



Original Article

Design of EWMA and Mixed EWMA-CUSUM Control Charts under Failure-Censored Lifetime Test Based on Simulation Approach

Hamed Darvishi*^{ID}
Hiwa Farughi**^{ID}
Pourya Mohammadipour***^{ID}

Extended Abstract

Introduction and Objectives: In reliability theory, one of the most important characteristics that is evaluated is the lifetime of products. Lifetime is an important quality characteristic that is considered in various fields, especially engineering sciences, to express the expected survival time and to describe the performance of a manufactured product. Nowadays, one of the concerns of manufacturers and commercial companies is to increase product quality, and in industries where lifetime is considered a quality characteristic, improving product quality is achieved by increasing its lifetime. Therefore, industry experts monitor product lifetimes to ensure the quality of manufactured products. In the present era, with advances in manufacturing knowledge and technology, products have high reliability. Therefore, monitoring the health of a product until the moment of failure under normal conditions is very time-consuming and costly. As a result, engineers use lifetime tests to save time and cost in obtaining product lifetimes.

Methods: In recent years, control charts have been used to monitor the number and time of product failures. Statistical Process Control (SPC) is a set of powerful tools used in manufacturing and service industries to monitor process behavior. Control charts are the most important and effective SPC tools for monitoring the quality characteristics of products through detecting and controlling changes.

Findings: Lifetime data are generally not symmetric and follow non-negative distributions. Therefore, the design of control charts under lifetime testing should consider the probability distribution of failure data. Traditional Shewhart control charts are efficient in detecting large changes in the monitored process but do not have sufficient sensitivity in detecting small changes. Therefore, to identify small changes that occur in the process, memory-type control charts are used. In this study, it is assumed that the quality characteristic of interest is product lifetime. The lifetimes of products follow a Weibull distribution with a fixed shape parameter and a variable scale parameter. Therefore, monitoring the mean of the Weibull distribution is done through monitoring its scale parameter.

Received: Jan. 23, 2025; Revised: Mar. 07, 2025; Accepted: Apr. 17, 2025; Published Online: Apr. 18, 2025.

* Master Student, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

** Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

Corresponding Author: h.farughi@uok.ac.ir

*** Ph.D. Student, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.

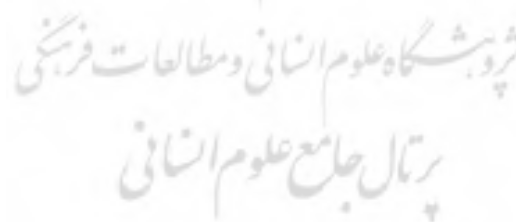


Original Article

In this study, the goal is to monitor the average product lifetime, which is in fact monitoring and evaluating the scale parameter of the Weibull distribution. If the product lifetime is greater than the average or a certain predefined value, the product is considered compliant and healthy, and if it is less than that value, the product is considered non-compliant and defective. The more the product lifetime exceeds the target average or the predefined value, the higher its quality, and vice versa. In this study, EWMA and Mixed EWMA-CUSUM control charts under failure-censored lifetime tests are designed to monitor product lifetimes. The control limits and the average out-of-control run lengths of the proposed control charts will be calculated using the Monte Carlo simulation algorithm.

Conclusion: The performance evaluation criterion of the proposed control charts is the average run length in the out-of-control state. Since the Mixed EWMA-CUSUM control chart is a combination of the two EWMA and CUSUM control charts, a comparison between the performance of the EWMA and Mixed EWMA-CUSUM charts is made. The results show that the Mixed EWMA-CUSUM control chart has better performance than the EWMA control chart in detecting small changes in the scale parameter.

Keywords: Control chart; Reliability; Weibull distribution; Failure censoring; Average run length; Monte Carlo simulation.



How to Cite: darvishi, Hamed; Farughi, Hiwa; Mohammadipour, Pourya (2025). Design of EWMA and Mixed EWMA-CUSUM Control Charts Under Failure Censored Lifetime Test Based on Simulation Approach. *Ind. Manag. Persp.*, 15(1), 257-281 (*In Persian*).



طراحی نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA-CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی بر اساس رویکرد شبیه‌سازی

حامد درویشی*

هیوا فاروقی**

پوریا محمدی‌پور***

چکیده گسترده

مقدمه و اهداف: در نظریه قابلیت اطمینان یکی از مهم‌ترین مشخصه‌هایی که مورد ارزیابی قرار می‌گیرد طول عمر محصولات است. طول عمر مشخصه کیفی مهمی است که در زمینه‌های مختلف به ویژه علوم مهندسی، برای بیان مدت زمان مورد انتظار بقا و توصیف عملکرد یک محصول تولیدی در نظر گرفته می‌شود. امروزه یکی از دغدغه‌های تولیدکنندگان و شرکت‌های تجاری افزایش کیفیت محصول است و در صنایعی که طول عمر به عنوان مشخصه کیفی در نظر گرفته می‌شود، افزایش کیفیت محصول با افزایش طول عمر آن محقق می‌شود. از این رو کارشناسان صنایع برای تضمین کیفیت محصولات تولید شده، طول عمر آن‌ها را پایش می‌کنند. در عصر حاضر با پیشرفت دانش ساخت و تکنولوژی، محصولات از قابلیت اطمینان بالایی برخوردارند لذا، پایش سلامت محصول تا لحظه وقوع خرابی در شرایط معمولی بسیار زمان‌بر و پرهزینه است. در نتیجه مهندسين به منظور صرفه‌جویی در هزینه و زمان برای به دست آوردن طول عمر محصولات از آزمون‌های طول عمر استفاده می‌کنند.

روش تحقیق: در سال‌های اخیر برای نظارت بر تعداد و زمان خرابی محصولات از نمودارهای کنترل استفاده شده است. کنترل فرآیند آماری، مجموعه‌ای از ابزارهای قدرتمند در صنایع تولیدی و خدماتی برای نظارت بر رفتار فرآیند است. نمودار کنترل مهم‌ترین و موثرترین ابزار کنترل فرآیند آماری در پایش مشخصه کیفی محصولات از طریق کنترل و کشف تغییرات است.

یافته‌ها: داده‌های طول عمر عموماً متقارن نیستند و از توزیع‌های نامنفی پیروی می‌کنند. بنابراین، طراحی نمودارهای کنترل تحت آزمون طول عمر باید با توجه به توزیع احتمال داده‌های خرابی باشد. نمودارهای کنترل سنتی شواهد برای تشخیص تغییرات بزرگ در فرآیند تحت نظارت کارایی خوبی دارند اما در کشف تغییرات کوچک از حساسیت کافی برخوردار نیستند؛ لذا برای شناسایی تغییرات کوچک به وجود آمده در فرآیند از نمودارهای کنترل با حافظه استفاده می‌شود. در این پژوهش، فرض بر این است که مشخصه کیفی مورد نظر، طول عمر محصول می‌باشد. عمر محصولات از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند. بنابراین نظارت بر میانگین توزیع وایبول از طریق نظارت بر پارامتر مقیاس انجام پذیر است.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۰۴، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۲/۱۷، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۸، تاریخ اولین انتشار: ۱۴۰۴/۰۱/۲۹.

* دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

** استاد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

نویسنده مسئول: h.farughi@uok.ac.ir

*** دانشجو دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

نوع مقاله: پژوهشی

در این پژوهش، هدف نظارت بر میانگین طول عمر محصولات که در واقع همان نظارت و ارزیابی پارامتر مقیاس توزیع وایبول است، می‌باشد. اگر طول عمر محصول از میانگین یا یک مقدار معین و از پیش تعیین شده‌ای بیشتر شود، محصول منطبق و سالم و اگر از آن مقدار کمتر باشد، محصول نامنطبق و معیوب در نظر گرفته می‌شود. هر چقدر طول عمر محصول از میانگین هدف یا مقدار در نظر گرفته شده بیشتر باشد، باکیفیت‌تر است و بالعکس. در این تحقیق جهت پایش طول عمر محصولات، نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی طراحی می‌شوند. حد کنترل و میانگین طول دنباله خارج از کنترل نمودارهای کنترل پیشنهادی با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه خواهند شد.

نتیجه‌گیری: معیار ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی، میانگین طول دنباله در حالت خارج از کنترل است. از آن جایی که نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM، ترکیبی از دو نمودار کنترل EWMA و CUSUM می‌باشد، مقایسه‌ای میان عملکرد نمودارهای EWMA و Mixed EWMA_CUSUM انجام می‌گیرد. بررسی نتایج نشان می‌دهد نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM از نمودار کنترل EWMA در جهت کشف تغییرات کوچک در پارامتر مقیاس عملکرد بهتری دارد.

کلیدواژه‌ها: نمودار کنترل؛ قابلیت اطمینان؛ توزیع وایبول؛ سانسورشدگی خرابی؛ میانگین طول دنباله؛ شبیه‌سازی مونت کارلو.

استناددهی: درویشی، حامد؛ فاروقی، هیوا؛ محمدی‌پور، پوریا (۱۴۰۴). طراحی نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA-CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی بر اساس رویکرد شبیه‌سازی. چشم‌انداز مدیریت صنعتی، ۱۵(۱)، ۲۵۷-۲۸۱.



