترجمهٔ لاتینی ژرار کرمونایی (۱۱۱٤–۱۱۸۷م) از شرح اصول با شرح کرابیسی و نیریزی پیوندهایی دارد. کرابیسی اغلب از دومین شرح حجاج بن مطر (مأمونی) استفاده کرده اما از سنت اسحاق– ثابت هم بهره برده است (برنتیس، ۳۱–۳۵).

برنتیس بر پایهٔ مقایسهٔ آثار کرابیسی، نیریزی، حجاج بن مطر، اسحاق– ثابت بن قره و محتوای ترجمهٔ لاتینی ژرار و شروح یونانی از هرون و پروکلوس و واکاوی تعاریف و رویکردها نتیجه گرفته است که کرابیسی به شروح یونانی، از جمله شرح اصول هرون و سنبلیقیوس،[2] دسترسی مستقیم داشته است (ص ٦۱). علاوه بر این، چون تنها اثر برجامانده از کتاب التقاسیم ارجاعاتی است که در شرح پروکلوس بر اصول اقلیدس آمده است، استناد کرابیسی به کتاب التقاسیم می‌تواند گواهی بر این مدعا باشد که او به شرح پروکلوس دسترسی داشته است و این با نتیجه‌گیری برنتیس همسو است. در ادامه توضیحات کرابیسی در بارهٔ برخی تعاریف و اصول موضوعه مقالهٔ اول را بررسی می‌کنیم.[3]

نقطه

اقلیدس تعریف می‌کند: «نقطه شیء است که جزوی ندارد».[4] ابن هیثم در شرح مصادرات به تعاریف دیگری از متأخرین نیز اشاره می‌کند: «نقطه آن چیز است که

---

۷. بر کتاب تقاسیم بعداً پژوهش‌های بیشتری شده است. برای اطلاعات بیشتر به مقالهٔ هوخندایک رجوع کنید.

۱. از شرح اصول اقلیدس نیریزی دو نسخه بر جای مانده است: کتابخانهٔ لایدن، شمارهٔ ۳۹۹/۱ و کتابخانهٔ آیت اللّه العظمی مرعشی، شمارهٔ ٦۵۲٦. نسخهٔ لایدن نسبت به نسخهٔ قم ناقص است

2. Simplicius

۳. این توضیحات بر اساس نسخهٔ رشت نوشته شده است. از نسخهٔ بانکی‌پور تنها صفحهٔ اول، آخر و برگ ۳۳پ را در اختیار داشتم.

٤. النقطة هی شیء لا جزء له .

جزء ندارد»[۱] و «نقطه نهایت خط است» و سپس به دیدگاه‌های فلسفیِ تشابه و تفاوت «نقطه» و «وحدت» از منظر وضع و قسمت‌ناپذیر بودن در مقابل «کثرت» پرداخته است (ابن هیثم، ۹۸–۹۹). در رسالۀ کرابیسی علاوه بر تعاریف فوق به مفهوم زمان و حرکت نیز توجه شده است (نسخۀ رشت، ۵–۶):

> احمد گوید: نقطه شیئی از اشیا است که «لایتجزّی» است. از گفتۀ [اقلیدس] پیداست که عکس این گفته لازم نیست ... و [در]زمان، کلون و نهایت حرکت، هیچ‌یک جزوی ندارند. پس نقطه شیئی از اشیاست که جزوی ندارد و نهایت خط و غایتی برای حدوث و وجود آن است. و [نقطه] معقول است و نه محسوس و نه متوهم. من نیز می‌گویم نقطه غیرمتوهم است. زیرا وهم برای اشیاء محسوس ذکر می‌شود و [وَهم] قوام صورت‌های محسوسات در نفس، بدون مشاهدۀ آنها به حس است. و نقطه صورت ندارد، پس غیرمتوهم و از معقولات است، چون شیء معقول قائم به نفس است، نه به جهت حس و نه صورت، ولکن از جهت عقل. و نقطه یکی از نهایات خط و ابتدای بودنش است.[۲]

او سپس دو تعریف از ریاضی‌دانان یونانی آورده است (همانجا):

> و اما خرمیدس <کذا> می‌گوید: «نقطه مبدأ است و اولین مقداری است که کلش غیرقابل تجزیه است» و واضح است با این تعریف به عکس تعریف [اقلیدس] بازمی‌گردد. و اما ساموس می‌گوید: «نقطه نهایتی است که بُعد ندارد یا [نقطه] نهایت خط است».[۳]

---

۱. النقطة هی ما لا جزء له

۲. إن النقطة هی شیء من الأشیاء التی لایتجزی إذا کان الأمر ظاهراً من قوله إن العکس لا یجب فیما قوله. و ذلک أنّه لیس کل ما لاجزو له، فهو نقطة إذا کانت النفس لا جزو بها. والان من الزمان و نهایة الحرکة لا جزولأ حدهما، فالنقطة هی شیء من الأشیاء التی لا جزو لها وهی نهایة الخط و غایة لحدوثه و کونه. وهی معقولة لا محسوسة ولا متوهمة. و ذلک أن الأشیاء المحسوسة کلها ینقسم. والنقطة منقسمة فهی غیرمحسوسة. و أقول إنّها غیر متوهمة أیضًا و ذلک أنّ الوهم هو یذکر الأشیاء المحسوسة وهو قوام صور المحسوسات في النفس من غیر مشاهدة لها بالحس. والنقطة لیست ذات صورة فهی غیرمتوهمة بل هی معقولة. إذکانت الأشیاء المعقولة هی قائمة في النفس لا من جهة الحس ولا الصورة ولکن من جهة العقل، و هی أحد نهایات الخط والابتداء في کونه. و ذلک متی لحرکت حرکة إلی غیرا الجهة التی یکون بها أحدثت لحرکتها. خطًا ما إمّا مستقیماً أو غیر مستقیم علی حسب حرکتها.

۳. وأما خرمیدس <کذا>: إنّه حدها بأن قال النقطة هي مبدأ و أول للمقادیر کلها غیرمتجزیة وبعلة أن یکون حدها بهذا الحد لیصیر عکس الحد ههنا واضحًا. وأما ساموس: فإنّه قال النقطة هی نهایة لیست ذات بعد أو نهایة الخط

خط و خط راست

اقلیدس در مقالهٔ اول اصول می‌گوید خط طولی است که عرض ندارد.. در شرح کرابیسی در مورد تعریف خط نیز به بُعد حرکت نقطه اشاره شده است (نسخهٔ رشت، ٦–٧):

> احمد گوید: پیش‌تر [در مقدمه] گفتیم که خط از حرکت نقطه در غیر جهتی که در آن قرار دارد حادث می‌شود. و نقطه مقدار ندارد. پس خط باید عرض نداشته باشد. خط همان بُعد حرکت نقطه است از جهتی که بر آن قرار دارد به جهتی که به سوی آن حرکت می‌کند. پس خط یک بُعد دارد ... به ایجاز می‌گویم: خط اولین مقداری است که برایش حس بصر ذکر می‌شود ...، محسوس نیست، چون حائل بین سایه و آفتاب یا حائل بین دو رود جاری مختلف متصل. پس حائل بین سایه و آفتاب همان بُعدی است که عرضی ندارد چون این عرض می‌تواند از آفتاب یا از سایه باشد. و حائل بین آنها به یکی از دو تعلق ندارد و همان خطی است که طول دارد و عرض ندارد.[1]

ابن هیثم در شرح تعریف «خط راست خطی است که به‌گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد» (اصول، مقالهٔ اول، تعریف چهارم) می‌گوید نقاطی که روی خط راست فرض می‌شوند، همه بر یک سمت واحدند، یعنی بعضی بالا و پایین یا چپ و راست نیستند بلکه وضع همه یکی است (ابن هیثم، ۱۰۰). کرابیسی و نیریزی به جنس و انواع خطوطی که به‌طور کلی از کلام اقلیدس می‌توان دریافت مثل خطوط راست، منحنی، مقوّس، مرکب و قطوع مخروطیِ سهمی، هذلولی و بیضی[2] که هندسه‌دان‌ها به‌کار می‌برند اشاره می‌کنند. علاوه بر این نیریزی و کرابیسی خطوطی به صورت شکل «دوّاب» و «مشیمه» و «لولبیة» معرفی کرده‌اند که منظور از آنها منحنی‌هایی چون خطوط مارپیچ و حلزونی

---

۱. قال اقلیدس: الخط طول لاعرض له. قال احمد: قد تقدم قولنا إن الخط انما هو حادث من حركة النقطة التي غير الجهة التى تكون بها. والنقطة ليست ذات مقدار، فواجب أن يكون الخط لاعرض له. إذكان الخط إنما هو بُعد حركة النقطة عن الجهة التي يكون بها إلى الجهة التي حركت إليها. فهو ذو بعد واحد. إذكانت النقطة عن حركتها حدثلا بعدَ لها ليس تحدث بحركتها غير بعد واحد وهو البعد الذي بحركت النقطة إليه. و بايجاز أقول: إنّ الخط هو أول المقادير التي تذكرها حس البصر من جهة المحاورة بغيره بأن تكون نهاية بها فأما على انفرادة من غيره. فليس هو محسوس كالفرق بين الظل والشمس أو كالفرق بين النولين مختلفين متصلين. فإن الفرق بين الظل والشمس هو بُعد لاعرض له، لأنّه لوكان له عرض يكان ذلک العرض يكون إمّا من الشمس و إمّا من الظل وليس الأمر كذلک لأن الفرق بينهما ليس هو واحد منهما فالفرق بينهما هو خط إذكان إنما هو طول لا عرض له.

۲. قطوع المخروطات التي هي مكافئ والزايد والناقص

است.[۱] برنتیس با یافتن مترادف یونانی این واژه‌ها در متون یونانی این امکان را در نظر گرفته که صورت عربی واژه‌ها از ترجمهٔ متون یونانی اقتباس شده است (۴۳). کرابیسی در ادامه تعاریف دیگری از خط راست می‌آورد و در نهایت می‌گوید تعریف اقلیدس بایسته‌ترین تعریف است (نسخهٔ رشت، ۷-۹؛ نیریزی، نسخهٔ قم، شمارهٔ ٦٥٢٦گ ۱۰-۱۷):

> حکایت شده است که [اقلیدس] گفته است: تعریف خط مستقیم موضوعی بر هم‌ترازی هر دو نقطهٔ واقع بر یک خط است. به گفتهٔ او می‌افزایم که خط مستقیم موضوعی بر هم‌ترازی بُعد هر دو نقطه واقع بر یک خط و به معنای همسانی است. و تعریف ارشمیدس: «خط مستقیم کوتاه‌ترین خط بین دو نقطه است»، و افلاطون [۲] «خط مستقیم خطی است که میان دو سرش را می‌پوشاند»، و تعریف دیگر: «خط مستقیم در غایت ترتیب است»، و تعریف دیگر: «خط مستقیم در هر جهت به گونه‌ای هموار بر نقاط خودش قرار دارد» و تعریف دیگر: «خط مستقیم خطی است که نهایاتش ثابت است، و مثل محور از موضعش جابه‌جا نمی‌شود» ...، باید توجه داشت که تعریف اقلیدس در میان همهٔ تعاریف ویژه و مُجاب کننده است [۳]

بسیط

طبق تعریف اقلیدس، «رویه آن است که فقط طول و عرض دارد». کرابیسی می‌گوید «آنچه طول و عرض دارد» لازمهٔ تعریف بسیط است. بسیط دو بعد دارد و

---

۱. ... فمنها خطوط التی في صورة شکل الدواب و مثل الخطوط التي فی صورة شکل المشیمة وغیرذلک مما لایحصی کثیرة... والخطوط اللولبیة و خطوط آخر مثل هذه کثیرة یعرض فیها اشیاء عجیبة... (نسخهٔ رشت، ۹).
دوّاب به معنای حیوانات سوارکاری، مشیمه شاید به معنای جفت جنین و لولبیه از ریشهٔ لولب به معنای خطوط مارپیچی یا حلزونی شکل است.

۲. تعریفی که کرابیسی از قول افلاطون عرضه کرده است دقیقاً همان تعریفی است که پروکلوس در شرح اصول آورده است (برنتیس، ۳۳).

۳. فإنّه قدحکی عنه أنّه قال الخط المستقیم هو الموضوع علی المساوی لِما بین کل نقطتین واقعتین علیه نزید به القول إنّه الموضوع علی البعد المساوی لما بین کل نقطتین واقعتین علیه و قولَه الموضوع هو بمعنی المطابق. وأما ارشمیدس: فإنّه حد الخط المستقیم هو أقصر خط وصل بین نقطتین. وأما افلاطون: فإنه حد المستقیم بأن یقال الخط هو الذي یُستر وسط طرفیه. و حده آخَرون الخط المستقیم لِأن قالوا الخط المستقیم هو الذي في غایة الترتیب. و حدّه آخرون أیضاً: أن قالوا الخط المستقیم هو الذي أجزاؤه کلها من شأنها أنٍ تطابق بعضها بعضا من کل الجهات. و حدّه آخرون: یقالوا الخط المستقیم هو الذي إذا ثبتت نهایتاه ثبت هو أیضاً فلم ینتقل من موضعه کالمحور. ولیس هذا في المنحنیة. و قد ینبغی أن یعلم إن الحد الذي حده اقلیدس خط مستقیم هو أخص أوجب من جمیع الحدود التی حده بها غیره و ذلک

واژهٔ «فقط» برای تأکید بر آن است که «بسیط» فقط طول و عرض است و نه چیز دیگر (یعنی ارتفاع)، چون جسمی که سه بعد دارد علاوه بر طول و عرض، ارتفاع نیز دارد (نسخهٔ رشت، ۹–۱۰):

> می‌دانیم بسیط از حرکت خط ایجاد می‌شود و خط طبعاً مقدم بر بسیط است، زیرا بسیط از حرکت خط ایجاد می‌شود. اما خرمیدس[۱] <کذا> می‌گوید: «بسیط همانِ مقداری است که دو بُعد دارد، همانطور که جسم مقداری است که سه بُعد دارد. اسم بسیط از زبان یونانیان از ظهورای گرفته شده که همان ظاهر جسم است که به واسطهٔ آن دیده شود».

اصل موضوع (مصادرهٔ) پنجم مقالهٔ اول اصول اقلیدس

پس از اینکه کرابیسی منحرف (چهارضلعی با دو ضلع موازی) و خطوط مستقیم موازی را تعریف می‌کند، مطلب را به بحث مصادرات پیوند می‌زند. او می‌گوید: «وقتی اقلیدس از تعاریف ضروری مقدماتی فارغ شد، پنج مصادره (اصل موضوع) را معرفی کرد». کرابیسی سه مصادرهٔ اول را «صناعت ممکنة غیرممتنعة من الامکان» نامید. این اصول عبارتند از: ۱– از هر دو نقطهٔ متمایز، یک و تنها یک خط راست می‌گذرد، ۲– هر پاره‌خط را می‌توان تا بی‌نهایت روی خط راست امتداد داد و ۳– با یک نقطه به عنوان مرکز و یک پاره‌خط به عنوان شعاع می‌توان یک دایره رسم کرد. کرابیسی می‌گوید شایسته است متعلم دو اصل بعدی را پس از تحقیق بپذیرد: ٤– همهٔ زوایای قائمه با هم برابرند، و ٥– اصل توازی (نسخهٔ رشت، ۲۲). کرابیسی یادآور شده است که در مصادرهٔ پنجم، منظور اقلیدس دو خطی است که در یک صفحهٔ مستقیم [یا اقلیدسی] قرار دارند[۲] (نسخهٔ رشت، ۲٥–۲٦):

> پیشینیان بر این مصادره برهان‌های گوناگونی آورده‌اند و در برهان‌های خود از قضایایی از مقالهٔ اول و قضایایی که در کتاب اقلیدس نیست بهره برده‌اند، اما ترتیب قضایا بر خلاف موضعی است که اقلیدس گفته است و با

---

۱. منبع یونانی برای تعریف بسیط از قول مؤلفی به نام خرمیدس یافت نشده است (برنتیس، ۳۳).