۱. مقدمه

کیفیت محصولات یکی از مهم‌ترین عوامل موفقیت کسب‌وکارها و رقابت‌پذیری در صنایع مختلف است [۲]. ارائه یک محصول با کیفیت، اعتماد بیشتر، افزایش رضایت مشتریان و در نتیجه افزایش فروش و سودآوری را به دنبال دارد. به طور کلی کیفیت به معنای میزان پاسخگویی به نیازها و انتظارات مشتری در قبال دریافت یک محصول یا خدمت می‌باشد [۴]. کنترل کیفیت آماری^۱ به مجموعه فعالیت‌هایی گفته می‌شود که با هدف تضمین کیفیت محصولات و خدمات ارائه شده توسط یک سازمان انجام می‌شود. کنترل فرآیند آماری^۲، مجموعه‌ای از ابزارهای قدرتمند در صنایع تولیدی و خدماتی برای ایجاد یک فرآیند پایدار است [۴]. هنگامی که گفته می‌شود یک فرآیند باید پایدار باشد به معنای آن است که فرآیند بتواند تحت تاثیر تغییرات تصادفی، حول مقدار هدف یا مقدار اسمی فعالیت کند. به فرآیندی که فقط تحت تاثیر انحرافات تصادفی قرار دارد، فرآیند تحت کنترل گفته می‌شود و فرآیندی را که تحت تاثیر انحرافات با دلیل کار می‌کند را فرآیند خارج از کنترل گویند. در میان ابزارهای کنترل فرآیند آماری، نمودار کنترل^۳ مهم‌ترین و موثرترین ابزار در پایش مشخصه کیفی^۴ محصولات است به گونه‌ای که این نمودار به وسیله‌ی داده‌های جمع‌آوری شده از فرآیند، نشان می‌دهد که آیا فرآیند در حالت تحت کنترل قرار دارد یا تحت تاثیر انحرافات با دلیل به حالت خارج از کنترل منتقل شده است [۵ و ۱۵]. نمودارهای کنترل در صنایع خودروسازی، مراقبت‌های بهداشتی، مدیریت، اقتصاد و... از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند [۱۰]. مهم‌ترین کاربرد نمودارهای کنترل، استفاده از آن‌ها برای بهبود کیفیت محصولات از طریق شناسایی نقاط خارج از کنترل است [۱۱].

در نظریه قابلیت اطمینان یکی از مهم‌ترین مشخصه‌هایی که مورد ارزیابی قرار می‌گیرد طول عمر محصولات است. طول عمر^۵ مشخصه کیفی مهمی است که در زمینه‌های مختلف به ویژه علوم مهندسی، برای بیان مدت زمان مورد انتظار بقا و توصیف عملکرد یک محصول تولیدی در نظر گرفته می‌شود. کارشناسان صنایع تولیدی برای این که بدانند محصول تولید شده استانداردهای لازم و انتظارات مصرف‌کننده را برآورده می‌کند یا خیر، طول عمر محصولات را تحت نظارت قرار می‌دهند [۱]. امروزه محصولات از قابلیت اطمینان^۶ بالایی برخوردارند لذا در کوتاه مدت دچار خرابی نمی‌شوند. از این رو بررسی طول عمر کل محصولات زمان‌بر است. بنابراین مهندسين کیفیت برای صرفه‌جویی در هزینه و زمان آزمایش جهت به دست آوردن طول عمر محصولات از آزمون‌های طول عمر استفاده می‌کنند.

هدف از انجام این آزمون‌ها، صرفه‌جویی در هزینه و زمان به دست آوردن طول عمر محصولات می‌باشد. آزمون‌های طول عمر مختلفی در ادبیات قابلیت اطمینان وجود دارد که یکی از پرکاربردترین آنها سانسورشدگی راست^۷ می‌باشد و به طور کلی شامل سانسور خرابی^۸، سانسور زمانی^۹، سانسور هیبریدی^{۱۰} و سانسور پیشرونده^{۱۱} می‌شود که هر کدام با توجه به مکانیسم خاص خود زمان و هزینه انجام آزمایش را کاهش می‌دهند. در آزمون طول عمر سانسور خرابی یا سانسور نوع II^{۱۲} تعداد خرابی‌ها از قبل معین شده است و آزمون تا رسیدن به خرابی‌های از پیش تعیین شده‌ای ادامه می‌یابد اما زمان خرابی هر کدام از مولفه‌ها و زمان پایان آزمون کاملاً تصادفی و مجهول است. در سال‌های اخیر متخصصان برای پایش طول عمر محصولات و نظارت بر داده‌های خرابی نمودارهای کنترل را به کار گرفته‌اند. طراحی نمودار کنترل تحت آزمون طول عمر سانسور نوع I برای پایش تعداد خرابی‌ها و طراحی نمودار کنترل تحت آزمون طول عمر سانسور نوع II برای پایش زمان خرابی‌ها به کار برده می‌شود.

-
1. Statistical quality control
 2. Statistical process control
 3. Control chart
 4. Quality characteristic
 5. Life time
 6. Reliability
 7. Right censoring
 8. Failure censoring
 9. Time censoring
 10. Hybrid censoring
 11. Progressive censoring
 12. Type II censoring

نمودارهای کنترل شوهارت^۱ معمولاً با این فرض طراحی می‌شوند که مشخصه کیفی مورد نظر از توزیع نرمال تبعیت می‌کند. با این حال در صنعت گاهی ممکن است که مشخصه کیفی تحت نظارت از توزیع‌های نامتقارن پیروی کند. طول عمر محصول به عنوان یک مشخصه کیفی در ارزیابی قابلیت اطمینان، معمولاً از توزیع‌های نامنفی تبعیت می‌کند. یک محصول تولید شده از زمان ساخت تا لحظه از کار افتادگی فقط فرسودگی را تجربه می‌کند بنابراین طول عمر سیر فرسایشی و کاهشی دارد. در چنین شرایطی یک نمودار کنترل طراحی شده با فرض این که مشخصه کیفی دارای توزیع نرمال می‌باشد ممکن است موجب بروز هشدار نادرست در زمان پایش فرآیند شود و به تبع آن تحلیلگر را هنگام تصمیم‌گیری در مورد این که آیا فرآیند تحت کنترل یا خارج از کنترل است گمراه کند و در نتیجه تولید محصولات معیوب و نامنطبق افزایش یابد. بنابراین در طراحی یک نمودار کنترل مناسب برای نظارت بر داده‌های طول عمر به جهت جلوگیری از تولید محصولات ناسالم، ابتدا باید توزیع مشخصه کیفی طول عمر شناخته شود. انواع توزیع‌های مهم در آزمون‌های طول عمر شامل: نمایی^۲، وایبول^۳، ریلی^۴، لگ نرمال^۵، داگوم^۶، بیرنباوم ساندرز^۷، پارتو^۸، گاما^۹ و نیم لجستیک^{۱۰} می‌باشند.

یکی از نقاط ضعف اصلی نمودارهای کنترل شوهارت استفاده از اطلاعات موجود در آخرین مشاهده است. نمودارهای کنترل با حافظه نه تنها از نمونه فعلی بلکه از اطلاعات نمونه‌های گذشته فرآیند هم استفاده می‌کنند، به همین علت در برابر تغییرات کوچک عملکرد خوبی دارند. دو تا از نمودارهای کنترل با حافظه که در پی کشف انحرافات کوچک از حساسیت بالایی برخوردار هستند، نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی^{۱۱} (EWMA) و نمودار کنترل جمع تجمعی^{۱۲} (CUSUM) می‌باشند. نمودار کنترل^{۱۳} MEC، ترکیبی از نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM است که به منظور ارتقای عملکرد یک نمودار، جهت شناسایی انحرافات کوچک در فرآیندهای حساس با یک دیگر ادغام شده‌اند.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در سال‌های اخیر نقش توزیع‌های آماری و کاربرد نمودارهای کنترل در پایش طول عمر محصولات بسیار مورد توجه پژوهشگران آماری و مهندسين قابلیت اطمینان قرار گرفته است. طراحی نمودارهای کنترل تحت آزمون‌های طول عمر از قبیل موضوعاتی است که می‌توان به تحقیق و توسعه آن پرداخت. در این جا به مرور برخی از کارهای صورت گرفته در این زمینه می‌پردازیم.

رسائی (۲۰۲۱) نمودارهای کنترل شوهارت و میانگین متحرک موزون نمایی را برای پایش خرابی محصولاتی که از توزیع نمایی پیروی می‌کنند تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی با جایگزینی پیشنهاد کرد [۱۶]. خان و همکاران^{۱۴} (۲۰۱۸) با فرض این که طول عمر محصولات از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند، یک نمودار کنترل متغیر تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی پیشنهاد کردند. نظارت بر میانگین فرآیند از طریق نظارت بر تغییر در پارامتر مقیاس توزیع وایبول صورت گرفت [۹]. محمدی‌پور و همکاران (۲۰۲۱) نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی یک طرفه و دو طرفه را برای پایش داده‌هایی که طول عمر آنها از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند، تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی بدون جایگزینی طراحی کردند [۱۳]. رسائی و آرشد^{۱۵} (۲۰۲۰) نمودارهای کنترل متغیر را برای نظارت بر طول عمر محصولاتی که از توزیع

1. Shewhart control chart

2. Exponential

3. Weibull

4. Riley

5. Lag normal

6. Dagum

7. Birnbaum Saunders

8. Pareto

9. Gamma

10. Half-logistics

11. Exponentially Weighted Moving Average

12. Cumulative sum control chart

13. Mixed Exponentially Weighted Moving Average and Cumulative sum control chart

14. Khan et al

15. Rasay and Arshad

نمایی پیروی می‌کند تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی با جایگزینی طراحی کردند [۱۷]. فراز و همکاران^۱ (۲۰۱۵) نمودارهای کنترل شوهارت را برای پایش داده‌های طول عمری که از توزیع وایبول پیروی می‌کنند با فرض تغییر در پارامترهای شکل و مقیاس، طراحی کردند. در رویکرد پیشنهادی، ابتدا متغیر تصادفی توزیع وایبول با استفاده از تابع ERF معکوس به متغیر تصادفی توزیع نرمال استاندارد تبدیل یافت و سپس نمودارهای کنترل شوهارت بر مبنای داده‌های نرمال شده برای پایش فرآیند طراحی شدند [۷]. ساجد علی و همکاران^۲ (۲۰۲۳) نمودارهای کنترل باحافظه میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی را تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی زمان برای پایش داده‌های قابلیت اطمینان طراحی کردند. با فرض این که داده‌های طول عمر دارای توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامتر شکل معلوم و پارامتر مقیاس مجهول می‌باشند. سپس عملکرد نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM با هم مقایسه گردید. مشخص شد نمودار کنترل EWMA هشدارهای خارج از کنترل را زودتر صادر می‌کند [۳]. لی و همکاران^۳ (۲۰۲۳) به پایش آماری داده‌های طول عمر نمایی و وایبول سانسور شده تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی زمانی پرداختند. تاثیر زمان سانسور بر به موقع تشخیص دادن تغییرات در میانگین فرآیند و هم‌چنین تعیین نقطه بهینه زمان سانسور راست، اهداف این تحقیق بود [۱۲]. مسلم رضا و همکاران^۴ (۲۰۲۴) نمودارهای کنترل ترکیبی CDEC را تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی زمانی برای نظارت بر مدت زمان بهبود بیماران سرطانی طراحی کردند. این رویکرد برای پایش تغییرات در میانگین زمان بهبود بیماران، با فرض این که عمر آنها از توزیع وایبول پیروی می‌کند، پیشنهاد شد. برای نمایش نمودارهای کنترل پیشنهادی یک مطالعه موردی بر روی زمان بهبود بیماران سرطان غدد لنفاوی صورت گرفت [۱۹]. اسلم^۵ (۲۰۱۶) یک نمودار کنترل ترکیبی را برای توزیع وایبول با فرض این که مشخصه کیفی مورد نظر مدت زمان بین دو رخداد متوالی می‌باشد، طراحی کرد. در نهایت از طریق یک مطالعه موردی بر روی یک مجموعه داده بیمارستانی، کاربرد نمودار کنترل پیشنهادی نمایش داده شد [۴]. صادقی و همکاران (۲۰۲۳) یک مسئله تولید اقتصادی با در نظر گرفتن محصولات معیوب حین تولید و همچنین خرابی ماشین و تقاضای متغیر را مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. فدایی و همکاران (۲۰۱۵) به طراحی نمودارهای کنترل فازی U با استفاده از روش قوانین فازی پرداختند [۶]. راش و همکاران^۶ (۲۰۲۴) ارزیابی کیفیت محصولات تولیدی با ارائه رویکردی مبتنی بر شبکه عصبی - فازی ANFIS را مورد مطالعه قرار دادند [۱۸]. محمدی‌پور و همکاران (۲۰۲۲) به نظارت بهینه‌سازی فرآیندهای تولیدی به جهت افزایش قابل اطمینان با استفاده از نمودارهای کنترل شوهارت و EWMA یک طرفه هنگامی که مشخصه کیفی طول عمر می‌باشد پرداختند [۱۴].

در این پژوهش، پایش انحرافات کوچک در میانگین طول عمر محصولات مد نظر است. فرض بر این است که طول عمر محصول از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند. نظارت بر میانگین توزیع وایبول از طریق نظارت بر پارامتر مقیاس صورت می‌گیرد. در پژوهش حاضر، نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی برای پایش طول عمر محصولات طراحی می‌شوند. در ارتباط با نوآوری‌های اصلی این مقاله میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

- طراحی نمودارهای کنترل EWMA تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی با استفاده از رویکرد شبیه‌سازی مونت کارلو
- طراحی نمودارهای کنترل Mixed EWMA_CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی با استفاده از رویکرد شبیه‌سازی مونت کارلو
- مقایسه ارزیابی عملکرد میان نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM
- ارائه تحلیل حساسیت عملکرد نمودارهای کنترل طراحی شده نسبت به پارامترهای مهم

۳. روش‌شناسی پژوهش

مشخصه کیفی

فرض کنید طول عمر محصولات (X) که به عنوان مشخصه کیفی در نظر گرفته شده است، از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند. تابع توزیع تجمعی و تابع قابلیت اطمینان توزیع وایبول به صورت زیر می‌باشد:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \exp[-(x\beta)^\alpha] \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$R(x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - \exp[-(x\beta)^\alpha]) = \exp[-(x\beta)^\alpha] \quad \text{رابطه (۲)}$$

که در روابط بالا $X \geq 0$ متغیر تصادفی وایبول، $\alpha > 0$ پارامتر شکل و $\beta > 0$ پارامتر مقیاس توزیع وایبول می‌باشند. همچنین میانگین توزیع وایبول به صورت زیر است [۸]:

$$\mu = \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha\beta} \quad \text{رابطه (۳)}$$

طبق رابطه (۳) هر گونه تغییر در میانگین توزیع وایبول با فرض ثابت بودن پارامتر شکل، تنها به علت تغییر در پارامتر مقیاس می‌باشد. پارامتر مقیاس در حالت تحت کنترل β_0 است، اگر تغییری در میانگین توزیع وایبول ایجاد شود و فرآیند از کنترل خارج شود آنگاه پارامتر مقیاس در حالت خارج از کنترل $\beta_1 = c\beta_0$ می‌باشد که c را ثابت تغییر می‌نامند. با توجه به رابطه (۳) اگر مقدار ثابت تغییر در پارامتر مقیاس بزرگتر از یک باشد، آنگاه پارامتر مقیاس افزایش یافته و میانگین فرآیند کاهش می‌یابد و اگر ثابت تغییر مقداری بین صفر و یک باشد، آنگاه پارامتر مقیاس کاهش یافته و در نتیجه میانگین فرآیند افزایش می‌یابد.

هنگامی که توزیع وایبول تحت کنترل است، در رابطه (۳)، β برابر با β_0 قرار می‌گیرد. حال اگر پارامتر مقیاس در طول فرآیند تحت تاثیر انحرافات با دلیل دچار تغییر شود، میانگین جدید توزیع وایبول در حالت خارج از کنترل به شکل زیر است [۸]:

$$\mu_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha\beta_1} = \frac{\mu_0}{c} \quad \text{رابطه (۴)}$$

آزمون طول عمر

در این پژوهش برای به دست آوردن طول عمر محصولات، از آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی بدون جایگزینی استفاده می‌شود. با توجه به مطالعات انجام شده توسط جون و همکارانش (۲۰۱۰) آماره‌ای که از سانسور خرابی بدون جایگزینی برای توزیع وایبول حاصل می‌شود به صورت زیر است [۸]:

$$v_i = \sum_{j=1}^r \left(\frac{x_j}{\mu_0}\right)^\alpha + (n-r) \left(\frac{x_r}{\mu_0}\right)^\alpha \quad \text{رابطه (۵)}$$

در رابطه بالا μ_0 میانگین طول عمر در سطح ایده‌آل یا همان میانگین هدف می‌باشد. همچنین مقدار آماره v_i از توزیع گاما با پارامترهای r و w_0 پیروی می‌کند که مقدار w_0 به صورت زیر است:

$$w_0 = (\beta_0\mu_0)^\alpha = \left(\beta_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha\beta_0}\right)^\alpha = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\alpha}\right)^\alpha \quad \text{رابطه (۶)}$$

با توجه به اینکه مقدار v_i از توزیع گاما پیروی می‌کند، میانگین و واریانس آن به این صورت به دست می‌آید:

$$E(V) = \frac{r}{w_0} \quad \text{رابطه (۷)}$$

$$Var(V) = \frac{r}{(w_0)^2} \quad \text{رابطه (۸)}$$

اگر فرآیند دچار تغییر شده و از حالت تحت کنترل خارج شود، مقدار آماره v_i از توزیع گاما با پارامترهای r و w_1 پیروی می کند که مقدار w_1 به صورت زیر محاسبه می شود:

$$w_1 = (\beta_1 \mu_0)^\alpha = (c \beta_0 \mu_0)^\alpha = c^\alpha w_0 \quad \text{رابطه (۹)}$$

طراحی نمودار کنترل EWMA

نمودار کنترل EWMA در زمره نمودارهای کنترل باحافظه قرار می گیرد. این نمودار، با وزنی که به مشاهدات گذشته و مشاهده فعلی اختصاص می دهد از اطلاعات موجود در نمونه های پیشین برای پایش مشخصه کیفی استفاده می کند. آماره میانگین متحرک موزون نمایی که باید بر روی نمودار کنترل رسم گردد تا تحت نظارت قرار گیرد به صورت زیر است:

$$Q_i = \lambda v_i + (1 - \lambda) Q_{i-1} \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

مقدار شروع برای آماره میانگین متحرک موزون نمایی برابر با میانگین هدف فرآیند در حالت تحت کنترل و یا همان مقدار هدف داده های اولیه در نظر گرفته می شود.

$$Q_0 = \mu_0 \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

در رابطه (۹)، λ پارامتر هموارسازی و v_i همان آماره حاصل از آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی می باشد. میانگین و واریانس آماره Q_i را می توان به ترتیب از طریق روابط زیر به دست آورد:

$$E(Q) = E(V) = \frac{r}{w_0} \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

$$Var(Q) = Var(V) \times \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \right) \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

$$Var(Q) = \frac{r}{(w_0)^2} \times \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \right)$$

حدود کنترل نمودار EWMA، از طریق روابط (۱۴) و (۱۵) محاسبه می گردد:

$$UCL = \mu_{Q_i} + K \sigma_{Q_i} = \frac{r}{w_0} + K \sqrt{\frac{r}{(w_0)^2} \times \frac{\lambda}{2 - \lambda} \times [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

$$LCL = \mu_{Q_i} - K \sigma_{Q_i} = \frac{r}{w_0} - K \sqrt{\frac{r}{(w_0)^2} \times \frac{\lambda}{2 - \lambda} \times [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

در روابط بالا K ضریب حد کنترل می باشد که مقدار آن از طریق تکرارهای شبیه سازی حاصل می گردد. در زبان برنامه نویسی R با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو، الگوریتمی برای محاسبه حدود کنترل و متوسط طول دنباله نمودار کنترل EWMA، نوشته شده است که از طریق آن مقادیر ARL_1 به ازای پارامترهای مختلف حاصل می گردد.

الگوریتم شبیه سازی مونت کارلو برای نمودار کنترل EWMA

مرحله اول: محاسبه آماره آزمون طول عمر

ابتدا یک متغیر تصادفی از توزیع گاما (v_i) با پارامتر شکل (r) و پارامتر مقیاس تحت کنترل (w_0) تولید می شود. ۱۰۰۰۰۰ زیرگروه انفرادی برای این متغیر تصادفی ایجاد می گردد.