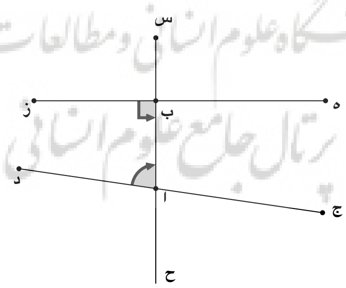
۲. إذا وقع خط مستقیم علی خطین مستقیمین فیصیر في أحد الجهتین الزاویتین الداخلتین اصغر من قائمتین فإن الخطین المستقیمین إذا أخرجا في تلک الجهة فإنهما یلتقیان.

استفاده از آنها مقدمات براهین را فراهم کرده‌اند. اینجا آن براهین را حذف می‌کنم، چون غرض از کتاب ما روشنگری برای فهم آسان‌تر است.

کرابیسی برهان اصل پنجم را در سه حالت آورده است: وقتی یکی از دو زاویهٔ ایجاد شده از برخورد خط با دو خط داده شده قائمه باشد؛ وقتی دو زاویهٔ ایجاد شده حادّه باشند؛ و وقتی یکی از دو زاویهٔ ایجاد شده منفرجه باشد (نسخهٔ رشت، ۲۲-۲۷).

[مصادرهٔ پنجم مقالهٔ اول]: خط مستقیم **اب** بر دو خط **جد** و **هز** واقع شده است. اگر در سمتی که [نقاط] **د** و **ز** قرار دارند، دو زاویه که [مجموعشان] کوچک‌تر از دو قائمه است پدید آیند، آنگاه وقتی دو خط **جد** و **هز** تا بی‌نهایت در جهت **د** و **ز** امتداد یابند، ناگزیر یک‌دیگر را قطع می‌کنند.

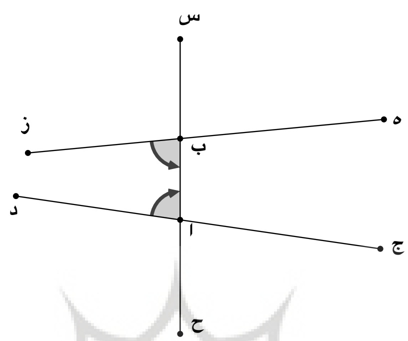
برهان: خط **اب** را در دو جهت بر یک راستا تا نقاط **ح** و **س** امتداد می‌دهیم.
[حالت اول] : فرض می‌کنم زاویهٔ **ب** (در جهت **ز**) قائمه باشد. اگر [مجموع] دو زاویهٔ داخلی در جهت **د** و **ز** کمتر از دو قائمه و زاویهٔ **ب** قائمه باشد، پس زاویهٔ **ا** کوچک‌تر از قائمه می‌شود. و میل خط **دا**[1] به سمت **س** بیشتر از میل آن به سمت **ح** است. و خط **زب** قائم بر خط **حس** (همان عمود بر خط **حس**) به هیچ سمتی میلی ندارد. پس خط **بز** وقتی در راستای خودش امتداد می‌یابد، به یکی از دو جهت مایل نمی‌شود. اما خط **اد** وقتی بر راستای خودش امتداد می‌یابد به جهت **س** مایل می‌شود. و [**دا**] با خط **بز** در یک صفحهٔ مستقیم قرار دارد، بنا بر این خط **بز** را قطع می‌کند. و وقتی بیشتر امتداد یابد، میل [**اد**] زیاد می‌شود [شکل ۱].



شکل ۱

۱. نسخه: + قائم بر خط **سح**

[حالت دوم]: فرض می‌کنیم هر یک از دو زاویهٔ داخلی از جهت **د** و **ز** حادّه باشند. بنا بر این هر یک از دو خط **بز** و **اد** که بر راستای خود ادامه می‌یابند، میلی به سوی یکدیگر دارند. و اگر تا بی‌نهایت امتداد یابند ناگزیر یکدیگر را قطع می‌کنند[شکل ۲]

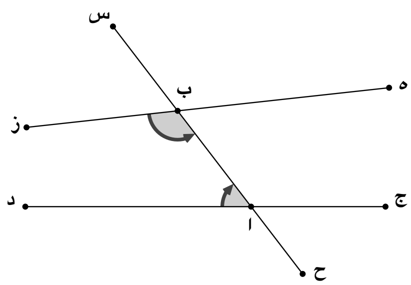


شکل ۲

[حالت سوم]: و همچنین فرض می‌کنیم یکی از آن دو زاویه منفرجه باشد، یعنی همان که بر نقطهٔ **ب** به سمت **ز** است. پس [مجموع] آن زاویهٔ منفرجه با زاویه‌ای که بر نقطهٔ **ا** است کوچک‌تر از دو قائمه است. و در قضیهٔ ۱۳ مقالهٔ اول[1] گفته شده است که [مجموع] دو زاویهٔ داخلی و خارجی در نقطهٔ **ب** (در کنار خط **بز**) مساوی با دو قائمه است. میل خط **دا**[2] به سمت **س** بیش‌تر از میل خط **زب**[3] است. پس باید میل خط **دا** وقتی بر راستای خود (به سمت **س**) ادامه می‌یابد بیش‌تر از میل خط **زب** وقتی بر راستای خود (به سمت **س**) ادامه می‌یابد باشد. پس فاصلهٔ دو خط **اد** و **بز** وقتی بر راستای خود ادامه می‌یابند نزدیک می‌شود و وقتی تا بی‌نهایت ادامه یابند یکدیگر را قطع می‌کنند[شکل ۳]. و آنچه می‌خواستیم.

---

۱. اگر خط راستی روی خط راستی واقع شود، یا دو زاویهٔ قائمه می‌سازد یا دو زاویه که مجموعشان دو قائمه است.
۲. نسخه: + قائم بر خط **حس**
۳. نسخه: + قائم بر خط **حس**



شکل ۳

بسم الله الرحمن الرحيم

[illegible]

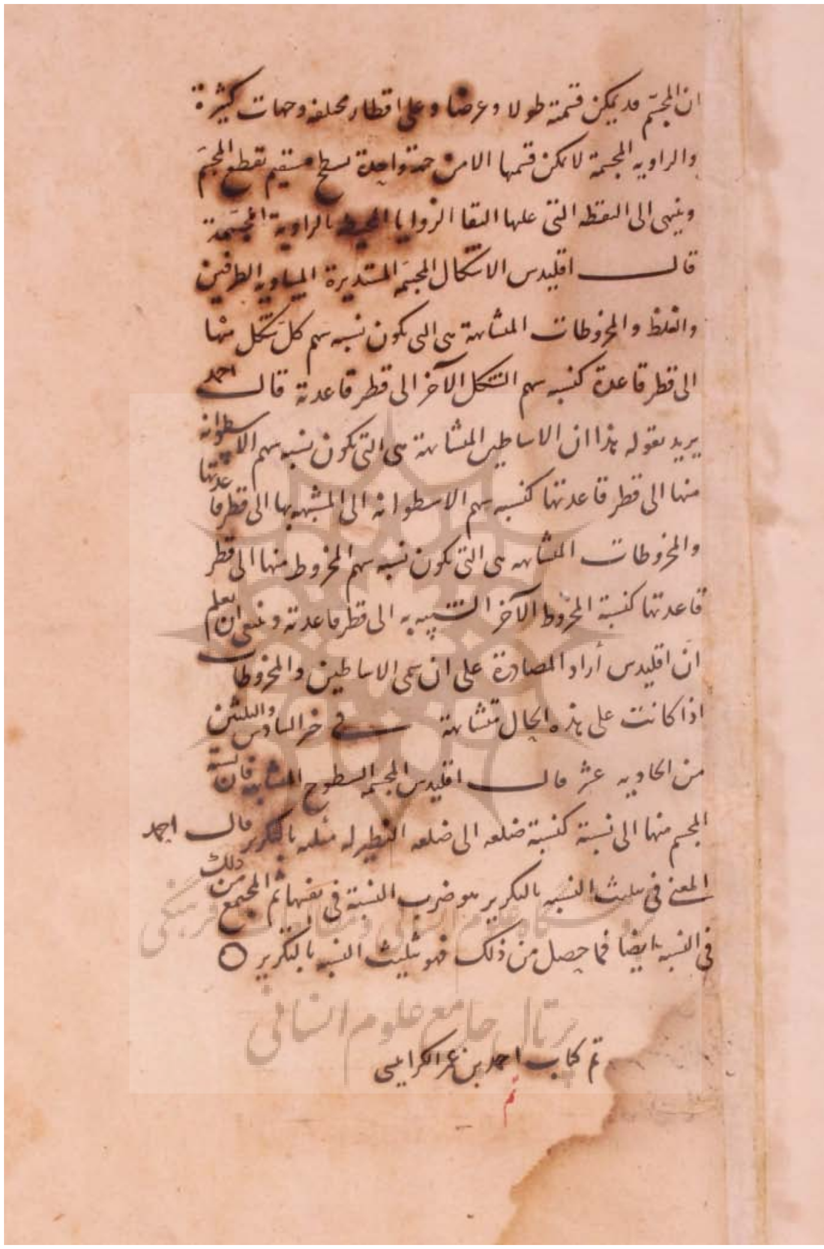
صدور مقالات کتاب اقليدس فی الاستقصاء وهو الاصول [illegible]

[illegible]

فاقول ان الاشکال التی فی الاصول فی علم الاشکال [illegible]

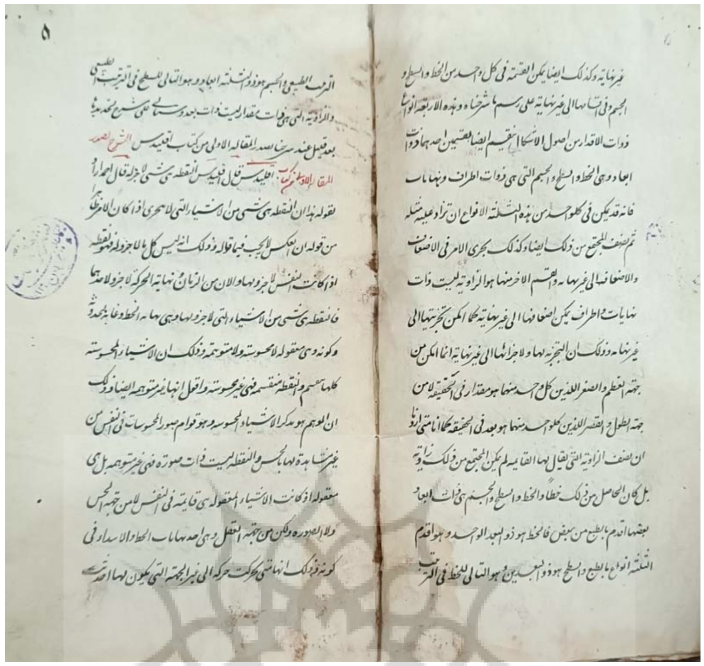
وهی النقطة والخط والزاوية والسطح والجسم فالنقطة منها ليست ذات ابعاد

تصویر۱. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانهٔ بانکی‌پور، گ ۱)



ان المجسم قد يمكن قسمته طولا وعرضا وعلى اقطار مختلفة وجهات كثيرة :
والزاوية المجسمة لا يمكن قسمها الا من جهة واحدة بسطح مستقيم تقطع المجسم
وينتهي الى النقطة التي عليها التقا الزوايا المحيطة بالزاوية المجسمة :
قال اقليدس الاشكال المجسمة المستديرة المساوية الطرفين
والنقط والمخروطات المتشابهة هي التي تكون نسبة سهم كل شكل منها
الى قطر قاعدته كنسبة سهم الشكل الآخر الى قطر قاعدته قال احمد
يريد بقوله هذا ان الاساطين المتشابهة هي التي تكون نسبة سهم الاسطوانة
منها الى قطر قاعدتها كنسبة سهم الاسطوانة الى المشبهة بها الى قطر قاعدتها
والمخروطات المتشابهة هي التي تكون نسبة سهم المخروط منها الى قطر
قاعدتها كنسبة المخروط الآخر التي نسبه الى قطر قاعدته ونعني ان يعلم
ان اقليدس اراد المصادرة على ان سمي الاساطين والمخروطات
اذا كانت على هذه الحال متشابهة في آخر السادس والثلثين
من الحادية عشر قال اقليدس المجسمة السطوح المتشابهة فان نسبة
المجسم منها الى نسبة كنسبة ضلعه الى ضلع النظير له مثلثة بالتكرير قال احمد
المعنى في تثليث النسبة بالتكرير هو ضرب النسبة في نفسها ثم المجتمع من ذلك
في النسبة ايضا فما حصل من ذلك فهو تثليث النسبة بالتكرير ○
تم كتاب احمد بن عمر الكرابيسي
تم

تصویر۲. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانهٔ بانکی‌پور، گ ۵۷پ)



تصویر۳. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانهٔ رشت، ٤ و٥)

تصویر٤. شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (کتابخانهٔ رشت، ۱۳۲ و۱۳۳)

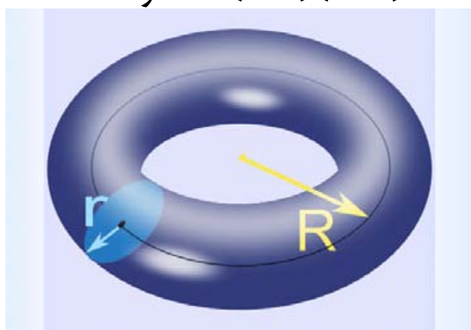
رسالهٔ مساحت الحلق

تاریخ موضوع حلقه‌ها که مرتبط با موضوع دایره در هندسه است با تاریخ ریاضیات ریشهٔ مشترکی دارد. اصول اقلیدس، آثار ارشمیدس، مخروطات آپلونیوس و متریکای هرون مباحثی در بارهٔ دایره دارند. در متریکای هرون (III/126-128) تعریف دقیقی از حلقه آمده است. هرون نوشته است که دیونیسودوروس[1] (ح۲۵۰ق.م - ۱۹۰ق.م) ریاضی‌دان یونانی اثری به نام در بارهٔ چنبره[2] داشته است. در این اثر، دستور حجم حلقه برابر است با مساحت دایرهٔ مولّد ضرب در طول محیط دایره‌ای که توسط مرکز دوران پیموده می‌شود. بدیهی است دیونیسودوروس از کتاب روش[3] ارشمیدس برای اثبات نتایج خود بهره برده است (هیث، ۲۱۸، ۲۱۹). پرسیوس[4] (دو قرن پیش از میلاد) و پروکلوس[5] (ح ۴۱۱-۴۸۵م) تعریف حلقه را در آثار خود آورده‌اند و پاپوس اسکندرانی (۲۹۰-۳۵۰م) قضایایی برای محاسبهٔ سطح و حجم حلقه‌ها عرضه کرده است (هیث، ۲۰۳-۲۰۶).