مرحله دوم: محاسبه آماره میانگین متحرک موزون نمایی

آماره میانگین متحرک موزون نمایی (Q_i) طبق رابطه (۱۰) محاسبه می گردد.

مرحله سوم: تنظیم حدود کنترل

برای محاسبه حدود کنترل نمودار EWMA، ابتدا یک مقدار اولیه برای پارامتر K انتخاب می‌شود. سپس طبق روابط (۱۴) و (۱۵) مقدار حدود کنترل متغیر با زمان (UCL_i و LCL_i) محاسبه می‌گردد. آماره (Q_i) بر روی نمودار کنترل ترسیم می‌شود. هر گاه فرآیند خارج از کنترل اعلام شود، تعداد زیرگروه‌ها معادل متغیر تصادفی هندسی طول دنباله (RL) ثبت می‌شود. این عمل ۱۰۰۰۰۰ مرتبه تکرار می‌شود تا زمانی که میانگین طول دنباله تحت کنترل (ARL_0) حاصل از این تکرارها با میانگین طول دنباله تحت کنترل از قبل مشخص شده برابر شود، آنگاه حدود کنترل تثبیت شده و با همان K ثابت شده به سراغ پایش فرآیند می‌رویم. در غیر این صورت، مقدار K را تغییر داده و مجدداً میانگین طول دنباله تحت کنترل محاسبه می‌گردد و این مراحل تا زمانی که به مقدار متوسط طول دنباله تحت کنترل دلخواه برسیم ادامه خواهد داشت.

مرحله چهارم: محاسبه متوسط طول دنباله خارج از کنترل

ابتدا یک متغیر تصادفی از توزیع گاما (v_i) با پارامتر شکل (r) و پارامتر مقیاس خارج از کنترل (w_1) تولید کرده و ۱۰۰۰۰۰ زیر گروه انفرادی برای آن ایجاد می‌گردد. آماره (Q_i) در برابر حدود کنترل به دست آمده در مرحله ۳ رسم می‌گردد. هرگاه فرآیند هشدار خارج از کنترل بدهد، تعداد زیرگروه‌ها به عنوان طول دنباله هندسی خارج از کنترل ثبت می‌شود. ۱۰۰۰۰۰ بار این حلقه تکرار می‌شود و میانگین آن ۱۰۰۰۰۰ اجرا به عنوان میانگین طول دنباله خارج از کنترل (ARL_1) محاسبه می‌گردد.

طراحی نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM

نمودار کنترل ترکیبی، همانند نمودار کنترل جمع تجمعی کلاسیک از دو آماره به نام آماره‌های بالا و پایین و از یک حد کنترل تشکیل شده است. تا زمانی که آماره‌ها در زیر حد کنترل قرار گیرند به منزله تحت کنترل بودن فرآیند است و لذا فرآیند در صورتی خارج از کنترل اعلام می‌شود که یکی از آماره‌ها فراتر از حد کنترل رود. اگر آماره بالا از حد کنترل فراتر رود به معنای بهبود در وضعیت فرآیند و اگر آماره پایین از حد کنترل خارج شود به این معناست که وضعیت فرآیند رو به زوال است. این نمودار را می‌توان تعمیمی از نمودار جمع تجمعی کلاسیک دانست به گونه‌ای که در آماره‌های مورد نظر به جای مقدار متغیر تصادفی از آماره میانگین متحرک موزون نمایی بهره می‌گیرد. آماره‌هایی که قرار است بر روی نمودار کنترل ترسیم شوند به صورت زیر می‌باشند:

$$MEC_i^+ = \max[0, (Q_i - \mu_0) - a_i + MEC_{i-1}^+] \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

$$MEC_i^- = \max[0, -(Q_i - \mu_0) - a_i + MEC_{i-1}^-] \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

$$MEC_0^+ = MEC_0^- = 0 \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

رابطه (۱۷) بیانگر آن است که مقدار آغازین برای آماره‌های نمودار صفر است. هم‌چنین a_i به عنوان مقدار مرجع متغیر با زمان شناخته می‌شود که طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$a_i = a^* \sqrt{\text{Var}(Q_i)} = a^* \sqrt{\frac{r}{(w_0)^2} \times \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \times [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

مقدار a_i برابر با ضریبی از انحراف معیار آماره Q_i می‌باشد و پارامتر a^* مشابه پارامتر k در نمودار کنترل CUSUM است که برای حساس‌سازی نمودار کنترل در تشخیص شیفت‌های کوچک در میانگین فرآیندهای نرمال معمولاً $a^* = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود. حد کنترل متغیر با زمان نمودار کنترل ترکیبی، b_i نامیده شده و مقدار آن با توجه به رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$b_i = b^* \sqrt{\text{Var}(Q_i)} = b^* \sqrt{\frac{r}{(w_0)^2} \times \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \times [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

تعیین پارامتر b^* در تنظیم حد کنترل نمودار بسیار تاثیرگذار است، به طوری که هر چقدر مقدار آن افزایش یابد، مقدار b_i نیز افزایش می‌یابد و هر چقدر مقدار b^* کاهش یابد، مقدار b_i هم کاهش می‌یابد. مقدار b^* از طریق تکرارهای فراوان شبیه‌سازی حاصل می‌گردد، به طوری که برای یک مقدار ثابت a^* می‌توان b^* را به ازای مقادیر دلخواه ARL_0 تعیین کرد. برای محاسبه حد کنترل و ارزیابی متوسط طول دنباله در حالت خارج از کنترل نمودار پیشنهادی، یک الگوریتم محاسباتی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو در زبان برنامه نویسی R نوشته شده است.

الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو برای نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM

مرحله اول: محاسبه آماره آزمون طول عمر

نخست یک متغیر تصادفی از توزیع گاما (v_i) با پارامتر شکل (r) و پارامتر مقیاس تحت کنترل (w_0) تولید می‌شود. ۱۰۰۰۰۰ زیرگروه از این متغیر تصادفی ایجاد می‌گردد.

مرحله دوم: محاسبه آماره‌های نمودار کنترل ترکیبی

آماره میانگین متحرک موزون نمایی (Q_i) طبق رابطه (۱۰) محاسبه می‌گردد.

مقدار مرجع متغیر با زمان (a_i) طبق رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود و سپس آماره‌های بالا و پایین نمودار کنترل پیشنهادی طبق روابط (۱۶) و (۱۷) حاصل می‌گردند.

مرحله سوم: تنظیم حد کنترل

برای محاسبه حد کنترل، ابتدا یک مقدار اولیه برای پارامتر b^* انتخاب می‌شود. سپس طبق رابطه (۲۰) مقدار حد کنترل متغیر با زمان (b_i) محاسبه می‌گردد.

آماره‌های نمودار کنترل ترکیبی در مقابل حد کنترل حاصل شده، جهت نظارت بر فرآیند ترسیم می‌شوند. هر گاه فرآیند خارج از کنترل اعلام شد، تعداد زیرگروه‌ها به اندازه متغیر تصادفی هندسی طول دنباله (RL) ثبت می‌شود. این عمل ۱۰۰۰۰۰ مرتبه تکرار می‌شود تا زمانی که میانگین طول دنباله تحت کنترل (ARL_0) به دست آمده با میانگین طول دنباله تحت کنترل تعیین شده برابر شود، آنگاه حد کنترل تثبیت شده و با همان b^* به فاز دوم پایش فرآیند می‌رویم. در غیر این صورت، مقدار b^* را تغییر داده و مجدداً میانگین طول دنباله تحت کنترل محاسبه می‌گردد و این مراحل تا زمانی که به مقدار متوسط طول دنباله تحت کنترل دلخواه برسیم ادامه خواهد یافت.

مرحله چهارم: محاسبه میانگین طول دنباله خارج از کنترل

ابتدا یک متغیر تصادفی از توزیع گاما (v_i) با پارامتر شکل (r) و پارامتر مقیاس خارج از کنترل (w_1) تولید شده و ۱۰۰۰۰۰ زیر گروه برای آن ایجاد می‌گردد.

آماره میانگین متحرک موزون نمایی و سپس آماره‌های بالا و پایین نمودار کنترل ترکیبی محاسبه گردیده و در برابر حد کنترل به دست آمده در گام ۵ رسم می‌گردند. هرگاه فرآیند هشدار خارج از کنترل بدهد، تعداد زیرگروه‌ها معادل طول دنباله هندسی خارج از کنترل ثبت می‌شود. ۱۰۰۰۰۰ بار این حلقه تکرار شده و میانگین آن ۱۰۰۰۰۰ اجرا به عنوان میانگین طول دنباله خارج از کنترل (ARL_1) محاسبه می‌گردد.