پاپوس در مقالهٔ هفتم اثر ارزشمند خود، مجموعهٔ ریاضی، صورت اولیهٔ قضیهٔ مرکز هندسی را که بعداً گولدین[6] (۱۵۷۷-۱۶۴۲م) ارائه داد نوشته است. قضیهٔ اول پاپوس می‌گوید: «اگر یک قوس مستوی حول محوری در صفحهٔ منحنی که ضمناً منحنی را قطع نمی‌کند دوران داده شود، مساحت سطح دوّاری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصل‌ضرب طول قوس و طول مسیری که به وسیلهٔ مرکز ثقل قوس پیموده می‌شود». قضیهٔ دوم پاپوس در بارهٔ محاسبهٔ حجم حلقه است و می‌گوید: «اگر سطحی مستوی حول محوری در صفحه‌اش، که سطح را قطع نمی‌کند دوران داده شود، حجم جسم دواری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصل‌ضرب آن سطح در طول مسیری که به وسیلهٔ مرکز ثقل آن سطح پیموده شده است» (ایوز، ۱۸۴/۱، ۲۰۳). با استفاده از این قضایا می‌توان مساحت رویه و حجم چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول

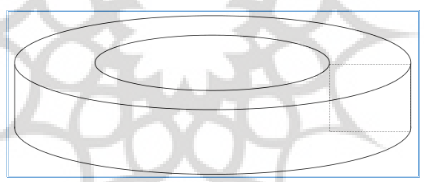
1. Dionysodorus
2. *On the (Spire) or Tore*
3. *Methods*
4. Perseus
5. Proclus
6. Guldin

محوری واقع در صفحهٔ دایره و به فاصلهٔ $R > r$ از مرکز دایره تشکیل می‌شود، به‌دست آورد: $A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 rR$ و $V = 2\pi R\,\pi r^2$ (شکل٤).



شکل٤. حلقهٔ مستدیرة الغلظ یا چنبره[1]

همچنین، طبق این قضیه مساحت رویه و حجم جسم حاصل از دوران یک سطح مربعی حول محور مرکزی عبارت است از $A = 2\pi R 4a$ و $V = 2\pi R\, a^2$ که a ضلع مربع مولّد و R شعاع دوران است (شکل٥).


شکل٥. حلقهٔ مربعة الغلظ یا چنبروار

رسالهٔ مساحت الحلق کرابیسی که از آثار منحصر به فرد دورهٔ اسلامی است دو مقاله دارد. در صدر هر مقاله تعاریف و سپس قضایایی با عرضهٔ براهین هندسی آمده است. مقالهٔ اول در بارهٔ شکل هندسیِ مسطح مطوّق[2] است. در صدر مقالهٔ اول تعریف مطوّق یعنی سطح بین دو دایرهٔ متحدالمرکز و در ادامه ۱۸ قضیه آمده و در مواردی به اصول اقلیدس ارجاع داده شده است.

---

۱. شکل برگرفته از سایت mathisfun است

2. Annulus

مطوّق = طوق، تاج

مقالهٔ دوم شامل تعریف و ۷ قضیه مربوط به «حلقهٔ مستدیرة الغلظ»[۱] و «حلقهٔ مربعة الغلظ» است. «حلقهٔ مستدیرة الغلظ» را امروزه چنبره[۲] می‌نامیم. این حلقه نوعی رویهٔ دورانی است که از طریق دوران یک دایره در فضای سه بعدی، حول یک محور که با دایره هم‌صفحه است ایجاد می‌شود (شکل٤). «حلقهٔ مربعة الغلظ» شکلی هندسی است که از دوران یک مربع حول محور مرکز دایره پدید می‌آید که با چنبره تفاوت دارد[۳] و امروزه آن را چنبروار می‌نامیم (شکل٥).

آشنایی مؤلف با اصول اقلیدس کاملاً مشهود است. برای مثال در مقالهٔ اول، قضیهٔ ۷ و مقالهٔ دوم قضیهٔ ۱ به قضایایی از اصول اشاره شده است (نک: دنبالهٔ مقاله). بسل و هاگن (۱۹۳۱) معتقدند توضیحات مؤلف در مقالهٔ دوم در بارهٔ حلقه‌ها فروتر از جایگاه ممتاز اوست و تعاریف او را متفاوت از تعاریف دقیق ریاضی‌دانان یونانی دانسته‌اند (٥٠٤، ٥٠٥). بسل و هاگن نشان دادند که کرابیسی در اثبات قضایا چه تعاریف یا قضایایی از اصول را به‌کار گرفته است (٥٢٣–٥٣٩). همچنین در پایان، تبارنامهٔ قضایای رساله (اینکه کدام قضیه در اثبات کدام قضیه استفاده شده) به صورت جدول۱ عرضه شده است (بسل- هاگن ص ٥٤٠؛ در ستون تبار قضایا عددی که با ارقام رومی نوشته شده است شمارهٔ مقاله را در اصول و عدد دیگر شمارهٔ قضیه را نشان می‌دهد).

جدول۱. تبارشناسی قضایای مساحة الحلق

قضیه	تبار	قضیه	تبار
۱–۱	I/۲	۱–۱۳	II/٦
۱–۲	I/۳ تا I/۷	۱–١٤	I/۱۸
۱–۳	I/٤	۱–١٥	–
۱–٤	II/۳	۱–١٦	II/۷
۱–٥	II/۳ و II/٥	۱–۱۷	I/۱۸
۱–٦	I/۸	۱–۱۸	–

---

۱. غلظ = ضخامت

2. Torus

۳. به این منحنی‌ها Toroid می‌گویند. Torus یک نوع Toroid است

قضیه	تبار	قضیه	تبار
۱-۷	–	۲-۱	II/۲
۱-۸	–	۲-۲	II/۳(؟)
۱-۹	I/۱۱ و I/۱٦ و I/۱۷	۲-۳	II/٥
۱-۱۰	I/۱٦ و I/۱۷	۲-٤	–
۱-۱۱	I/۱۲ و I/۱٤	۲-٥	II/٦
۱-۱۲	I/۱٥	۲-۷	–
		۲-۸	–

مقالهٔ گندز[۱] (۱۹۳۳) در بارهٔ عنوان، ریشه‌شناسی واژه‌های مهم و تخصصی به‌کار رفته در مساحة‌الحلق نظیر معنای ضرب، مقدار، سطح، مساحت، مطوق، حلقه و مواردی دیگر در تکمیل شرح بسل- هاگن است (۹۹-۱۰۵).

تصحیح و ترجمهٔ رسالهٔ مساحة الحلق

پیش‌تر اشاره شد که این رساله در ۱۹۳۱ تصحیح و به زبان آلمانی ترجمه و شرح شده است. در تصحیح بسل و هاگن اشکالاتی دیده می‌شود.[۲] پیچیدگی‌هایی در خواندن متن تخصصی مساحة الحلق وجود دارد؛ مثلاً «دایرهٔ **اجـ**» با توجه به متن می‌تواند نشان‌دهندهٔ نام دایره، اندازهٔ مساحت یا قطر دایره باشد. همچنین «**اجـ**» می‌تواند نشان‌گر طول پاره خط، یا مربعی با دو رأس مقابل **ا** و **جـ** یا نام دو نقطهٔ **ا** و **جـ** یا نام دو دایرهٔ **ا** و **جـ** یا نام حلقه یا مطوّق باشد. گویا بسل وهاگن بر مبنای خطاهای خواندن متن ادعا کرده‌اند کرابیسی بخشی از متن را بدون آگاهی از تعاریف تخصصی ریاضی و یافته‌های ریاضی‌دانان یونانی نوشته است (٥۰٤).

تصحیح بسل و هاگن بر اساس نسخه‌های آکسفورد و قاهره است. در جدول۲ فهرست نسخه‌های در دسترس برای تصحیح حاضر آمده است. در ادامه کوشش شده است تصحیح بهتری از متن عربی مساحت‌الحلق عرضه شود و نیز متن آن به فارسی ترجمه شود. در اغلب موارد شرح ریاضی پیچیده‌ای لازم نیست، اما در صورت نیاز در پانویس توضیح مختصری نوشته شده است.

1. Solomon Gandz

۲. برای مثال، به چند نمونه اشاره می‌شود: «... وهما القطران التي هی کنسبة الدائرتين فالثالث و أحد القطرين بل هما الخطان مطلوبان» به صورت: «... فثالث واحدالقطرين ...» (پیوست، مقالهٔ اول، [۹])، و دو دایرهٔ ج [و] ه به صورت دو دایرهٔ ح ط (پیوست، مقالهٔ اول، [۱۱]) خوانده شده است

نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲۴۳۲ دانشگاه تهران اقدم و اصح نسخ است. با در نظر گرفتن اینکه زمان کتابت باقی نسخه‌ها بسیار به یکدیگر نزدیک است، متن حاضر با توجه به کامل و خوانا بودن متن‌ها و شکل‌ها به ترتیب بر اساس نسخه‌های شمارهٔ ۲۴۳۲/۱۴ دانشگاه تهران، جاراللّه، ایاصوفیه، آکسفورد و شمارهٔ ۱۷۹۰ دانشگاه تهران تصحیح شد (جدول۲). در هیچ‌یک از نسخ، تاریخ تحریر یا تألیف مساحة الحلق نوشته نشده است، اما چون همهٔ این نسخ بخشی از یک مجموعه‌اند، تاریخ‌ها به قرینهٔ رسائل دیگر آن مجموعه تخمین زده شد. همهٔ مجموعه‌های شامل مساحة الحلق، رسائل مهم دورهٔ اسلامی و ترجمهٔ آثار یونانی از ریاضی‌دانانی چون ثابت بن قره، بنوموسی، خواجه نصیرالدین طوسی و ... را در بر دارند و این نشان از اهمیت رسالهٔ مساحت الحلق دارد [۱]

در تصحیح انتقادی، رسم الخط امروزی به‌کار گرفته شد. شمارهٔ صفحات بر اساس نسخهٔ خطی ۲۴۳۲دانشگاه تهران بین دو علامت «/» و به صورت پر رنگ مشخص شد. عنوان‌ها و سرفصل‌ها و قضایاکه پشت سر هم نوشته شده بود در سطرهای جدا قرار گرفت و پاراگراف‌بندی شد و پاراگراف‌ها شماره گذاری شد. تفاوت متن‌ها با علامت «+» و «-» در پانویس مشخص شد. از علامت «]» برای جدا کردن نوشتار نسخه‌ها استفاده شد.[۲]

۱. فهرست‌نویس مجموعهٔ ۲۴۳۲ دانشگاه تهران به اهمیت و یکتایی رساله‌های این مجموعه اشاره کرده است: «مجموعهٔ رسائل ریاضی که در سنهٔ ٦٩٥ و از روی خط مؤلف تحریر شده، ١٦ رساله به شرح فهرست علاوه از قدمت و صحت و اصالت نسخه، چند رساله هست که عدیم‌النظیر است... من جمله... تألیف کرابیسی... که در نهایت اهمیت است» (نسخهٔ خطی۲۴۳۲، ۱).

۲. برای مثال، فسطح المطوّق] - د۱، - ج، یعنی عبارت فسطح المطوق در نسخهٔ دانشگاه تهران۱ و جاراللّه نیامده است.

جدول۲. نسخه‌های به‌کار گرفته شده در تصحیح مساحة الحلق

علامت اختصاری	کتابخانه	برگ‌ها- صفحه‌ها	سال
د۱	دانشگاه تهران ۱۲۴۳۲/۱۴	ص۱۳۷- ۱۴۱	۶۹۵
آ	ایاصوفیه شمارهٔ ۲۷۶۰	گ۵۷پ- ۵۹پ	قرن ۹
ج	جارالله ۱۵۰۲/۱۱	گ۴۹پ-۵۲ر	قرن ۹
ت	آکسفورد (تورستون)	۵۳پ-۵۵ر	قرن ۹
د۲	دانشگاه تهران ۱۷۹۰[۲]	ص۱۶۵-۱۶۰	قرن ۸ یا ۹

واژه‌شناسی رسالهٔ مساحت الحلق

چند واژه که در این متن به‌کار رفته‌اند در اینجا تعریف شده‌اند:

مطوّق: در فارسی تاج نامیده می‌شود و سطح بین دو دایرهٔ متحدالمرکز است.

حلقه: ابن‌هیثم ضمن بحث در بارهٔ اینکه تصور فرد از محدّب یا مقعر بودن به جهت و نهایت سطح مستدیر بستگی دارد، به این پرسش که خط واحدی می‌تواند هم محدّب و هم مقعر در نظر گرفته شود چنین پاسخ داده است: «خط محدب، مقعر نیست بلکه نهایتِ سطح مستدیری است که تخیل آن منفرد و مفارق از سطح مستدیر ممکن نیست و جزیی از سطح مستدیر است که نباید منفرد از سطح در نظر گرفته شود. علتی که تخیل ما را از خط مستدیر منفرد و جدای از سطح ممکن می‌کند همان است که از اجسام مستدیری به نام حلقه یعنی اجسام مستدیری که درون آنها خالی است درک می‌شود. تصور شکل حلقه به خودی خود به صورت محیط دایره است. درک ما از دایره و حلقه شبیه است. یعنی محیط دایره منفرداً شبیه حلقه است (تفسیر مقالهٔ ۳ اصول، ابن هیثم، ۲۲۸؛ نسخهٔ رشت، ۲۳۵-۲۳۶).

غلظ: واژهٔ غلظ[۳] را ابن هیثم و کرابیسی در شرح صدر مقالهٔ یازدهم اصول، در تعریف استوانه با دو قاعدهٔ مساوی و ضخامت یکسان و در تعریف مخروط

---

۱. فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، ج ۹، ۱۰۹۹

۲. فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران، ج ۸، ۳۵۴

۳. معنی غلظ در فارسی: ضخامت، ستبری؛ الغلظ در هندسه به زبان عربی: یعنی به العرض والسمک (ابن هیثم، ۴۲۴)

به‌کار برده‌اند [۱] همان‌طور که گفته شد کرابیسی در مقالهٔ دوم «حلقهٔ مستديرة الغلظ» و «حلقهٔ مربعة الغلظ» را به ترتیب برای جسم‌های دوار چنبره و چنبروار بِه‌کار برده است (نکـ: متن ترجمه شدهٔ مساحت الحلق)؛ حلقه‌ای که از دَوران دایرهٔ مولد حول محور مرکزی ایجاد می‌شود و حلقه‌ای که از دوران مربع مولد حول محور مرکز دایره تولید می‌شود. چنبروار رویهٔ دورانی است که حفره‌ای وسط آن است، مثل دونات یا تایر. اگر مربعی دور محوری موازی یکی از اضلاعش دوران یابد حلقهٔ خالی با مقطع مربعی تولید می‌شود و اگر شکل دوران یافته دایره باشد چنبره ایجاد می‌شود.

مساحت حلقه: با توجه به دستورها و رَویه‌های قضایای مقالهٔ دوم مقصود حجم حلقه‌ها است.

شماری دیگر از واژه‌ها و عبارات به‌کارفته در این رساله که دانستن آنها برای درک بهتر متن مفید است، در جدول۳ آمده است.

جدول۳– برخی واژه‌ها و عبارات به‌کار رفته در متن مساحة الحلق

واژه / عبارت	معنی/ توضیح	واژه / عبارت	معنی/ توضیح
دایرتین متوازیتین	دو دایرهٔ متحدالمرکز	تکسیر	مساحت
ثلث	ثلاث	ا إلي ب مثناه	مربع نسبت ا به ب
فلیکن مربعا ا ب، ز ح	یعنی مربع ا برابر ز و مربع ب برابر ح است	دایرهٔ اج	مساحت دایرهٔ اج یا محیط دایرهٔ اج
ا ضرب فی نفسه و في ج	یعنی مربع ا در ج	مقدار	به هر یک از قطر، محیط و مساحت دایره‌ها مقداری نسبت داده شده و آن مقدار با یک طول نشان داده شده است. به این ترتیب بین این مقادیر نسبت‌هایی تعریف شده است

۱. «ثم قال اقليدس: الشكل المجسم المستدير الذي قاعدتاه دائرتان متساويتان، و هوالمتساوي الغلظ هو ما يحوزه سطح متوازي الأضلاع قائم الزوايا» (ابن هيثم، ٤٢٠). قال اقليدس الأشكال المجسمة المستديرة المساوية الطرفين والغلظ والمخروطات المتشابهة هى التى يكون نسبة سهم كل شكل منها إلي قطر قاعدته كنسبة سهم الشكل الآخر إلي قطر قاعدته» (ابن هيثم، ٤٢٤، نسخهٔ رشت، ۱۳۳، مقالهٔ یازدهم).

واژه / عبارت	معنی/ توضیح	واژه / عبارت	معنی/ توضیح
دایرتین کـاَج، **بد**	دو دایره برابر اج و **بد**	مسطح الاول في الثالث	مسطحی که از ضرب مقدار **ا** (قطر) در مقدار **جـ** (محیط) حاصل می‌شود. مساحت این مسطح ٤ برابر مساحت دایره است.
اج المطوق	مطوق اج	نسبت دو دایره	نسبت مساحت‌های دو دایره یا نسبت محیط‌های دو دایره
بسیط مستوی	سطح	عمل کنیم	رسم کنیم
معمول	رسم شده	**ا** در ج	**ا** ضرب در ج
فوإلی ح	پس نسبت و به ح	**اجد** مع جهز	**اجد** به اضافهٔ جهز
دائرتی ج، ه	دو دایرهٔ ج و ه	ادج	محیط دایرهٔ **ادج**

تصویر۵. مساحة الحلق دانشگاه تهران، ۲٤۳۲/۱٤ (گ ۱۳۹پ–۱۴۰ر)

ترجمه رسالۀ مساحت الحلق

مقالۀ اول از کتاب مساحت حلقه‌ها

مقدمه: سطح بین دو دایرۀ هم‌مرکز را سطح مطوّق و تفاضل نصف قطر دایرۀ بزرگ از نصف قطر دایرۀ کوچک را قطر مطوّق می‌نامیم.

قضیۀ۱: اگر برای هر چهار مقدار [**ا**، **ب**، **جـ**، **د**]، نسبت اولی در سومی یعنی **ا** در **جـ** (که برابر **ه** است) به دومی در چهارمی یعنی **ب** در **د** (که برابر **و**) است، برابر با مربع نسبت اولی به دومی یعنی مربع نسبت **ا** به **ب** باشد، آنگاه نسبت اولی به دومی برابر نسبت سومی به چهارمی است[1] [شکل۱].[2]

اگر مربع **ا** برابر **ز** و مربع **ب** برابر **ح** باشد، آنگاه نسبت **ز** به **ح** برابر مربع نسبت **ا** به **ب** و برابر نسبت **ه** به **و** است. پس به اِبدال نسبت،[3] نسبت **ه** به **ز** برابر **و** به **ح** است. چون ضرب **ا** در **ا** برابر **ز**، و ضرب **ا** در **جـ** براَبر **ه** است، پس نسبت **ه** به **ز** برابر نسبت **جـ** به **ا** است. پس نسبت **و** به **ح** برابر نسبت **جـ** به **ا** است. و چون ضرب **ب** در **ب** برابر **ح**، و ضرب **ب** در **د**

---

۱. از قضایای بعدی استنباط می‌شود که قطرها و محیط‌های مطوّق چهار کمیت (مقدار) در نظر گرفته شده است تا بتوان نسبت‌هایی میان آنها را تعریف کرد. پس از این، بر اساس این کمیت‌ها، کمیت‌های دیگری به مثابه مساحت و مربع قطر دو دایره معرفی شده (جداول زیر) و به ازای هر یک از آنها پاره‌خطی تعریف شده است.

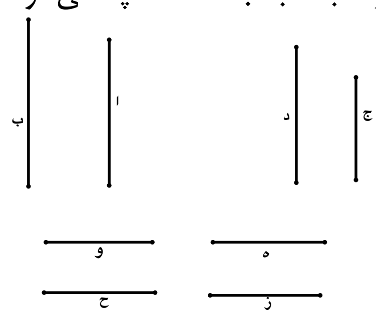
اولی	دومی	سومی	چهارمی
ا	ب	جـ	د
$2r$	$2r'$	$P = 2\pi r$	$P' = 2\pi r'$

ا در جـ	ب در د	مربع ا	مربع ب
ه	و	ز	ح
$S = 4\pi r^2$	$S' = 4\pi r'^2$	$4r^2$	$4r'^2$

۲. در ترجمۀ رساله شماره‌گذاری شکل‌ها از ۱ شروع شد .

۳. (اصول، V، تعریف ۱۲)، اِبدال نسبت: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t}$

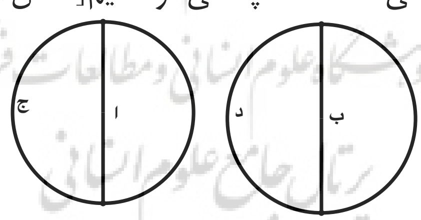
برابر **و** است، پس نسبت **و** به **ح** یعنی نسبت **جـ** به **ا** برابر نسبت **د** به **ب** است. پس بهِ ابدال نسبت، نسبت **جـ** به **د** برابر نسبت **ا** به **ب** است - آنچه می‌خواستیم.



[شکل۱]

قضیهٔ۲: در هر دو دایرهٔ **اج** و **بد**،[۱] اگر نسبت محیط یکی به محیط دیگری برابر **ج** به **د** باشد، آنگاه نسبت محیط‌ها برابر است با نسبت قطرها یعنی **ا** به **ب**.

چون نصف **ا** در نصف ج برابر مساحت دایرهٔ **اج** است، پس **ا** در **ج** چهار برابر [مساحت] **اج** است، و نیز **ب** در **د** چهار برابر [مساحت] **بد** است. و نسبت [مساحت] **اج** به [مساحت] **بد** مثل مربع نسبت **ا** به **ب** است. و می‌دانیم نسبت اجزا به اجزا برابر با نسبت اضعاف[۲] [به اضعاف] است. پس چهار برابر [مساحت دایرهٔ] **اجـ** به چهار برابر [مساحت دایرهٔ] **بد** برابر با مربع نسبت **ا** به **ب** است. پس **ا**، **ب**، **جـ** و **د** چهار مقداری‌اند که [با توجه به آنها] نسبت مسطح اولی [ا] در سومی [جـ][۳] به مسطح دومی [ب] در چهارمی [د][۴] برابر است با مربع نسبت اولی [ا] به دومی [ب]. پس قطر **ا** به قطر **ب** برابر با محیط دایرهٔ اول یعنی **جـ** به محیط دایرهٔ دوم یعنی **د** است - آنچه می‌خواستیم [شکل۲].



[شکل۲]

---

۱. **اجـ** و **بد** نام دو دایره است

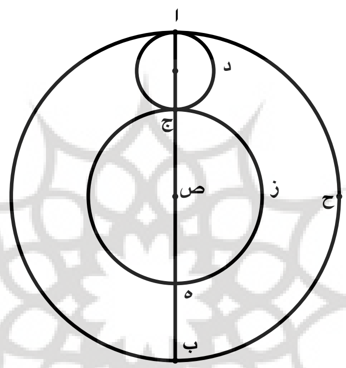
۲. اضعاف: چند برابر (اصول، V، تعریف۵)، $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

۳. از ضرب دو طول یعنی **ا** و **جـ** سطح مستطیلی به طول و عرض $2r$ و $2\pi r$ پدید می‌آید که مساحتش چهار برابر مساحت دایره به شعاع r است: $S = 2r\,2\pi r = 4\pi r^2$.

۴. همین‌طور $S' = 2r'\,2\pi r' = 4\pi r'^2$.

قضیهٔ۳: در صفحهٔ مسطح، تفاضل محیط دایرهٔ بزرگ‌تر (از دو دایرهٔ متحدالمرکز) یعنی **احب**[1] از محیط دایرهٔ کوچک‌تر یعنی **جـزه** با دو برابر محیط دایرهٔ واقع در سطح مطوّق میان آن دو دایره یعنی **ادجـ** برابر است [2]

چون نسبت **ادجـ**[3] به **جـزه** مثل **اجـ**[4] به **جـه**[5] است، پس دو برابر نسبت **اجـ** به **جـه** مثل دو برابر نسبت **ادجـ** به **جـزه** است. پس به ترکیب نسبت،[6] نسبت **اب** به **جـه** یعنی **ابح** به **جـزه** برابر با دو برابر نسبت **اجـد** به اضافهٔ **جـهز** به **جـهز** است. پس دو برابر نسبت **اجـد** به اضافهٔ **جـهز** مساوی با **ابح** است. پس **ابح** برابر است با **جـهز** به اضافهٔ دو برابر محیط **اجـد** برابر است – آنچه می‌خواستیم [شکل۳].

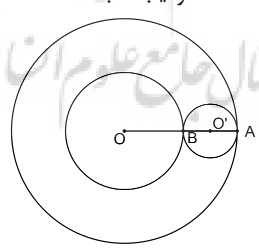


[شکل۳]

---

۱. محیط دایره با سه حرف متوالی مثلاً **ابجـ** نامیده شده است

۲. با دستورات ریاضی امروزی داریم: $OA = r$ $OB = r'$ $O'A = \frac{r-r'}{2}$ پس: $P - P' = 2\pi(r - r') = 2P_1$ (P محیط دایرهٔ بزرگ‌تر، P' محیط دایرهٔ کوچک‌تر و P_1 محیط دایرهٔ واقع بین دو دایرهٔ مطوّق است). این قضیه در قضایای بعدی به‌کار رفته و اثبات آن به کمک «ترکیب نسبت» گفته شده است



۳. **ادجـ** یعنی محیط دایرهٔ **ادجـ**، که قطر آن **اجـ** است

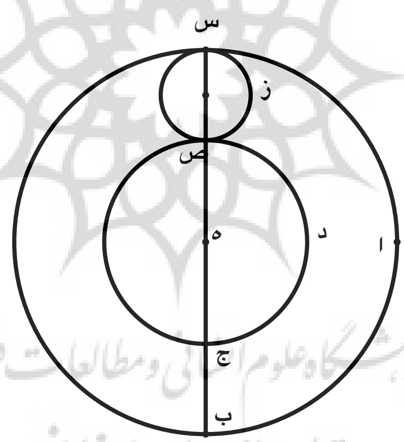
۴. طول قطر دایرهٔ **ادجـ**.

۵. طول قطر دایرهٔ **جـزه**.

۶. (اصول، ۷، تعریف ۱۴)، ترکیب نسبت یعنی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

قضیهٔ٤: ضرب قطر مطوّق یعنی **س‌ص** در نصف محیط‌های دو دایرهٔ متحدالمرکز یعنی **س‌اب** و **ص‌دجـ** برابر با مساحت مطوّق است [1]

[اثبات]: چون نصف [محیط] **س‌با** به اضافهٔ نصف [محیط] **ص‌جـد** برابر با [محیط] **س‌ص‌ز** است و ضرب نصف [محیط] **ص‌دجـ** در **ص‌ه**[2] همان مساحت **ص‌جـد** است و ضرب نصف [محیط] **س‌اب** در **ص‌ه** برابر با مساحت [**ص‌دجـ**] به اضافهٔ ضرب [محیط] **س‌زص در ص‌ه** است. و نسبت نصف [محیط‌های] **س‌اب**، **ص‌دجـ** برابر نسبت **س‌ه**، **ص‌ه است.** پس به تفضیل نسبت،[3] [نسبت دو برابر] **س‌ص‌ز** به **ص‌جـد** برابر نسبت **س‌ص** به **ص‌ه** است. پس **س‌ص‌ز در ص‌ه** برابر نصف **ص‌جـد** در **س‌ص** است. و ضرب نصف **س‌اب** در **ص‌ه** برابر است با **ص‌دجـ** به اضافهٔ **س‌زص** در **ص‌ه**. پس نصف **س‌اب** در **ص‌ه** با **ص‌دجـ** به اضافهٔ **س‌ص** در نصف **ص‌دجـ** برابر است. و **س‌ه** در نصف **س‌اب** برابر با مساحت **س‌با** است. پس نصف **س‌با** در **س‌ص** برابر است با سطح مطوّق **س‌ص** منهای ضرب نصف **ص‌دجـ** در **س‌ص.** پس ضرب نصف محیط‌های **س‌اب** و **ص‌دجـ** در **س‌ص** یعنی قطر مطوّق برابر با مساحت مطوّق است – آنچه می‌خواستیم [شکل٤].



[شکل٤]

---

۱. اگر $r - r'$ قطر مطوّق و S مساحت آن باشد، داریم :

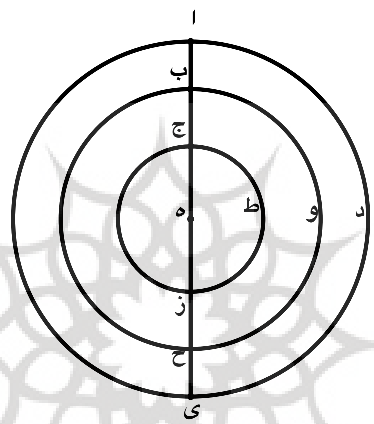
$$S = (r - r')\frac{1}{2}(2\pi r + 2\pi r') = \pi(r^2 - r'^2)$$

۲. **ص‌ه** نصف قطر دایرهٔ **ص‌جـد** است.

۳. (اصول، V، تعریف ۱۵)، تفضیل نسبت یعنی: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

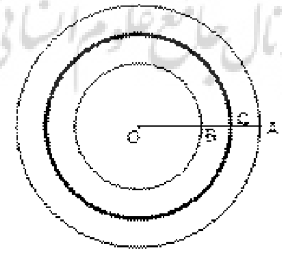
قضیهٔ۵: محیط دایرهٔ رسم شده در وسط سطح مطوّق **اجـ** با نصف محیط دو دایرهٔ آن مطوّق مساوی است.[۱]

چون [محیط] **ادی**[۲] به [محیط] **جـطز** مثل **ای**[۳] به **جـز** است و نسبت جزء به جزء برابر نسبت اضعاف به اضعاف است،[٤] پس **ای** به **جـز** برابر **اه** به **جـه** است. و به ترکیب نسبت، نبست **ادی** به اضافهٔ **جـزط** به **جـزط** برابر **از** به **جـه** است. پس نصف **ادی** به اضافهٔ **جـطز** به **جـطز** برابر **به** به **جـه** یعنی **بوح** به **جـطز** است. پس محیط **بوح** رسم شده بر **ب** وسط مطوّق **اجـ** برابر با نصف محیط دو دایرهٔ آن است. و آنچه می‌خواستیم [شکل۵].



[شکل۵]

۱. محیط دایرهٔ وسط (P_1) برابر است با: $P_1 = 2\pi\left(r' + \frac{r-r'}{2}\right) = \pi(r + r') = \frac{1}{2}(P + P')$ ($r\ r'$ و $P\ P'$) شعاع‌ها و محیط‌های دو دایرهٔ کوچک‌تر و بزرگ‌تر.