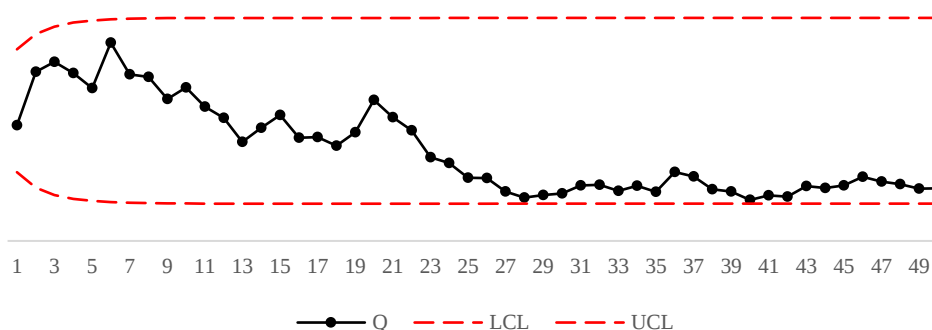
۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌های پژوهش

مثال ۱) فرض می‌گردد که عمر یک قطعه از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت $\alpha = 5$ و پارامتر مقیاس متغیر پیروی می‌کند. ابتدا ۲۰ نمونه تصادفی از قطعات تولید شده در حالتی که فرآیند تحت کنترل است با $\beta_0 = 1$ گرفته می‌شود. حال فرض کنید فرآیند دچار انحراف شده و تغییری افزایشی به اندازه ۰.۲ در پارامتر مقیاس توزیع وایبول رخ داده است. بنابراین، ۳۰ زیرگروه بعدی در حالتی که فرآیند از کنترل خارج شده است با $\beta_1 = 1.2$ نمونه‌گیری می‌شود. هر نمونه شامل ۵ مولفه $n = 5$ می‌باشد. در هر نمونه تمام واحدها تحت آزمون عمر خرابی قرار می‌گیرند، سپس آزمون با مشاهده ۳ امین خرابی $r = 3$ متوقف می‌شود. زمان خرابی واحدهای شکست خورده ثبت شده است

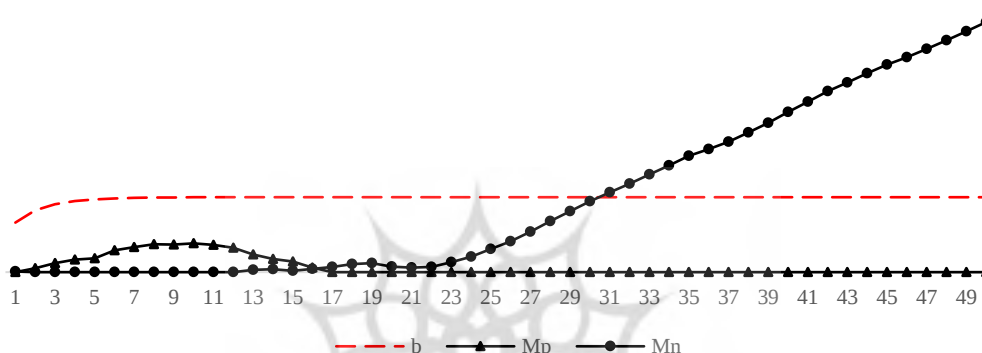
و آماره آزمون طول عمر سانسورشدگی نوع دوم برای هر نمونه از طریق رابطه (۵) محاسبه می‌گردد. مقدار پارامتر هموارسازی برابر با ۰.۲۵ و $\lambda = 1$ در نظر گرفته شده است. نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM برای نظارت بر میانگین طول عمر در سطح $ARL_0 = 370$ طراحی شده‌اند. آماره‌هایی که قرار است بر روی نمودارها رسم شوند، محاسبه گردیده و در جدول (۱) ارائه شده‌اند. ابتدا نمودار EWMA و سپس نمودار Mixed EWMA_CUSUM ترسیم می‌شود که نمایش گرافیکی آن‌ها به ترتیب در شکل‌های (۱) و (۲) آورده شده است.

جدول ۱. مقادیر آماره نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM به ازای $C=1.2$ برای مثال شبیه سازی شده

Mn_i	Mp_i	b_i	a_i	UCL_i	LCL_i	Q_i	V_i	i	Mn_i	Mp_i	b_i	a_i	UCL_i	LCL_i	Q_i	V_i	i
۷.۵۰	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۲۲	۲.۱۷	۲۶	۰.۱۸	۰.۰۰	۱۲.۱۱	۰.۳۳	۶.۷۷	۲.۴۳	۴.۰۸	۲.۵۴	۱
۹.۸۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۷۴	۰.۳۱	۲۷	۰.۰۰	۰.۹۶	۱۵.۱۴	۰.۴۱	۷.۳۱	۱.۸۹	۵.۹۷	۱۱.۶۳	۲
۱۲.۴۳	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۵۲	۰.۸۷	۲۸	۰.۰۰	۲.۲۳	۱۶.۶۰	۰.۴۵	۷.۵۷	۱.۶۲	۶.۳۲	۷.۳۸	۳
۱۴.۹۰	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۶۲	۱.۹۱	۲۹	۰.۰۰	۳.۰۸	۱۷.۳۷	۰.۴۸	۷.۷۱	۱.۴۹	۵.۹۲	۴.۷۳	۴
۱۷.۳۲	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۶۸	۱.۸۶	۳۰	۰.۰۰	۳.۳۹	۱۷.۷۹	۰.۴۹	۷.۷۸	۱.۴۱	۵.۴۰	۳.۸۲	۵
۱۹.۴۶	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۹۵	۲.۷۸	۳۱	۰.۰۰	۵.۳۰	۱۸.۰۲	۰.۴۹	۷.۸۳	۱.۳۷	۷.۰۰	۱۱.۸۱	۶
۲۱.۵۷	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۹۹	۲.۰۸	۳۲	۰.۰۰	۶.۰۹	۱۸.۱۵	۰.۵۰	۷.۸۵	۱.۳۵	۵.۸۸	۲.۵۳	۷
۲۳.۹۰	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۷۶	۱.۱۰	۳۳	۰.۰۰	۶.۷۹	۱۸.۲۲	۰.۵۰	۷.۸۶	۱.۳۳	۵.۸۰	۵.۵۴	۸
۲۶.۰۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۹۵	۲.۴۹	۳۴	۰.۰۰	۶.۷۱	۱۸.۲۶	۰.۵۰	۷.۸۷	۱.۳۳	۵.۰۱	۲.۶۷	۹
۲۸.۴۱	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۷۴	۱.۱۱	۳۵	۰.۰۰	۷.۰۳	۱۸.۲۸	۰.۵۰	۷.۸۷	۱.۳۲	۵.۴۲	۶.۶۴	۱۰
۳۰.۰۷	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۴۴	۴.۵۵	۳۶	۰.۰۰	۶.۶۸	۱۸.۲۹	۰.۵۰	۷.۸۷	۱.۳۲	۴.۷۴	۲.۷۱	۱۱
۳۱.۸۸	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۲۸	۱.۸۰	۳۷	۰.۰۰	۵.۹۲	۱۸.۳۰	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۴.۲۴	۳.۱۳	۱۲
۳۴.۱۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۸۳	۰.۴۸	۳۸	۰.۶۰	۴.۳۲	۱۸.۳۰	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۵۰	۰.۹۷	۱۳
۳۶.۵۰	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۷۵	۱.۵۱	۳۹	۰.۷۰	۳.۲۲	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۹۹	۵.۴۸	۱۴
۳۹.۱۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۴۵	۰.۵۴	۴۰	۰.۳۵	۲.۵۶	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۴.۴۴	۵.۷۹	۱۵
۴۱.۶۳	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۶۱	۲.۱۱	۴۱	۰.۸۰	۱.۱۱	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۶۴	۱.۲۵	۱۶
۴۴.۱۷	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۵۶	۱.۴۰	۴۲	۱.۲۴	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۶۶	۳.۷۱	۱۷
۴۶.۳۳	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۹۴	۳.۰۸	۴۳	۱.۹۷	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۲۶	۲.۴۵	۱۸
۴۸.۵۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۸۷	۱.۶۶	۴۴	۲.۲۴	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۸۳	۵.۲۶	۱۹
۵۰.۶۹	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۹۶	۲.۲۳	۴۵	۱.۳۶	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۴.۹۷	۸.۳۹	۲۰
۵۲.۵۲	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۲۷	۳.۱۹	۴۶	۱.۰۹	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۴.۲۷	۲.۵۵	۲۱
۵۴.۵۲	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۰۹	۱.۵۸	۴۷	۱.۲۷	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۳.۹۱	۲.۵۳	۲۲
۵۶.۶۱	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۰۱	۱.۷۴	۴۸	۲.۴۲	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۹۵	۰.۰۸	۲۳
۵۸.۸۵	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۸۵	۱.۳۹	۴۹	۳.۷۶	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۷۶	۲.۱۷	۲۴
۶۱.۰۹	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۱.۸۶	۱.۸۸	۵۰	۵.۶۲	۰.۰۰	۱۸.۳۱	۰.۵۰	۷.۸۸	۱.۳۲	۲.۲۳	۰.۶۷	۲۵



شکل ۱. نمودار کنترل EWMA برای مثال شبیه‌سازی شده به ازای $C = 1.2$



شکل ۲. نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM برای مثال شبیه‌سازی شده به ازای $C = 1.2$

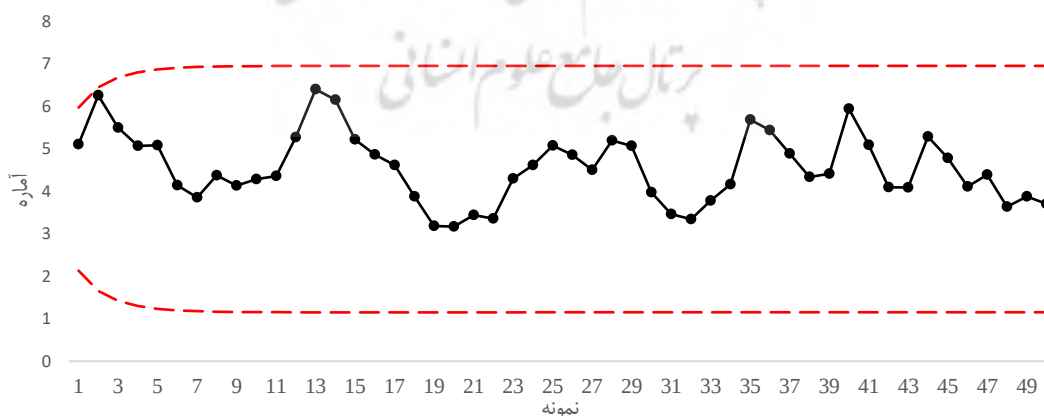
همان‌طور که از اشکال بالا مشاهده می‌شود، شناسایی انحرافات فرآیند در نمودارها متفاوت است. در شکل (۱) مشاهده می‌شود که به ازای تغییری که در پارامتر مقیاس به وجود آمده، نمودار کنترل EWMA هشدار خارج از کنترل نمی‌دهد. هر چند که روند تغییرات قابل مشاهده است اما آماره تحت نظارت هم‌چنان در میان حدود کنترل قرار دارد. همان‌گونه که در تحلیل حساسیت بیان شد، نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM در شناسایی تغییرات کوچک نسبت به نمودار EWMA عملکرد بهتری دارد بنابراین، شکل (۲) نشان می‌دهد که نمودار در نقطه ۳۱ به خوبی انحراف را تشخیص داده و فرآیند را خارج از کنترل اعلام می‌کند. در واقع پس از آن که پارامتر مقیاس دچار انحراف شده، با گذشت ۱۱ مشاهده پس از تغییر، آماره MEC_i^- نمودار Mixed EWMA_CUSUM از حد کنترل فراتر رفته و فرآیند خارج از کنترل است.