۲. **ادی** به معنای محیط دایره است.
۳. اندازهٔ قطر دایرهٔ **ادی**
٤. اصول، V، تعریف۵

قضیهٔ۶: می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که نسبت محیطش به محیط دایرهٔ مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.[۱]
نسبت خطی به قطر دایرهٔ مفروض را برابر نسبت مفروض قرار می‌دهیم. و بر آن دایره‌ای رسم می‌کنیم. پس نسبت محیط دو دایره برابر نسبت قطرهای دو دایره یعنی نسبت مفروض می‌شود – آنچه می‌خواستیم پدیدار می‌شود.
قضیهٔ۷: می‌خواهیم دو دایره رسم کنیم که نسبت محیط‌هایشان به محیط دایرهٔ مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.[۲]
پس مقدم نسبت را به دو قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم. و نسبت دو خط را به قطر دایرهٔ مفروض برابر نسبت دو قسمت مقدم نسبت به مؤخرش قرار می‌دهیم. و بر دو خط دو دایره رسم می‌کنیم. پس مطلوب از قضیهٔ ۲۴ از مقالهٔ ۵ اصول پدیدار می‌شود.[۳] و به این تدبیر ممکن است که سه دایره یا بیشتر رسم کنیم که نسبت مجموع محیط‌شان به محیط دایرهٔ مفروض برابر نسبت مفروض باشد – و آنچه می‌خواستیم.
قضیهٔ۸: می‌خواهیم دو دایره رسم کنیم که نسبت محیط آنها به محیط دو دایرهٔ مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.[۴]
دو دایره رسم می‌کنیم که نسبت یکی از آنها به یکی از دو دایرهٔ مفروض، برابر نسبت مفروض باشد و همچنین نسبت دو دیگر چنین باشد. پس نسبت دو دایرهٔ رسم شده به دو دایرهٔ مفروض برابر با نسبت یکی از آن دو به دایرهٔ نظیرش، یعنی نسبت مفروض است – و آنچه می‌خواستیم.
قضیهٔ۹: می‌خواهیم دو خط بیابیم که نسبت‌شان برابر نسبت دو دایرهٔ مفروض باشد.[۵]
پس برای قطرهایشان در نسبت، [کمیت] سومی می‌یابیم. پس نسبت اولی به سومی برابر مربع نسبت اولی به دومی است[۶] و آن دو [اولی و دومی] قطرهای دو دایره‌اند که

---

1. $\frac{P}{P'} = k \Rightarrow \frac{r}{r'} = k$
2. $\frac{P+P'}{P} = k$

۳. اگر نسبت یک کمیت اول به کمیت دوم مثل نسبت کمیت سوم به کمیت چهارم باشد و همچنین نسبت کمیت پنجم به کمیت دوم مثل نسبت کمیت ششم باشد به کمیت چهارم، نسبت مجموع اول و پنجم به دوم مثل نسبت مجموع سوم و ششم است به چهارم (اصول ص ۱۲۳) به بیان ریاضی یعنی

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{f}\ \frac{b}{c} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{d+e}{f}$$

۴. $\frac{P+P'}{P_1+P_2} = k$ (اصول، V، قضیهٔ ۱۲)

5. $\frac{a}{b} = \frac{S}{S'}$.

نسبت آنها برابر نسبت [محیط‌های] دو دایره است. پس سومی و یکی از دو قطر همان دو خط خواسته شده‌اند.

قضیهٔ۱۰: می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که نسبتش به دایرهٔ مفروض برابر نسبت مفروضی باشد.

پس در نسبت، [کمیت] وسطی را بین دو حد نسبت مفروض اخراج می‌کنیم. و نسبت یک خط به قطر [دایرهٔ] مفروض را برابر نسبت اولی از دو حد نسبت به وسطیِ نسبت قرار می‌دهیم. و بر خط، دایره‌ای رسم می‌کنیم. پس آن [دایرهٔ] مطلوب باشد. و برهانش پدیدار است.

قضیهٔ۱۱: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی دو دایرهٔ مفروض **جـ** و **ه** رسم کنیم.[1]

پس **اب** [و] **حص** را بر اساس نسبت آن دو دایره می‌یابیم. آنگاه به ترکیب نسبت، نسبت **جـ** به **ه** برابر با نسبت **اب** به **حص** است، ولیکن **بع** برابر آن دو[2] به **حص** است. و **د** را [کمیت] وسطی[3] بین **عب** [و] **حص** خارج می‌کنیم. و نسبت [قطر] **ط**[4] به قطر **ه** را برابر نسبت **عب** به **د** قرار می‌دهیم. و بر **ط** دایره‌ای رسم می‌کنیم. همان مطلوب باشد. زیرا نسبت **ج** [به اضافهٔ] **ه** به **ه** مثل نسبت **عب** به **حص** یعنی مربع نسبت **عب** به **د** است. و نسبت قطر **ط** به قطر **ه** برابر نسبت **عب** به **د** است. پس مربع نسبت قطر **ط** به قطر **ه** یعنی نسبت دایرهٔ **ط** به دایرهٔ **ه** برابر مربع نسبت **عب** به **د**، یعنی نسبت دو دایرهٔ **جـ** [و] **ه** به دایرهٔ **ه** است. پس دایرهٔ **ط** برابر دو دایرهٔ **جـ** و **ه** است– و آنچه می‌خواستیم [شکل٦].

---

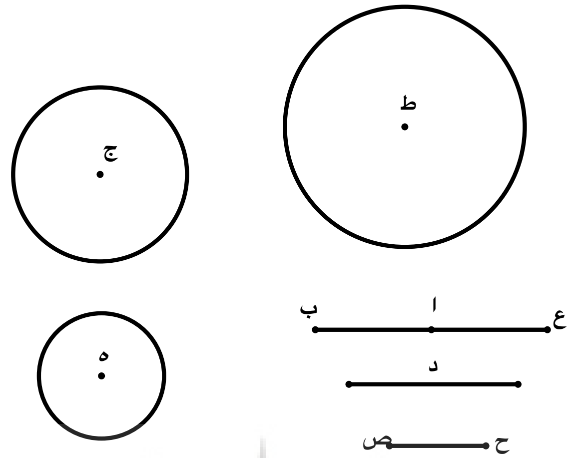
٦. وقتی سه کمیت به طور پیوسته متناسب باشند، نسبت اولی به سومی هم‌چون مربع نسبت اولی به دومی است (اصول، V، تعریف ۹) یعنی برای سه مقدار a، b، c داریم: $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ یا $b^2 = a\,c$.

۱. اینجا هدف رسم دایره‌ای است که مساحتش با مساحت دو دایرهٔ مفروض برابر باشد .

۲. یعنی **اب** به اضافهٔ **حص**

۳. نکـ: توضیح قضیهٔ ۹، تناسب پیوسته

٤. **ط** نام دایره است.



[شکل۶]

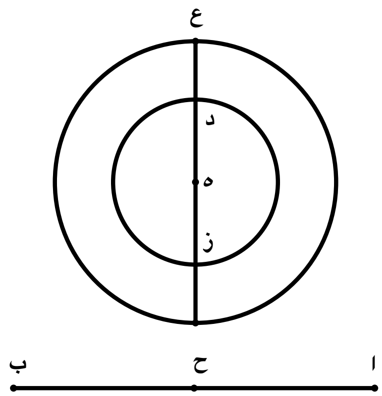
قضیهٔ۱۲: می‌خواهیم دایره‌ای برابر سه دایرهٔ [متمایز] رسم کنیم.

پس دایره‌ای را برابر دو تا از آن دایره‌ها رسم می‌کنیم. سپس دایرهٔ دیگری برابر این دایرهٔ رسم شده با دایرهٔ سومِ باقی‌مانده رسم می‌کنیم – آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ۱۳: می‌خواهیم به دایرهٔ مفروض **دز** مطوّقی برابر خودش و هم‌صفحه با خودش بیفزاییم [1]

پس مربع نسبت **اب** به **دز** را برابر دو به یک قرار می‌دهیم. و [**اب**] را بر **ح** نصف می‌کنیم. و بر **ه** مرکز [دایرهٔ] **دز** به بُعد **حا** دایرهٔ **ع** را رسم می‌کنیم. پس چون مربع نسبت **اب** به **دز** یعنی مربع نسبت **اح** یا **عه** به **هز** یعنی نسبت [مساحت] دایرهٔ بزرگ به دایرهٔ کوچک برابر نسبت دو به یک است، پس [دایرهٔ] بزرگ دو برابر [دایرهٔ] کوچک است. پس مطوّق برابر [دایرهٔ] کوچک است – و آنچه می‌خواستیم [شکل۷].

1. $\pi(r^2 - r'^2) = \pi r'^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}r' \Rightarrow \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \frac{2}{1}$



[شکل۷]

قضیهٔ۱٤: می‌خواهیم بر دایرهٔ مفروضی مطوّقی رسم کنیم که به آن محیط و با دایرهٔ مفروض دیگری مساوی باشد.

پس دایره‌ای مساوی دو دایرهٔ مفروض رسم می‌کنیم و بر مرکزی که می‌خواهیم بر آن دایره‌ای مساوی دایرهٔ رسم شده رسم می‌کنیم. آنچه می‌خواستیم با کمی تأمل پدیدار می‌شود .

قضیهٔ۱۵: می‌خواهیم بر دایرهٔ مفروض مطوّقی مساوی دو دایرهٔ مفروض رسم کنیم .

پس دایره‌ای مساوی با دوایر سه‌گانه رسم می‌کنیم و بر مرکزی که می‌خواهیم بر آن دایره‌ای مساوی دایرهٔ رسم شده رسم می‌کنیم. آنچه می‌خواستیم پدیدار می‌شود .

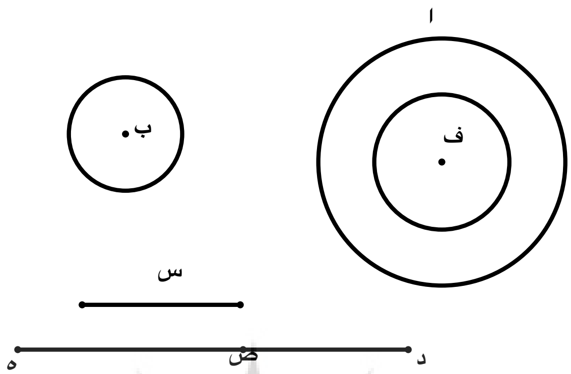
قضیهٔ۱٦: دو دایره مفروض است، می‌خواهیم از دایرهٔ بزرگ‌تر برابر **ا**، سطح مطوّقی مساوی دایرهٔ کوچک‌تر برابر **ب** جدا کنیم.

پس نسبت **ده** به **س** را برابر **ا** به **ب** قرار می‌دهیم. و **دص** را برابر **س** جدا می‌کنیم و بر مرکز **ا** دایرهٔ **ف** را رسم می‌کنیم. نسبتش [نسبت دایرهٔ ف] به **ب** مثل نسبت **صه** به **س** است. پس چون نسبت **ف** به **ب** برابر نسبت **صه** به **س** یعنی **دص** است پس به عکس نسبت،[1] نسبت **ب** به **ف** برابر نسبت **دص** به **صه** است. و نسبت **ا** به **ب** برابر **ده** به **س** است. پس به نسبت مساوات [منتظم]،[2] نسبت **ا** به **ف** رسم شده در آن مثل نسبت **ده** به **هص** است. و به تفضیل نسبت، نسبت سطح مطوّق محیط به **ف** به **ف** برابر **دص** به **صه** یعنی **ب** به **ف**

۱. صول، ۷، تعریف ۱۳

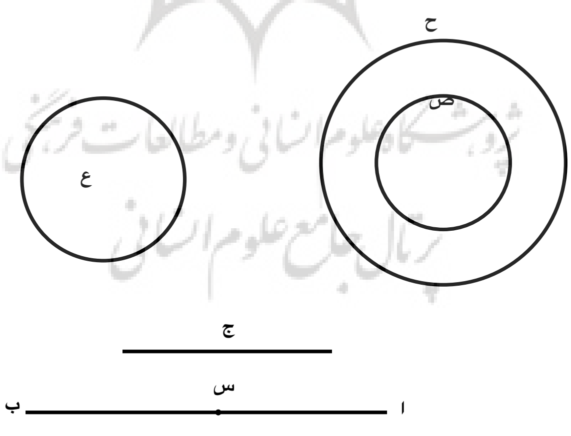
۲. نسبت مساوات منتظم یا نسبت مساوات هموار (اصول، ۷، تعریف ۱۷):
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,\frac{b}{e}=\frac{d}{f}\Rightarrow\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$

است. پس سطح مطوّق محیط به **ف** با **ب** مساوی می‌شود – و آنچه می‌خواستیم [شکل۸].



[شکل۸]

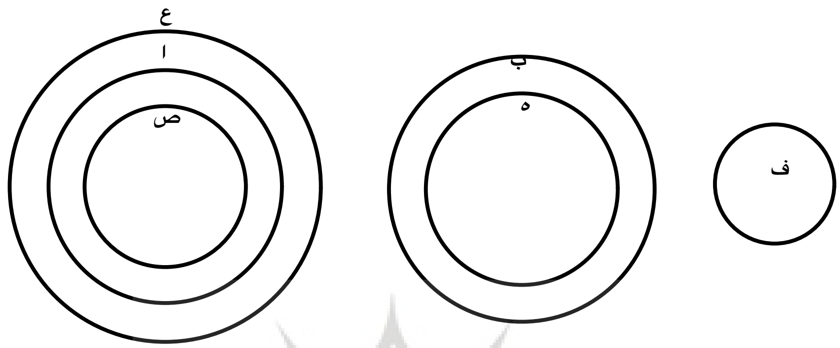
قضیهٔ۱۷: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی سطح مطوّق **حص** رسم کنیم.
پس نسبت **اب** به **جـ** را برابر نسبت **ح** به **ص** قرار می‌دهیم و **بس** را برابر **جـ** جدا می‌کنیم و دایرهٔ **ع** را رسم می‌کنیم به طوری‌که نسبت دایرهٔ **ع** به **ص** برابر نسبت **اس** به **جـ** باشد. پس چون **اب** به **جـ** یعنی **سب** برابر با **ح** به **ص** است، به تفضیل نسبت، نسبت [مساحت] مطوّق به **ص** برابر **اس** به **جـ**، یعنی **ع** به **ص** است. پس **ع** برابر سطح مطوّق است – و آنچه می‌خواستیم [شکل۹].



[شکل۹]

قضیهٔ۱۸: می‌خواهیم دایره‌ای مساوی سطح دو مطوّق **اص** [و] **به** رسم کنیم.

پس مطوّق **عا** را برابر مطوّق **به** به دایرهٔ **ا** می‌افزاییم. و دایرهٔ **ف** را مساوی مطوّق **عص** رسم می‌کنیم. پس آن دایرهٔ مطلوب است. و برهانش پدیدار است. و آنچه می‌خواستیم رسم کنیم [شکل۱۰].



[شکل۱۰]

مقالهٔ اول از کتاب احمدبن عمر کرابیسی در مساحت حلقه‌ها تمام شد. این مقاله شامل ۱۸ قضیه بود [1].

مقالهٔ دوم از کتاب مساحت حلقه‌ها

[مقدمه]: حلقهٔ دایره‌ای ضخیم [چنبره]، شکل مجسمی است که سه دایره به آن محیطند، یکی به ضخامتش[2] و دو دایرهٔ دیگر در صفحه‌ای که از داخل و خارج به دورش محیطند و به دو طرف قطر اولی[3] مماسند. و حلقهٔ مربعی ضخیم [چنبروار]، شکل مجسمی است که به ضخامتش مربعی محیط[4] است و به دورش دو دایره که به دو طرف ضلع مربع یا دو طرف قطر مربع مماسند.

قضیهٔ۱: هر سطح مستقیمی که در دو خط مختلف ضرب شود آنگاه نسبت یکی از دو مجسم ایجاد شده از آن به مجسم دیگر برابر نسبت قاعدهٔ آن است که به سطح مفروض بر خط مستقیمی برخورد می‌کند، به قاعده‌ای که با آن در یک صفحه از مجسم دیگر

۱. تمت المقالة الاولی من کتاب احمدبن عیسی الکرابیسی في مساحة الحلق و هی ثمانية عشر شكلا والحمد لله رب العالمين] ف ۱
۲. یعنی دایرهٔ مولد حلقه
۳. دایرهٔ مولد
٤. یعنی مولد این حلقه یک مربع است

است [۱] این همان دعوی قضیهٔ بیست و پنجم از مقالهٔ یازده اصول فقط با عبارتی دیگر است. و برهانش دقیقاً همان برهان مذکور در آن قضیه است

قضیهٔ۲: نسبت مجسم حادث از ضرب خط در سطح، به مجسم حادث از ضرب آن در قسمتی از سطح، برابر نسبت سطح است به قسمتی از آن مضروب در خط.

و برهانش پدیدار است. چون در حقیقت بیانی از قضیهٔ قبل است.

قضیهٔ۳: در هر حلقهٔ مربعة الغلظ مثل **اب**، ضرب نصف محیط‌های دو دایره‌اش یعنی **ا** [و] **ب** در [مساحت] مربع محیط به ضخامتش[۲] یعنی **اجـ**[۳] همان مساحت[۴] [جرم یا حجمش[۵]] است [۶]

وقتی **اب** را بر **ک** نصف کنیم و بر **ه** مرکز دو دایره، دایرهٔ **ک** را رسم کنیم، پس محیط **ک** در **اب** همان مساحت مطوّق است.[۷] و **جـب** عمود بر سطح مطوّق **اب** است. پس **جـب** [ضرب] در سطح مطوّق **اب** همان مساحت [جرم] حلقه است. و **اب** ضرب در **بجـ** مربع **اجـ**[۸] است و [اب ضرب] در محیط **ک** سطح مطوّق است. پس نسبت سطح مطوّق به مربع **اجـ** برابر محیط **ک** به **بجـ** است. پس محیط **ک** در مربع **اجـ** برابر **بجـ** در سطح مطوّق **اب** یعنی مساحت [جرم] حلقه است. پس محیط **ک** [ضرب] در [مساحت مربع] **اجـ** برابر مساحت [جرم] حلقه است. و محیط دو دایرهٔ **ا** [و] **ب** دو برابر محیط **ک** است. پس نصف محیط دو دایرهٔ **ا** و **ب** در [مساحت] مربع **اجـ** همان مساحت [جرم] حلقه است – و آنچه می‌خواستیم [شکل۱۱].

۱. هر سطح مستقیمی که در دو خط مختلف ضرب شود دو متوازی‌السطوح پدید می‌آید. اگر جسم متوازی‌السطوحی با صفحه‌ای موازی با دو وجه روبه‌رو بریده شده باشد، نسبت قاعده به قاعده در دو جسم حاصل، چون نسبت جسم یکی به جسم دیگری است (اصول، XI، قضیهٔ۲۵).

۲. یعنی مربع مولد

۳. یعنی مربعی که **ا** و **جـ** دو رأس مقابل آن است.

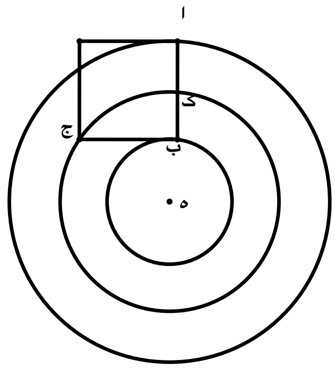
٤. در این قضیه منظور از مساحت حلقه، مساحت جرم حلقه یا حجم آن است

۵. از دو قضیهٔ قبلی و محتوای قضیه اخیر نتیجه می‌شود که بحث بر سر جسم و حجم است.

٦. حجم حلقهٔ مربعة الغلظ برابر است با محیط دایرهٔ میانی در مساحت مربع مولد ($r\,r'$ شعاع دایره‌های درونی و بیرونی حلقه و a ضلع مربع مولد): $S = (\pi r + \pi r')\,a^2$

۷. قضیهٔ ٤ رسالهٔ اول

۸. «مربع **اجـ**» یعنی مربعی که دو رأس مقابل آن **ا** و **جـ** باشد و منظور توان دوم **اجـ** نیست.

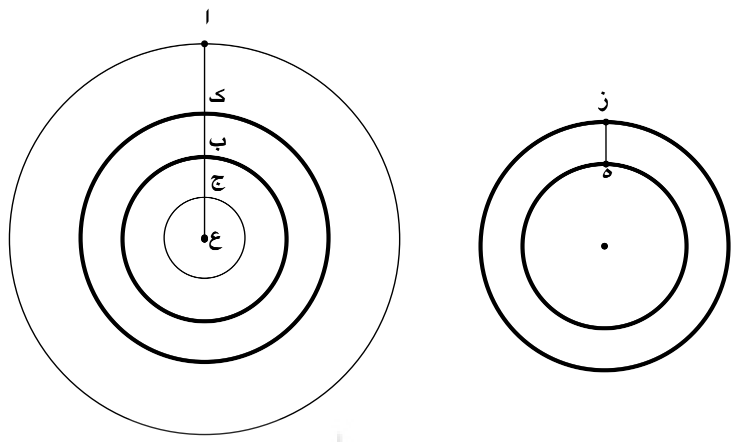


[شکل۱۱]

قضیهٔ٤: بزرگ‌ترین سطح مطوّقی که دور حلقهٔ مستدیرة الغلظ را قطع می‌کند برابر **اجـ** است، که همان سطح مطوّق محیط به دو دایرهٔ حلقه یعنی [دوایر]**ا** و **جـ** است. و به قطر دایرهٔ محیط به ضخامت آن[1] مماس است و آن همان سطح **اجـ** است

چون در غیر این‌صورت سطحی کوچک‌تر[2] از **اجـ** برابر **هز** را قطع می‌کند. همان‌طور که پیش‌تر در مقدمهٔ رساله گفتیم معلوم است که اگر قطر **هز** از قطر **اجـ** کوچک‌تر باشد، آنگاه دایرهٔ **ه** بزرگ‌تر از دایرهٔ **جـ** (برابر **ب**) و دایرهٔ **ز** کوچک‌تر از دایرهٔ **ا** (برابر **ک**) است [3] و مرکز هر دو [دایرهٔ **ب** و **ک**] همان ع مرکز **اجـ** است. پس **بک** برابر **هز** می‌شود. پس سطح **بک** که جزیی از سطح **اجـ** و برابر سطح **هز** است، بزرگ‌تر از کل سطح **اجـ** می‌شود. این خُلف است. پس حلقهٔ **اجـ** سطحی بزرگ‌تر از [مطوّق] **اجـ** را قطع نمی‌کند – و آنچه می‌خواستیم [شکل۱۲].

۱. یعنی دایرهٔ مولد
۲. نسخه: بزرگ‌تر
۳. یعنی دایرهٔ **ه** را برابر **ب** و دایرهٔ **ز** را برابر **ک** در نظر می‌گیریم (در شکل دوایر سمت چپ را ببینید).



[شکل۱۲]

قضیه۵: در هر حلقهٔ مستدیرة الغلظ[1] مثل **اجـ**، ضرب نصف محیط دو دایرهٔ آن یعنی **ا** و **جـ** در [مساحت] دایرهٔ محیط به ضخامت آن[2] که همان دایرهٔ **اجـ** است، همان مساحت [جرم یا حجمش] است.[3]

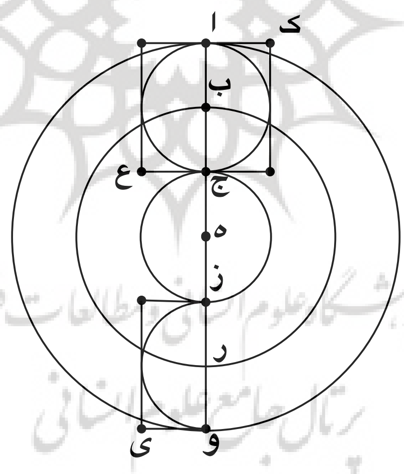
وقتی بر دایرهٔ **اجـ**، مربع **کع**[4] را محیط می‌کنیم و **اجـ** را در [نقطهٔ] **ب** نصف می‌کنیم و به مرکز حلقه و به شعاع **هب** دایرهٔ **ب** را رسم می‌کنیم و نیم‌دایرهٔ **زو** و نصف مربع که همان **زی** است را رسم می‌کنیم، آنگاه مطوّق **اجـ**، حلقهٔ مستدیرة الغلظ و حلقهٔ مربعة الغلظی که از داخل و خارج دو دایره **ا** [و] **جـ** به آن و به ضخامتش یعنی مربع **کع** محیط است را نصف می‌کند. پس مجسمی که قاعده‌اش **او** باشد و نصف دایرهٔ **اجـ** به ضخامتش محیط باشد، نصف حلقهٔ مستدیر الغلظ **اجـ**[5] است. و مجسمی که قاعده‌اش **او** است و نصف مربع **کع** به ضخامتش محیط باشد، نصف حلقهٔ مربعة الغلظ[6] است. پس، از ضرب **او** در دو سطح مختلف، دو مجسم تشکیل می‌شود، یکی مجسمی که ضخامتش محیط به سطح **زی**[7]

---

۱. چنبره
۲. دایرهٔ مولد
۳. طبق قضیهٔ ۲ پاپوس، حجم چنبره برابر است با $A = (\pi r^2)(2\pi R)$، پس طبق قضیهٔ ۵ رسالهٔ اول مساحت الحلق، دستور کرابیسی برای حجم چنبره چنین است:
$S = \frac{1}{2}(P + P')\,\pi r^2$ که در آن $\frac{1}{2}(P + P') = 2\pi R$.
٤. مربعی که **ک** و **ع** دو رأس مقابل آن است
۵. یعنی چنبره‌ای که از وسط دو قسمت شده و سطح مقطع آن مطوّق **اجـ** است (موّلد دایره).
٦. یعنی چنبرواری که از وسط دو قسمت شده و سطح مقطع آن مطوّق **اجـ** است (موّلد مربع).
۷. **زی** مستطیلی است که دو رأس مقابلش **ز** و **ی** است

است و دیگری مجسمی که ضخامتش محیط به سطح نیم‌دایرهٔ **زو** است. پس نسبت اولی به دومی برابر نسبت [مستطیل] **زی** به نیم‌دایره **زو** است. و چون نسبت جزء به جزئی که نام بردیم برابر نسبت چند برابر به چند برابر است، نسبت [حلقهٔ] مربعة الغلظ به [حلقهٔ] مستدیرة الغلظ برابر نسبت [مجسم] محیط به **او** و **زی**، به [مجسم] محیط به **او** و نیم‌دایرهٔ **زو** است، و این برابر نسبت **زی** به نیم‌دایرهٔ **زو** و برابر نسبت مربع **کع** به دایرهٔ **اجـ** است. پس نسبت دو حلقه برابر نسبت مربع **کع** به دایرهٔ **اجـ** است. و محیط **ب** در [مساحت] **کع** همان مساحت [جرم ۱] [حلقهٔ] مربعة الغلظ است. پس نسبت [حلقهٔ مربعة الغلظ] به مجسمی که از ضرب **ب** در دایرهٔ **اجـ** تشکیل می‌شود برابر نسبت مربع **کع** به دایرهٔ **اجـ** یعنی نسبت مربع به مدور است، پس نسبت مربع به مدور برابر نسبت آن[2] به مجسمی است که از **ب** در دایرهٔ **اجـ** تشکیل می‌شود. پس ضرب محیط **ب** که آن نصف محیط دو دایرهٔ **ا** و **جـ** است در دایرهٔ **اجـ** همان مساحت [جرم] حلقهٔ مستدیرة الغلظ است – و آنچه می‌خواستیم [شکل۱۳].

و یافت شده است که نصف محیط دو دایرهٔ محیط به حلقهٔ مستدیرة الغلظ همان عمود مستدیر در دور جسمش است.[3]



[شکل۱۳]

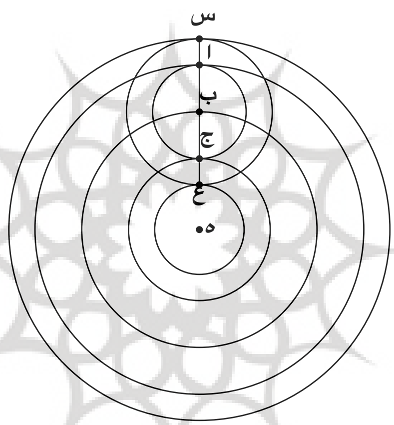
---

۱. مساحت جرم = حجم

۲. مجسم یا حلقهٔ مربعة الغلظ

۳. یعنی اگر حلقه را از مقطع دایرهٔ مولّدش ببریم و باز کنیم، به یک استوانه با قاعدهٔ دایرهٔ مولد و ارتفاع نصف محیطِ دو دایرهٔ درونی و بیرونی تبدیل می‌شود.

قضیهٔ٦: می‌خواهیم به ضخامت حلقهٔ مفروض **اجـ** زیادتی مساوی آن بیفزاییم.
پس قطر **اجـ** محیط به آن را بر **ب** نصف می‌کنیم و بر آن دایرهٔ [**سع**] را مساوی با دو برابر دایرهٔ **اجـ** در همان صفحه رسم می‌کنیم. و باید محیط دایرهٔ **سع** از نصف محیط‌های دو دایرهٔ **ا** و **جـ** کوچک‌تر باشد. و به مرکز **ه**، مرکز دو دایرهٔ [**ا** و **جـ**]، دو دایره رسم می‌کنیم که بر دایرهٔ **سع** مماس باشند. این ما را به مطلوب می‌رساند. چون **سع** دو برابر **اجـ** است، پس ضرب محیط **ب** در [مساحت] دایرهٔ **سع** همان مساحت [جرم] حلقهٔ محیط به دایرهٔ **سع** است و برابر ضرب آن[1] در دو برابر دایرهٔ **اجـ** است. پس در ضخامت[2] حلقهٔ **اجـ** زیادتی برابر آن[3] افزوده‌ایم. و به این تدبیر ممکن است که بر حلقهٔ مفروض زیادتی برابر هر نسبتی که می‌خواهیم بیفزاییم [شکل۱٤].



[شکل۱٤]

قضیهٔ۷: می‌خواهیم از ضخامت حلقهٔ مفروض، نقصانی مساوی نصف آن بکاهیم.[4]
و برهانش عکس برهان قضیهٔ قبل است، برای این کار از حلقهٔ محیط به ضخامت آن مطوّقی مساوی با نصف محیط جدا می‌کنیم و سه دایرهٔ دیگر رسم می‌کنیم. و آنچه می‌خواهیم را بر عکس روش قضیهٔ قبل بیان می‌کنیم – آنچه می‌خواستیم.
مقالهٔ دوم پایان یافت.