طراحی نمودارهای EWMA و Mixed EWMA_CUSUM با استفاده از مثال کاربردی

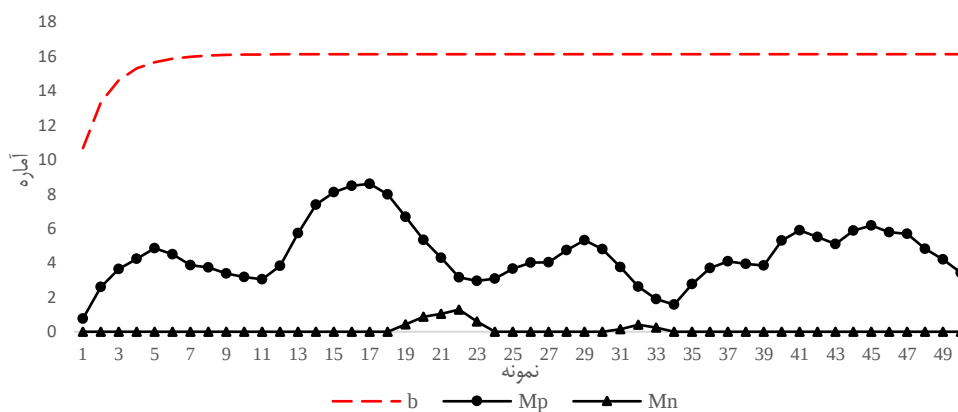
برای نشان دادن کاربرد صنعتی نمودارهای کنترل پیشنهادی، از داده‌های یک مجموعه خودروسازی در کره جنوبی استفاده می‌گردد [۹]. داده‌های اندازه‌گیری شده برای طول عمر یک قطعه از خودرو در دوره زمانی یک ماه می‌باشد. زمان خرابی قطعه از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت $\alpha = 2.5$ و پارامتر مقیاس تحت کنترل $\beta_0 = 1$ پیروی می‌کند. فرض بر این است که $r = 3$ و $ARL_0 = 370$ و $\lambda = 0.25$ می‌باشد. مقادیر آماره‌ها در جدول (۲) گزارش گردیده است. شکل (۳) نمودار کنترل EWMA و شکل (۴) نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM را نمایش می‌دهد.

جدول ۲. مقادیر آماره نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM به ازای $c=1.2$ برای مثال کاربردی

Mn_i	Mp_i	b_i	a_i	UCL_i	LCL_i	Q_i	V_i	i	Mn_i	Mp_i	b_i	a_i	UCL_i	LCL_i	Q_i	V_i	i
۰	۴.۰۲	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۸۵	۴.۱۹	۲۶	۰	۰.۷۶	۱۰.۶۶	۰.۲۹	۵.۹۶	۲.۱۳	۵.۱۰	۸.۲۶	۱
۰	۴.۰۳	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۵۰	۳.۴۵	۲۷	۰	۲.۶۰	۱۳.۳۲	۰.۳۶	۶.۴۴	۱.۶۵	۶.۲۵	۹.۶۹	۲
۰	۴.۷۳	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۱۹	۷.۳۷	۲۸	۰	۳.۶۴	۱۴.۶۱	۰.۴۰	۶.۶۷	۱.۴۲	۵.۴۹	۳.۲۳	۳
۰	۵.۳۱	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۰۶	۴.۶۷	۲۹	۰	۴.۲۴	۱۵.۲۸	۰.۴۲	۶.۷۹	۱.۳۰	۵.۰۶	۳.۷۶	۴
۰	۴.۷۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۹۷	۰.۷۰	۳۰	۰	۴.۸۴	۱۵.۶۵	۰.۴۳	۶.۸۶	۱.۲۳	۵.۰۸	۵.۱۴	۵
۰.۱۴	۳.۷۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۴۶	۱.۹۳	۳۱	۰	۴.۵۰	۱۵.۸۵	۰.۴۳	۶.۹۰	۱.۲۰	۴.۱۴	۱.۳۱	۶
۰.۴۱	۲.۶۱	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۳۴	۲.۹۷	۳۲	۰	۳.۸۶	۱۵.۹۷	۰.۴۴	۶.۹۲	۱.۱۸	۳.۸۵	۲.۹۸	۷
۰.۲۴	۱.۹۰	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۷۸	۵.۰۹	۳۳	۰	۳.۷۴	۱۶.۰۳	۰.۴۴	۶.۹۳	۱.۱۶	۴.۳۷	۵.۹۲	۸
۰	۱.۵۷	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۱۶	۵.۳۰	۳۴	۰	۳.۳۸	۱۶.۰۷	۰.۴۴	۶.۹۳	۱.۱۶	۴.۱۳	۳.۴۲	۹
۰	۲.۷۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۶۸	۱۰.۲۳	۳۵	۰	۳.۱۷	۱۶.۰۹	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۲۸	۴.۷۲	۱۰
۰	۳.۷۰	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۴۳	۴.۶۹	۳۶	۰	۳.۰۴	۱۶.۱۰	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۳۶	۴.۶۰	۱۱
۰	۴.۰۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۸۸	۳.۲۲	۳۷	۰	۳.۸۲	۱۶.۱۰	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۲۷	۷.۹۹	۱۲
۰	۳.۹۳	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۳۳	۲.۶۸	۳۸	۰	۵.۷۲	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۶.۳۹	۹.۷۶	۱۳
۰	۳.۸۵	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۴۱	۴.۶۵	۳۹	۰	۷.۳۸	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۶.۱۴	۵.۳۹	۱۴
۰	۵.۳۰	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۹۳	۱۰.۵۲	۴۰	۰	۸.۱۰	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۲۱	۲.۴۱	۱۵
۰	۵.۸۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۰۸	۲.۵۲	۴۱	۰	۸.۴۷	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۸۶	۳.۸۱	۱۶
۰	۵.۴۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۰۹	۱.۱۱	۴۲	۰	۸.۵۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۶۱	۳.۸۶	۱۷
۰	۵.۰۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۰۸	۴.۰۵	۴۳	۰	۷.۹۷	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۸۷	۱.۶۶	۱۸
۰	۵.۸۸	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۲۸	۸.۸۸	۴۴	۰.۴۲	۶.۶۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۱۸	۱.۱۱	۱۹
۰	۶.۱۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۷۷	۳.۲۵	۴۵	۰.۸۷	۵.۲۴	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۱۶	۳.۱۲	۲۰
۰	۵.۷۸	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۱۰	۲.۰۹	۴۶	۱.۰۴	۴.۲۹	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۴۳	۴.۲۴	۲۱
۰	۵.۶۸	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۳۹	۵.۲۴	۴۷	۱.۲۹	۳.۱۵	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۳۵	۳.۱۲	۲۲
۰	۴.۸۲	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۶۳	۱.۳۶	۴۸	۰.۶۰	۲.۹۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۲۹	۷.۱۰	۲۳
۰	۴.۲۰	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۸۷	۴.۵۹	۴۹	۰	۳.۰۸	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۴.۶۱	۵.۵۶	۲۴
۰	۳.۴۱	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۳.۷۰	۳.۱۸	۵۰	۰	۳.۶۶	۱۶.۱۱	۰.۴۴	۶.۹۴	۱.۱۵	۵.۰۷	۶.۴۴	۲۵



شکل ۳. نمودار کنترل EWMA برای مثال کاربردی

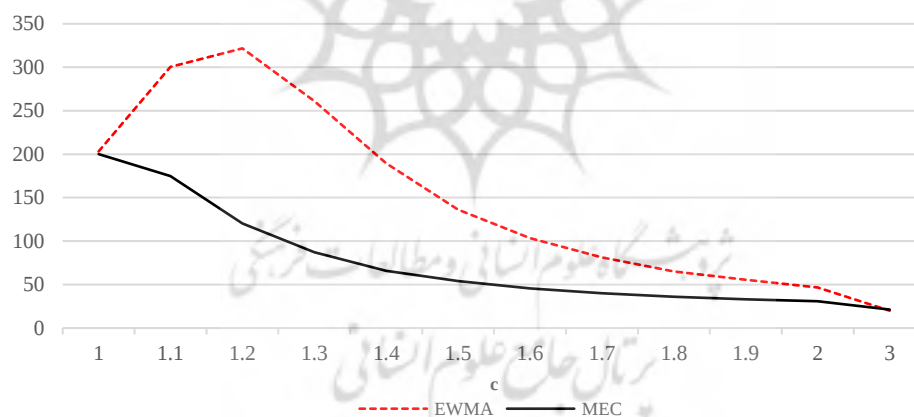


شکل ۴. نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM برای مثال کاربردی

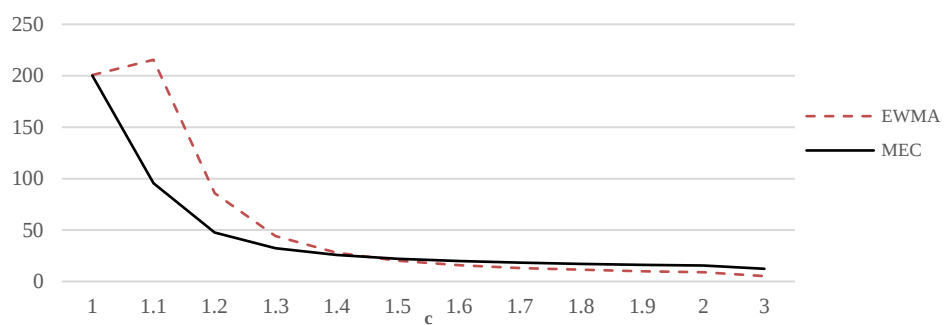
همان گونه که از اشکال بالا پیداست، هر دو نمودار فرآیند را در حالت تحت کنترل نشان می‌دهند و هیچ مشاهده‌ای از حدود کنترل خارج نشده زیرا، تغییری در پارامتر مقیاس توزیع وایبول رخ نداده است که موجب انحراف فرآیند گردد.