---

۱. محیط ب
۲. دایرهٔ مولد
۳. دایرهٔ مولد
٤. یعنی می‌خواهیم مساحت دایرهٔ مولد حلقهٔ مفروضی را نصف کنیم.

منابع

ابن ندیم. (۱۳۸۱ش). الفهرست. (م. رضا تجدد، مترجم). تهران: اساطیر.

البغدادی، اسماعیل پاشا. (۱۹۵۱م). هدية العارفين أسماء المؤلفين و آثار المصنفين (جلد ۱، چاپ سوم). استانبول.

ابن هیثم. (بدون تاریخ). شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (نسخهٔ خطی). کتابخانهٔ ملی رشت، C81.

ابن‌هیثم، محمد بن حسن. عزب احمد؛ فؤاد احمد. (۱۴۲۶ق). شرح مصادرات کتاب اقلیدس قاهره- مصر: دارالکتب و الوثائق القومية. الإدارة المركزية للمراكز العلمية. مركز تحقيق التراث.

ایوز، هاوارد دبلیو. (۱۳۶۹ش). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول، محمدقاسم وحیدی اصل، مترجم، چاپ سوم). تهران: مرکز نشر دانشگاهی

حاجی خلیفه. (۲۰۱۲م). کشف الظنون عن اسامی الکتب والفنون (مجلد ۱ و ۶، طبعة الاولی). مؤسسة الفرقان

قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵ش). زندگی نامهٔ ریاضی دانان دورهٔ اسلامی (چاپ دوم). تهران.

قفطی. (۱۹۰۸م). تاریخ الحکما. لیپزیگ

کحالة، عمر رضا. (۱۹۹۳م). معجم المؤلفين (الجزء الثانی). مؤسسة الرسالة

کرابیسی. (بدون تاریخ). شرح مشکل صدور مقالات کتاب اقلیدس (نسخهٔ خطی). کتابخانهٔ ملی رشت، C81.

کرابیسی. (بدون تاریخ). مساحة الحلق (نسخهٔ خطی). آکسفورد (I91/2a)؛ دانشگاه تهران ۱۷۹۰/۲، ۲۴۳۲/۱۴، جارالله ۱۵۰۲/۱۱، ایاصوفیه ۲۷۶۰.

دایرة المعارف مؤلفان اسلامی. (بدون تاریخ). مقالهٔ «احمد کرابیسی» (ج ۲، ص ۱۱۷). پژوهشگاه فرهنگ و معارف اسلامی

همایی، جلال‌الدین. (۱۳۴۶). خیامی نامه (جلد۱، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی). تهران

هیث. (۲۰۰۰). اصول اقلیدس (محمدهادی شفیعی‌ها، مترجم). تهران: مرکز نشر دانشگاهی

Arabic Catalogue Khudabaksh Library, Vol. 22, pp. 25-27. Retrieved from https://kblibrary.bih.nic.in/

Bessel-Hagen, E., & Spies, O. (1931). Das Buch über Ausmessung der Kerisringe des Aḥmad ibn ʿOmar al-Karābīsī. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Band 1*, 502-540. Berlin.

Brentjes, S. (2000). Aḥmad Al-Karābīsī's commentary on Euclid's Elements. In M. Folkerts & R. Lorch (Eds.), *Sic itur ad astra: Studien zur Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften - Festschrift für den Arabisten Paul Kunitzsch zum 70*. Geburtstag (pp. 31-75). Harrassowitz.

Brockelmann, C. (1997). Al-Karābīsī. In *Encyclopaedia of Islam* (2nd ed., Vol. 4, p. 596). Leiden: E.J. Brill.

Heath, T. L. (1921). *A history of Greek mathematics II*. Oxford.

Rosenfeld, B., & Ihsanoglu, E. (2003). *Mathematicians, astronomers, and other Islamic scholars* … (7th-19th c.). Istanbul.

Sezgin, F. (1974). *Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V*. Leiden, E. J. Brill.

The Arabic version of Euclid's *On Division*. In M. Folkerts & J. P. Hogendijk (Eds.), *Vestigia Mathematica: Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard* (pp. 143-162). Amsterdam: Rodopi.

Von Solomon Gandz. (1933). Bemerkungen zum, Buch über die Ausmessung der Ringe des Aḥmad ibn ʿOmar al-Karābīsī. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Band 2*, 98-105. Berlin.

پیوست: تصحیح رسالهٔ مساحة الحلق کرابیسی

بسم الله الرحمن الرحيم[1]

المقالة الأولى من كتاب أحمد بن عمر الكرابيسي[2] في مساحة الحلق[3]

[صدر]: فضل إحدي الدائرتين المتوازيتين في سطح على الاخرى أُسِمّى سطحًا مطوّقًا و فضل نصف قطر العظمى على نصف قطر الصغرى قطره.[4]

[١[5]] كل أربعة مقادير كانت نسبة الأول في الثالث **كا** في جـ و هو **هـ** إلي الثانى في الرابع **كَب** في **د** و هو **و** كنسبة الأوّل إلي الثانى مُثَناة أي **ا** إلى **ب**. فإنّ الأول إلى الثانى كالثالث إلى الرابع.

فليكن مربعا **ا**، **ب**؛ **ز**، **ح**[6] **فـز** إلى **ح**، **كا** إلى **ب**[7] مُثَناة التي هي كـ[8]**هـ** إلى **و**. فبالابدال **هـ** إلى **ز كـو** إلى **ح**. ولأنّ **ا** ضرب في نفسه و في **جـ** فكان **ز**، **هـ**[9]. **فـ**[10]**هـ** إلى **ز كـجـ** الى **ا**. **فـو** إلى **ح كـجـ** إلى[11] **ا**. و **ب** ضرب في نفسه و في **د** فكان **ح**، **و**. **فـو** إلى **ح** أعني **جـ** إلى **ا كـد** إلى **ب**. فبالابدال **جـ** إلى **د**، **كا** إلى **ب** - وهوالمراد [شكل١].

[٢] كل دائرتين **كاجـ**، **بـد** فإنّ نسبة محيط أحدهما إلي محيط الأخرى[12] **كـجـ** إلى **د** كنسبة قطرها إلى قطرها **كا** إلى **ب**.

لأنّ نصف **ا** في نصف **جـ** هو تكسير **اجـ**، **فـا** في **جـ** هو أربعة امثال **اجـ**. وكذا **ب** في **د** أربعة أمثال **بـد**. و **اجـ** إلى **بـد**، **كا** إلى **ب** مُثَناة. و نسبة الأجزاء إلي الأجزاء السمية لها كنسبة الأضعاف، فأربعة

١. به العون يا كريم] + آ؛ بسم الله الرحمن الرحيم] – ج، –ت، –د٢
٢. رحمه الله] + ﻻ
٣. براى پرهيز از تكرار، شكل‌ها فقط در ترجمهٔ رساله آمده است
٤. قطره] – ج
٥. در نسخهٔ ﻻ و د٢ هر بند با حروف ابجد مشخص شده است
٦. يعنى مربع ا برابر ز و مربع ب برابر ح باشد؛ ا، ب؛ ز، ح] **ابدح**:آ
٧. كـا إلي ب] –آ
٨. نسبة] + ج
٩. كـا إلي **ب**] –آ
١٠. ف] ك: آ
١١. فـو إلي ح كـجـ إلي] – د١، – ج
١٢. الاخرى] آخر: ج

أضعاف **اجـ** إلى أربعة أضعاف **بد** كا إلى **ب** مُثَناة. **فا**، **ب**، **جـ**، **د**[1] أربعة مقادير نسبة مسطح[2] الأول في الثالث إلى مسطح الثانى في الرابع كالأول إلى الثاني مُثَناة. فقطر **ا** إلى قطر **ب** كمحيط **جـ** إلى محيط **د** - وهوالمراد [شكل۲].

[۳] فضل محيط أعظم المتوازيتين في بسيط مستو **كاحب** على محيط الأصغر **كجزه** مساو لِضِعف محيط الداير‌ة الواقعة في البسيط المطوّق بينهما **كادجـ** .

لأن **ادجـ** إلى **جزه**[3] **كاجـ** إلى **جه**، فضعف **اجـ** إلى **جه**[4] كضعف /ص۱۳۷/ **ادجـ** إلى **جزهـ** .[5] فبالتركيب **اب** إلى **جه** أعني **ابح** إلى **جزهـ**[6] كضعف **اجد** مع **جهز** إلى **جهز**.[7] فضعف **اجد** مع **جهز** يساوي **ابح**. فزيادة **ابح** على **جهز** لضعف[8] محيط **اجد** - وهو المطلوب [شكل۳].

[٤] ضرب قطر المطوّق **كس‌ص** في نصف محيطي[9] دائرتيه **كساب**، **صدجـ** تكسيره.

لأن نصف **سبا** يزيد[10] على نصف **صجد بس‌صز**. وضرب نصف **صدجـ** في **صه** هو تكسير **صجه**. وضرب نصف **ساب**[11] في **صه** يزيد على تكسيرها [**صدجـ**] بضرب **سزص**[12] في **صه**. ونسبة نصفي **ساب**،[13] **صدجـ** كنسبة **سه**،[14] **صه**. فبالتفضيل **س‌صز** إلى **صجد** **كس‌ص** إلى **صه**. **فس‌صز** في **صه** كنصف **صجد** في **س‌ص**. وقد زاد ضرب نصف **ساب** في **صه** على **صدجـ** **بسزص**[15] في **صه**. فنصف **ساب** في **صه** يزيد على **صدجـ** **بس‌ص** في نصف **صدجـ** . **وسه** في نصف **ساب** مساو لتكسير **سبا**. فنصف **سبا** في **س‌ص** ينقص عن مطوّق **س‌ص**

---

۱. در تصحیح بسل هاگن اینجا نوشته شده است: **اب، جـد**
۲. مسطح] سطح: آ
۳. **جـزه**] **جـده**: آ
٤. **اجـ إلي جـه**] – ج
۵. **جـزه**] **جـده**: آ
٦. **جـزه**] **جـهز**: د۱
۷. **جـهز**] – ج
۸. لضعف] بضعف: آ، **٢**، فضعف:ج
۹. محیطی] محیط: ت
۱۰. یزید] نزید: د۲
۱۱. **ساب**] **صاب**: آ
۱۲. **سزص**] **سدص**: آ
۱۳. **ساب**] **صاب**: آ
١٤. **سه**] **س‌صه**: آ
۱۵. **سزص**] **س‌صز**: د۱

بضرب نصف **صدجـ** في **سص**. فضرب نصف محيطي **ساب** و **صدجـ** في **سص** قطر المطوّق يساوى تكسيره - وهوالمراد[١] [شكل٤].

[٥] محيط الدائرة المرسومة في منتصف السطح المطوّق كاج مساو لنصف محيطي دائرتيه.

لأنّ **ادى**[٢] إلى **جطز كاى**[٣] إلى **جز** ونسبة الجزء[٤] إلى الجزء[٥] كنسبة الأضعاف إلى الأضعاف[٦] السميه **فاى**[٧] إلى **جز** كاه إلى **جه**. وبالتركيب **ادى**،[٨] **جزط**[٩] إلى **جطز** كاز إلى **جه**. فنصف **ادى**،[١٠] **جطز** إلى **جطز** كبه[١١] إلى **جه** أعني **بوح**[١٢] إلى **جطز**. فمحيط **بوح** المرسومة[١٣] على **ب** منتصف[١٤] مطوّق **اجـ** يساوي نصفي[١٥] محيط دائرتيه - و ذلک ما أردناه [شكل٥].

[٦] نريد أن نعمل دايرة يكون نسبة محيطها إلى محيط دائرة المفروضة[١٦] كنسبة مفروضة. فنجعل نسبته خط ما إلى قطر الدايرة المفروضة كالنسبة المفروضة. ونرسم عليه دائرة فلكون المحيطين على نسبته القطرين أعنى المفروضة - يظهر المطلوب.

[٧] نريد أن نعمل دائرتين تكون نسبة محيطها إلي محيط دائرة مفروضة كنسبة مفروضة.

فنقسم مقدم النسبة بقسمين كيف[١٧] اتّفق و نجعل نسبة خطين إلى قطر الدائرة المفروضة كنسبة قسمي مقدم النسبة إلى مؤخرها. ونرسم[١٨] على الخطين دائرتين فيظهر المطلوب من شكل كد من مقالة ه[١٩] من

---

١. المراد] مطلوب: آ،ت
٢. **ادى**] **ادب**:ج
٣. **ى**] **ب**:ج
٤. الجزء] الجز: ت
٥. الجزء] الجز: ت
٦. الى الاضعاف] +ج
٧. **ى**] **ب**:ج
٨. **ى**] **ب**:ج
٩. **جـزط**] **جـطز**: د١
١٠. **ادى**] **اى ب**:ج
١١. كنسبة **حه**] **ه**،ج
١٢. **بوح**] **بزح**: آ
١٣. المرسومة] الموسومة: آ،ج
١٤. منتصف] منصف: ج
١٥. نصفي] نصف: آ، ت
١٦. المفروضة] مفروضة: آ
١٧. ما] +ج
١٨. نرسم] يرسم: ج
١٩. قضيه ۲۴ از مقالهٔ ۵ اصول اقليدس

الأصول. و بهذا التدبير يمكن أن نعمل ثلاثة دوائر أو أكثر يكون نسبة مجموع محيطاتها إلى محيط دائرة مفروضة كنسبة مفروضة - وهوالمراد.

[٨] نريد أن نعمل دائرتين تكون نسبة محيطها إلى محيطي دائرتين مفروضتين كنسبة مفروضة.
فنعمل دائرتين تكون نسبة إحديها إلى إحدي المفروضتين النسبة المفروضة. وكذا نسبة الأخريين فتكون نسبة المعمولتين إلى المفروضتين كإحديها إلى نظيرها[١] أعني النسبة المفروضة - و ذلک ما أردناه.

[٩] نريد أن نجد خطين يكون نسبتها كنسبة دائرتين مفروضتين. فنجد لقطريها ثالثًا في[٢] النسبة فنسبة الأول إلى الثالث كنسبة مربع الأول إلى الثاني وهما القطران التي هي كنسبة الدائرتين. فالثالث و[٣] أحدالقطرين[٤] هما الخطان المطلوبان. /ص١٣٨/

[١٠] نريد أن نعمل دائرة تكون نسبتها إلى دائرة مفروضة كنسبة مفروضة.
فنخرج وسطا في النسبة بين حدّي النسبة المفروضة ونجعل نسبة خط ما إلى قطر المفروضة كالأول من حدّى النسبة إلى الوسط ونرسم[٥] على الخط دائرة فتكون هى المطلوبه وبرهانه ظاهر.

[١١] نريد أن نعمل دائرة مساوية لدائرتي **جـ**، **هـ** المفروضتين.
فنجد **اب**، **حص** على نسبتها. فبالتركيب **جهـ**[٦] إلى **هـ** كا **ب**، **حص**. وليكن **بع** مثلهما[٧] إلى **حص** ويخرج **د** وسطا بين **عب**، **حص**. ونجعل[٨] [قطر] **ط**[٩] إلى قطر **هـ** كـ**عب**[١٠] إلى **د**. ونرسم على **ط** دائرة. فهي المطلوبة. لأنّ **جـ** [و] **هـ** إلى **هـ** كـ**عب** إلى **حص** أعني **عب**[١١] إلي **د** مُثَناة وقطر **ط** إلى قطر **هـ** كـ**عب**[١٢] إلى **د**. فقطر **ط** إلى قطر **هـ** مُثَناة أعني دائرة **ط** إلى دائرة **هـ** كـ**عب** إلى **د** مُثَناة أعني دائرتي **جـ** [و] **هـ** إلى دائرة **هـ**. فدائرة **ط** كدائرتي **جـ**، **هـ** - و ذلک ما أردناه أن نبين[١٣] [شكل٦].

[١٢] نريد أن نعمل دائرة[١٤] كثلاث دوائر.

---

١. نظيرها] نظيره: **د**، ج، ت؛ قطره: آ
٢. ثالثًا في] بالثانی:ج
٣. و] –آ
٤. بل] +د١
٥. نرسم] يرسم: ج
٦. **جـهـ**] **جـ**: د١
٧. مثلهما] مثلها: آ
٨. نجعل] يجعل: ج
٩. **ط**] **طا**: د١، آ، ج
١٠. **عب**]ع ف: آ
١١. **عب**]ع ف: آ
١٢. **عب**]ع ف: آ
١٣. أن نبين] –آ، –ت
١٤. دائرة] – ت

فنعمل[1] دائرة كاثنين منها، فدائرة[2] أُخرى كهذه المعمولة مع الباقية[3] من الثلاث. فيكون هى المطلوبة. وبرهانه ظاهر.[4]

[١٣] نريد أن نضيف إلى دائرة **دز**[5] المفروضة مطوّقًا مثلها[6] وفي سطحها.

فنجعل **اب** إلى **دز** مُثَناة كالاثنين إلى الواحد[7] وننصفه على **ح** ونرسم على **ه** مركز **دز** ببُعد **حا** دائرة **ع**. فلأن **اب** إلى **دز** مُثَناة أعني **اح** بل **عه** إلى **هز** مُثَناة أعني نسبة الدائرة العظمى إلى الدائرة الصغرى كنسبة الإثنين إلى الواحد. فالعظمى ضِعف الصغرى فالمطوّق مثل الصغرى - وذلک ما أردناه [شكل٧].

[١٤] نريد أن نعمل على دائرة مفروضة مطوّقا يحيط بها مساويًا لدائرة أخرى مفروضة.

فنعمل دائرة مساوية للمفروضتين. وعلى مركز التي نريد أن نرسم عليها دائرة مساوية المعمولة - فيظهر المطلوب بأدنى تأمّل.

[١٥] نريد أن نعمل على دائرة مفروضة مطوّقا مساويا لدائرتين[8] مفروضتين.

فنعمل دائرة مساوية للدواير الثلاث.[9] وعلى مركز التي نريد أن نعمل عليها دائرة مساوية للمعمولة - فيظهر المطلوب.

[١٦] نريد أن نفصل من أعظم دائرتين مفروضتين **كا** سطحا مطوّقا مساويا لأصغرهما **كب**.

فنجعل **ده** إلى **س** كا إلى **ب** ونفصل **دص** كس. ونعمل على مركز **ا** دائرة **ف**. تكون[10] نسبتها إلى **ب** ك**صه** إلى **س**. فلأن **ف** إلى **ب** ك**صه** إلى **س**[11] أعني **دص**. فبالعكس **ب** إلى **ف** ك**دص** إلى **صه**. وكان **ا** إلى **ب** ك**ده** إلى **س**. فبالمساواة [المنتظم] **ا** إلى **ف** المعمولة فيها ك**ده** إلى **هص**. وبالتفضيل نسبة السطح المطوّق المحيط ب**ف** إلى **ف** ك**دص** إلى **صه** أعني **ب** إلى **ف**. فالسطح المطوّق المحيط ب**ف** يساوي[12] **ب** - وهوالمراد [شكل٨].

[١٧] نريد أن نعمل دايرة مساوية لسطح **حص** المطوّق.

---

١. فنعمل] فيعمل: ج
٢. فدايرة] و دايرة: د١، د٢
٣. الباقية] ثالثة: د١
٤. و برهانه ظاهر] – آ، –ت
٥. **دز] هدز: ج**
٦. مثلها] بمثلها: آ
٧. الواحد] الاحد: آ
٨. لدائر] د١
٩. الثلاث] التى: د١،ج
١٠. تكون] يكون: آ، د٢
١١. س] ص: آ
١٢. يساوي] تساوى: د٢

فنجعل **اب** إلى **جـ** كح إلى **ص**. ونفصل **بس** كجـ. ونعمل دائرة **ع** نسبتها إلى **ص** كاس إلى **جـ**. فلأن **اب** إلى **جـ** أعني **سب** كح إلى **ص**. فبالتفضيل نسبة المطوّق إلى **ص كاس** /ص١٣٩/ إلى **جـ**. أعني **ع** إلى **ص**. فـ**ع** كالسطح المطوّق - وهوالمطلوب [شكل٩].

[١٨] نريد أن نعمل دائرة مساوية لسطحي **اص**، **بهـ** المطوّقين.

فنضيف[1] مطوّق **عا** إلى دائرة **ا** مساويًا لمطوّق **بهـ**. ونعمل دائرة **ف** مساوية لمطوّق **عص**. فهي المطلوبة. وبرهانه ظاهر - وذلک ما أردنا أن نعمل [شكل١٠].

تمت المقالة الاولى.[2]

المقالة الثانية من كتاب *مساحة الحلق*

[صدر]: الحلقة المستديرة الغلظ هي شكل مجسم يحيط به ثلاثة[3] دوائر، إحديها بغلظها والأخريان[4] في بسيط واحد يحيطان باستدارتها من داخل وخارج ويماسان[5] طرفي قطري الاولى[6] والمربعة الغلظ هي التي[7] يحيط بغلظها مربع وباستدارتها دائرتان تماسان طرفي ضلع المربع أو طرفي قطره.

[١] كل سطح مستقيم يضرب في خطين مختلفين فإنّ نسبة أحد المجسمين الحادثين[8] عنه إلى الآخر كنسبة قاعدته التي تلقى[9] السطح المفروض على خط مستقيم[10] إلى قاعدة[11] التي معها في بسيط واحد من المجسم الآخر. هذا دعوى الشكل الخامس والعشرين من المقالة الحادية عشر من *الاصول* إلّا إنّها بعبارة أُخرى. وبرهانه هو البرهان المذكور في ذلک الشكل[12] بعينه.

[٢] نسبة المجسم الحادث عن ضرب خط ما في سطح إلى الحادث عن ضربه في بعضه كنسبة السطح إلى بعضه المضروب في الخط. وبرهانه ظاهر إذ هو في الحقيقة استبانة للشكل[13] المتقدم.

---

١. فنضيف] فنضف: آ؛ يضيف: د٢

٢. من كتاب احمد بن عيسى الكرابيسي في مساحة الحلق وهى ثمانية عشر شكلا والحمدللّه رب العالمين] + د١، + ج؛ من كتاب احمدبن عمر الكرابيسى والحمدللّه] + ت؛ و هى ثمانية عشر شكلا والحمدلله رب العالمين] + د٢

٣. ثلاثة] ثلث: د١، ج؛ ثلاث: ت، د٢

٤. والأخريان] والآخرين: د١

٥. تماسان] يماسان: د٢

٦. الاولى] الاول: د١

٧. التى] – ت

٨. الحادثين] الحادثتين: ج

٩. تلقى] يلقى: آ، د٢

١٠. مستقيم] المستقيم: د٢

١١. قاعدة] القاعدة: د٢

١٢. في ذلک الشكل] – آ

١٣. للشكل] الشكل: د١

[۳] کل حلقة مربعة الغلظ کاب فضرب نصف محیطی دائرتیه[۱] کا، **ب** في المربع المحيط بغلظها **کا جـ** هو تکسیرها.

إذ ننصف[۲] **اب** على **ک** ونرسم على **هـ** مرکز الدائرتین دائرة **ک**، فمحیط **ک** في **اب** هو تکسیر المطوّق. و **جب** عمود على سطح **اب** المطوّق. فـ**جب** في سطح **اب** المطوّق هو تکسیر الحلقة. و **اب** ضرب في **بجـ** فکان مربع **اجـ** وفي محیط **ك** فکان سطح المطوّق. فسطح المطوّق[۳] إلى مربع **اجـ** کمحیط **ك** إلى **بجـ**. فمحیط **ك** في مربع **اجـ** ک**بجـ** في سطح مطوّق **اب** أعني تکسیر الحلقة. فمحیط **ك** في **اجـ** هو تکسیر الحلقة ومحیطا **ا**، **ب** ضِعف محیط **ک**. فنصف محیطا **ا**، **ب** في مربع **اجـ** هو تکسیر الحلقة - و هوالمراد [شکل۱۱].[٤]

[٤] أعظم السطوح المطوّقة التي تقع الحلقة المستدیرة الغلظ على استدارتها **کاجـ** هوالسطح المطوّق المحیط به دائرتا الحلقة وهما **ا**، **جـ** و یماسان[٥] قطر الدائرة المحیطة بغلظها وهو سطح **اجـ**.

وإلّا فلیقطعها سطح أعظم من **اجـ** ک**هز** فلما قدّمنا في الصدر یظهر أنّ قطر **هز** أصغر من قطر **اجـ**، فدائرة **هـ** أعظم من دائرة **جـ**، فلیکن ک**ب** و **ز** أصغر من **ا** فلیکن ک**ك**[٦] و هما على **ع** مرکز **اجـ** فـ**بک** ک**هز**. فسطح **بك** البعض لکونه کسطح **هز** /ص۱٤۰/ أعظم من سطح **اجـ** الکل. هذا خلف.[۷] فلا یقطع حلقة **اجـ** سطح أعظم من **اجـ** - وهو المطلوب.[۸]

[٥] کل حلقة مستدیرة الغلظ ک**اجـ** فضرب نصف[۹] محیطي دائرتیه ک**اجـ** في[۱۰] الدائرة المحیطة بغلظها وهي دائرة **اجـ** هو تکسیرها.

إذ نعمل على دائرة **اجـ** المحیطة مربع **كع** وننصف **اجـ** على **ب**[۱۱] ونرسم على مرکز[۱۲] الحلقة ببُعد **هب** دائرة **ب** و نصف دائرة **زو** ونصف مربع وهو[۱۳] **زی** فمطوّق **اجـ** نصف حلقة[۱٤] المستدیرة الغلظ والمربعة

۱. دائرتیه] دائرته: د۲
۲. ننصف] ینصف: د۲
۳. فسطح المطوّق] – د۱، – ج
٤. و هوالمراد] – ج
٥. تماسان] یماسان: د۲ ت
٦. ک] ط: آ
۷. هذا خلف] هف: ج
۸. وهو المطلوبه وهوالمط: ۲
۹. نصف] – ج
۱۰. محیط] + آ
۱۱. ب] ا: ا د
۱۲. مرکز] – ت
۱۳. و هو] – ج، – د۲
۱٤. حلقة] الحلقة: ت

الغلاظ التي[١] يحيط بها من داخل و خارج دائرتا **ا**، **جـ** وبغلظها مربع[٢] **كع**. فالجسم التي[٣] قاعدته[٤] **او**[٥] نصف دائرة **اجـ** يحيط بغلظه هو نصف حلقة **اجـ** المستديرة الغلظ. والتي[٦] قاعدة **او**[٧] يحيط بغلظه نصف مربع **كع** هو نصف الحلقة المربعة الغلاظ. فا**و** ضرب في سطحين مختلفين فكان منه المجسمان[٨] المحيط بغلظ أحدهما **زى**.[٩] و بالآخر نصف دائرة **زد**.[١٠] فنسبة الأول إلى الثاني كنسبة **زى**[١١] إلى نصف دائرة **زو**. ولأن نسبة الجزء إلى الجزء السمّى له كنسبة الأضعاف إلى الأضعاف تكون[١٢] نسبة المربعة الغلظ إلى مستديرته كنسبة المجسم المحيط به **او** و **زى** إلى محيط به **او**[١٣] و نصف دائرة **زو**. وهي كنسبة **زى** إلى نصف دائرة **زو** و[١٤] كنسبة مربع **كع** إلى دائرة **اجـ**. فنسبة الحلقتين كنسبة مربع **كع** إلى دائرة **اجـ**. ومحيط **ب** في **كع** هو تكسير المربعة الغلظ. فنسبة المربعة إلى المجسم الذي من ضرب **ب** في دائرة **اجـ** كنسبة مربع **كع** إلى دائرة **اجـ** أعني نسبة المربعة إلى المدورة. فنسبة المربعة إلى المدورة[١٥] كنسبتها إلى المجسم الذي يكون من **ب** في دائرة **اجـ**. فضرب محيط **ب** وهو نصف محيطي **ا** [و] **جـ** في دائرة **اجـ** هو تكسير الحلقة المستديرة[١٦] الغلظ - وذلک ما أردناه.[١٧]

و هنالک استبان إنّ نصفي محيطي الدائرتين المحيطتين بالحلقة المستديرة الغلظ هو عمود مستدير في استدارة جسمها.

[٦] نريد أن نزيد في غلظ حلقة **اجـ** المفروضة زيادة مساوية لها.

١. التى] الذي: آ
٢. مربع] ربع: ج، د١
٣. التي] الذي: آ، د٢
٤. قاعدته] قاعدة: د١، د٢
٥. و] +د ٢
٦. التى] الذي: آ،ج
٧. قاعدة او] قاعدته **از**: آ؛ و] + ت، + د٢
٨. المجسمان] الجسمان: ج
٩. **زى**] **زو**: د٢
١٠. **زد**] **زو**: آ، ج؛ **وز**: د٢
١١. **زى**] **زب**: ج
١٢. تكون] فكون: آ؛ يكون: د١
١٣. **او**] **از**: ج
١٤. و] –آ
١٥. فنسبة المربعة إلي المدورة] –د١، –آ، –ج
١٦. المستديرة] المدورة: آ
١٧. وذلک ما أردناه] –آ، – ت

فننصف قطر **اجـ** المحيطة بها على **ب** ونرسم عليه دائرة مساوية لضعف دائرة **اجـ** في سطحها. وينبغى أن يكون محيط دائرة **سع** أصغر من نصف محيطي **ا** [و] **جـ**. وندير على **هـ** مركز الدائرتين دائرتين[1] تماسان[2] دائرة **سع**. فوصلنا إلى المطلوب. لأن **سع** ضِعف **اجـ** فضرب محيط **ب** في دائرة[3] **سع** وهو تكسير الحلقة المحيطة بها دائرة **سع** مثل ضربه في دائرة **اجـ** مرّتين. فقد زدنا في غلظ حلقة **اجـ** زيادة مثلها. وقد يمكننا[4] بهذا التدبير أن نزيد على حلقة مفروضة زيادة على أيّ نسبة أردنا إليها.[5]

[۷] نريد أن ننقص من غلظ حلقة مفروضة نقصانًا مساويًا لنصفها.

وبرهانه عكس البرهان المتقدم. لأنه فصل[6] من الحلقة المحيطة بغلظها مطوّقًا مساويًا لنصف المحيطة.[7] و نرسم ثلاث دوائر[8] اخر. و نبين المطلوب على عكس النهج المتقدم - وهو المراد.[9]

---

۱. دائرتين] + د۱
۲. تماسان] يماسان: آ
۳. دائرة] – ت
۴. يمكننا] تمكننا: د۲
۵. إليها] – ت
۶. فصل] نفصل: ج، د۲
۷. المحيطة] محيط: د۲
۸. دوائر] دائرة: آ
۹. انتسخ، ليس في المنتسخ منه أكثر من ذلک] د ۱