مقایسه عملکرد نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM

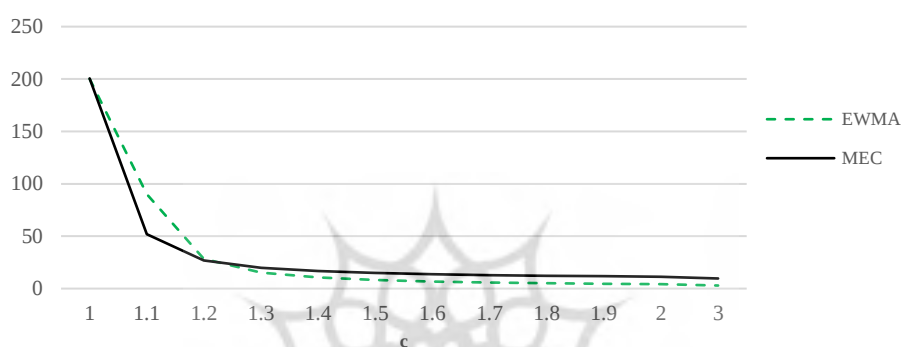
در این بخش، عملکرد نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA-CUSUM با هم مقایسه خواهند شد. لازم به ذکر است هیچ یک از این نمودارها در همه شرایط نسبت به دیگری برتری ندارد و نمی‌توان گفت یک نمودار از نمودار دیگر برای کشف تمام تغییرات در فرآیند لزوماً عملکرد و تشخیص بهتری داشته است، لذا برتری نمودارها به عواملی از جمله: تنظیمات پارامترها و مقادیر مختلف ثابت تغییر بستگی دارد. در این جا چند نمونه از مقایسات میان نمودارها به ازای پارامترهای مختلف آورده شده است.



شکل ۵: مقایسه منحنی‌های ARL_1 نمودار کنترل MEC به ازای $ARL_0 = 200$ ، $\lambda = 0.1$ ، $\alpha^* = 0.5$ ، $r = 2$ ، $\alpha = 0.5$ با نمودار کنترل EWMA به ازای $ARL_0 = 200$ ، $\lambda = 0.1$ ، $r = 2$ ، $\alpha = 0.5$



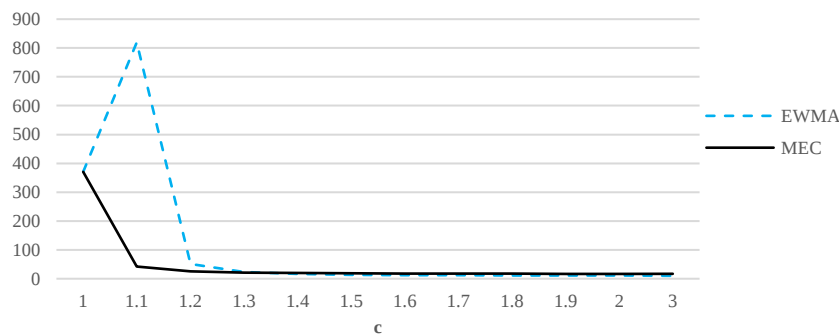
شکل ۶. مقایسه منحنی‌های ARL_1 نمودار کنترل MEC به ازای $\alpha = 1, r = 3, a^* = 0.5, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$ با نمودار کنترل EWMA به ازای $\alpha = 1, r = 3, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$



شکل ۷. مقایسه منحنی‌های ARL_1 نمودار کنترل MEC به ازای $\alpha = 1.5, r = 3, a^* = 0.5, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$ با نمودار کنترل EWMA به ازای $\alpha = 1.5, r = 3, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$



شکل ۸. مقایسه منحنی‌های ARL_1 نمودار کنترل MEC به ازای $\alpha = 0.5, r = 1, a^* = 0.5, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$ با نمودار کنترل EWMA به ازای $\alpha = 0.5, r = 1, \lambda = 0.1, ARL_0 = 200$



شکل ۹. مقایسه منحنی‌های ARL_1 نمودار کنترل MEC به ازای $\alpha = 0.05, r = 1, a^* = 0.5, \lambda = 0.1, ARL_0 = 370$ با نمودار کنترل EWMA به ازای $\alpha = 0.05, r = 1, \lambda = 0.1, ARL_0 = 370$

از مقایسه عملکرد میان نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM که در شکل‌های (۵-۹) ارائه شده است، می‌توان نتیجه گرفت، هرگاه تشخیص تغییرات کوچک در فرآیند ملاک سنجش نمودارها باشد، نمودار کنترل MEC بهتر عمل می‌کند. از آن جایی که هدف این پژوهش، شناسایی تغییرات کوچک در میانگین طول عمر محصول است، با یک مقایسه ساده متوجه می‌شویم که نمودار کنترل ترکیبی MEC طراحی شده، از نمودار EWMA در کشف تغییرات عملکرد بهتری داشته است.

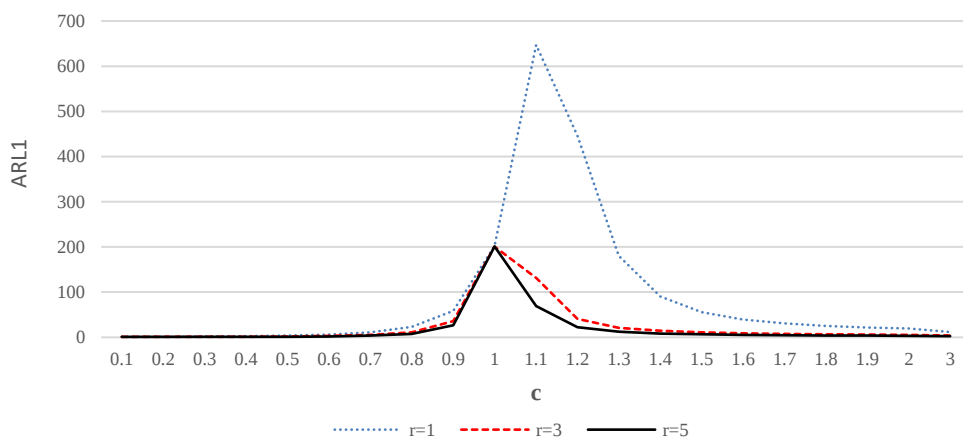
تحلیل حساسیت نمودارهای کنترل پیشنهادی

تشخیص درست نقاط خارج از کنترل و شناسایی زود هنگام تغییر در فرآیند، نشان دهنده توانایی یک نمودار کنترل است. متوسط طول دنباله یکی از شاخص‌های مهم برای ارزیابی طرح‌های کنترل فرآیند آماری است که در برخی منابع و مقالات از آن به عنوان میانگین طول اجرا یا متوسط طول تسلسل نیز نام برده می‌شود. میانگین طول دنباله، متوسط تعداد نقاطی است که بر روی نمودار کنترل رسم می‌شود تا یک نقطه خارج از حدود کنترل قرار گیرد. شرایط فوق بیانگر شرایط یک توزیع هندسی است، به طوری که اولین موفقیت همان سیگنال خارج از کنترل است. بنابراین برای نمودارهای کنترل، مقدار ARL را می‌توان از میانگین متغیر تصادفی هندسی به دست آورد. متوسط تعداد نقاطی که بر روی نمودار کنترل رسم می‌شود تا آن که به اشتباه یک نقطه خارج از کنترل مشاهده شود، حال آن که در واقع فرآیند هم‌چنان تحت کنترل آماری قرار دارد، میانگین طول دنباله تحت کنترل (ARL_0) است. حال فرض کنید فرآیند به واسطه یک عامل انحراف بادلیل، از شرایط تحت کنترل به شرایط خارج از کنترل آماری منتقل شود، به طوری که میانگین فرآیند تغییر کند یعنی از مقدار اسمی یا مقدار هدف خود به مقدار دیگری شیف‌ت پیدا کند. با این حال متوسط طول دنباله خارج از کنترل (ARL_1)، یعنی به طور متوسط چند نمونه پس از آن که فرآیند در شرایط خارج از کنترل قرار گرفت، یک نقطه در خارج از حدود کنترل قرار می‌گیرد و نمودار کنترل به درستی سیگنال خارج از کنترل صادر می‌کند. در این پژوهش جهت سنجش و ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM از میانگین طول دنباله در حالت خارج از کنترل (ARL_1) استفاده شده است. ابتدا عملکرد نمودار کنترل EWMA و پس از آن عملکرد نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد. سپس مقایسه‌ای میان عملکرد نمودارها صورت گرفته و به برتری هر کدام نسبت به دیگری به ازای تغییرات مختلف در پارامتر تحت نظارت پرداخته می‌شود.

ارزیابی عملکرد نمودار کنترل EWMA

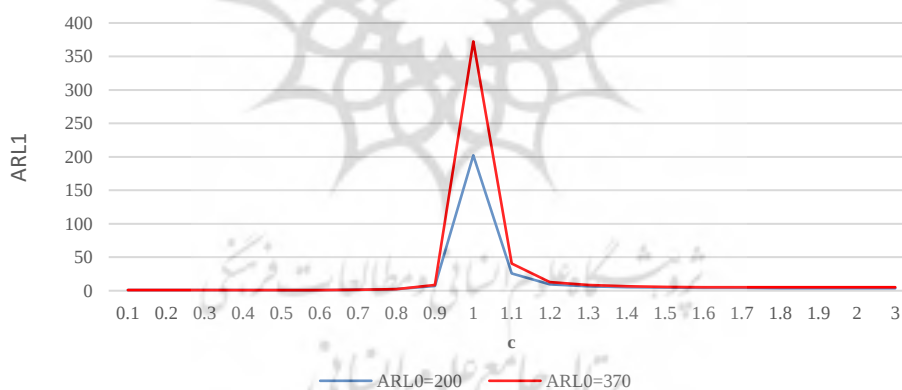
در این بخش مقدار ARL_1 نمودار کنترل EWMA برای پارامترهای تاثیرگذار λ, r, α و به ازای مقادیر مختلف ثابت تغییر c با استفاده از یک الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو حاصل شد که مراحل الگوریتم محاسباتی آن در بخش ۳ بیان شده است. با توجه به نتایج ARL_1 به دست آمده از الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو، تحلیل‌های زیر حاصل می‌گردد:

✓ با افزایش پارامتر (r) ، به ازای ثابت نگه‌داشتن دیگر پارامترها مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است هر چقدر تعداد خرابی‌ها در نمونه تصادفی برای آزمون طول عمر سانسورشدگی نوع دوم بیشتر باشد، شانس کشف تغییر در میانگین عمر نمونه بیشتر خواهد شد و در نتیجه مقدار ARL_1 کاهش خواهد یافت. این امر در شکل (۱۰) به خوبی دیده می‌شود.



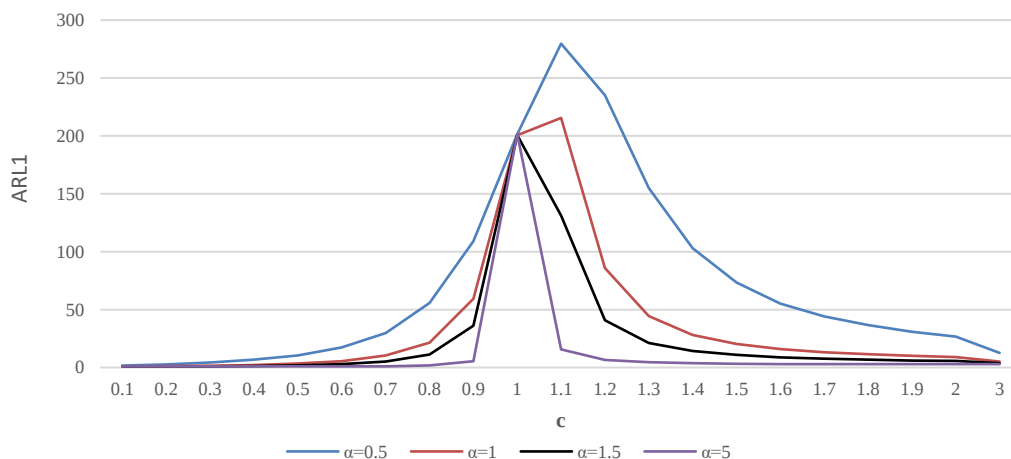
شکل ۱۰. منحنی ARL_1 نمودار کنترل EWMA به ازای پارامترهای $ARL_0=200$ ، $\lambda=0.1$ ، $\alpha=1.5$ و r های مختلف

✓ با افزایش مقدار ARL_0 ، مقدار ARL_1 نیز افزایش می‌یابد. دلیل این امر آن است که با افزایش مقدار ARL_0 ضریب حدود کنترل نمودار افزایش می‌یابد و به دنبال آن حدود کنترل بازتر می‌شوند بنابراین اگر تغییری در فرآیند رخ دهد، نمودار کنترل دیرتر آن را کشف می‌کند و بالعکس. این امر در شکل (۱۱) کاملاً مشهود است.



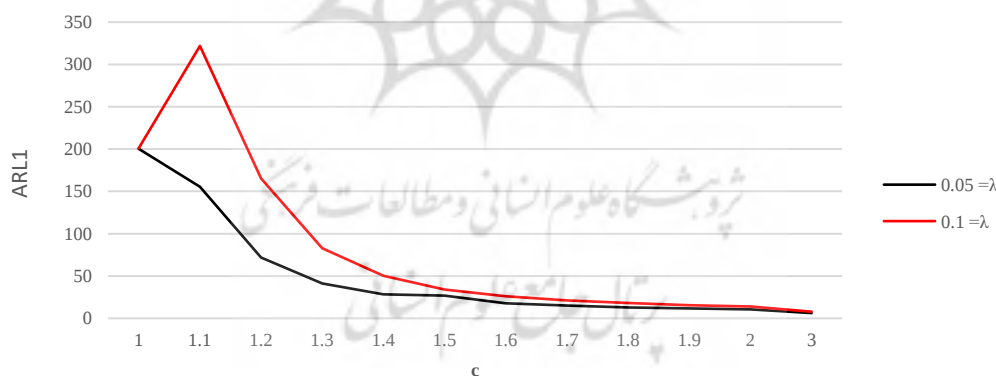
شکل ۱۱. منحنی ARL_1 نمودار کنترل EWMA به ازای پارامترهای $\lambda=0.1$ ، $\alpha=5$ و $r=2$ و ARL_0 های مختلف

✓ با افزایش پارامتر شکل توزیع وایبول (α)، مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش (α)، پارامتر مقیاس توزیع گاما در حالت تحت کنترل (w_0) کاهش یافته و پارامتر مقیاس توزیع گاما در حالت خارج از کنترل (w_1) افزایش می‌یابد و به دنبال آن مقدار ARL_1 نیز کاهش می‌یابد. زیرا آماره سانسور خرابی (v) در حالت خارج از کنترل از پارامترهای r و w_1 پیروی می‌کند و هر چه قدر پارامتر (w_1) به ازای تعداد خرابی ثابت (r) افزایش یابد، قدرت نمودار در تشخیص انحرافات بادلایل افزایش یافته و از آن جایی که توان آزمون با میانگین طول دنباله خارج از کنترل رابطه معکوس دارد پس مقدار ARL_1 روند کاهشی خواهد داشت. این امر در شکل (۱۲) قابل مشاهده است.



شکل ۱۲. منحنی ARL_1 نمودار کنترل EWMA به ازای پارامترهای $ARL_0=200$, $r=3$, $\lambda=0.1$ و α های مختلف

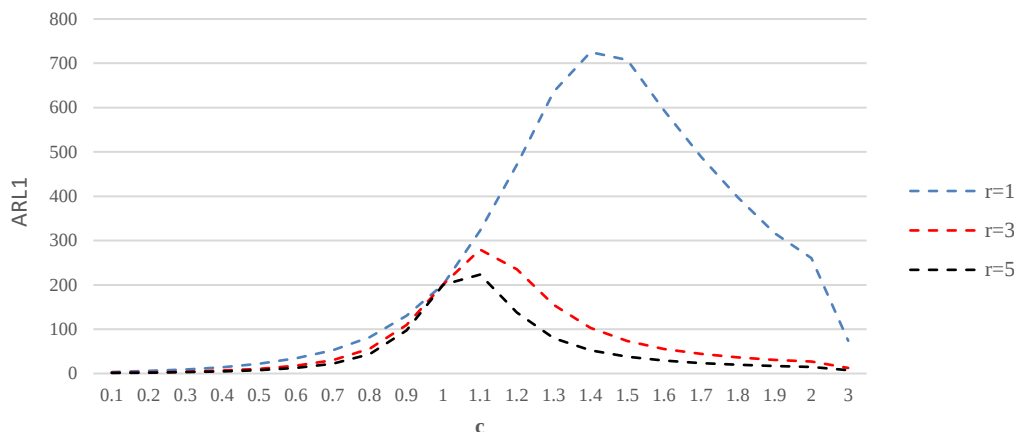
✓ با افزایش مقدار λ و ثابت نگه داشتن دیگر پارامترها، مقدار ARL_1 نیز افزایش می‌یابد و بالعکس. از آن جا که خاصیت پارامتر هموارسازی، وزن‌دهی به مشاهدات فعلی و مشاهدات گذشته فرآیند است لذا هر چقدر مقدار λ بیشتر باشد، به معنای آن است که وزن بیشتری به مشاهده فعلی داده شده و وزن کمتری به مشاهدات گذشته داده می‌شود. تا جایی که اگر مقدار λ برابر با یک اخذ شود نمودار کنترل EWMA دیگر حافظه خود را از دست می‌دهد و مانند یک نمودار کنترل شوهارت تنها نمونه حاضر را پایش می‌کند. هر چقدر مقدار λ کمتر گرفته شود، اهمیت کمتری به مشاهده فعلی و اهمیت بیشتری به روند تغییرات در گذشته فرآیند داده می‌شود. با این وجود اگر پایش تغییرات کوچک و جزئی در پارامتر تحت نظارت مد نظر باشد، مقدار کمتر λ می‌تواند عملکرد نمودار کنترل EWMA را افزایش دهد و به دنبال آن مقدار ARL_1 نیز کاهش می‌یابد. این موضوع در شکل (۱۳) به خوبی دیده می‌شود.



شکل ۱۳. منحنی ARL_1 نمودار کنترل EWMA به ازای پارامترهای $ARL_0=200$, $r=3$, $\alpha=1$ و λ های مختلف

✓ یک پارامتر بسیار مهم که در عملکرد نمودار کنترل EWMA تاثیر چشم‌گیری دارد، پارامتر r که همان تعداد خرابی‌ها در نمونه تصادفی گرفته شده برای آزمون طول عمر است، می‌باشد. همان طور که از شکل (۱۴) نیز پیداست افزایش پارامتر r به شدت مقدار ARL_1 را کاهش داده است. تا جایی که با افزایش هر چه بیشتر پارامتر r به ازای یک مقدار ثابت c مقادیر ARL_1 به یک همگرایی می‌رسند. این امر برای مقدار ثابت c بزرگتر، بیشتر به چشم می‌خورد. همچنین اربیی موجود در مقادیر ARL_1 برای r های کوچک، بیشتر دیده می‌شود و با افزایش پارامتر r این اربیی از بین می‌رود. دلیل این امر آن است که پارامتر r نه تنها تعداد خرابی‌ها در نمونه می‌باشد بلکه

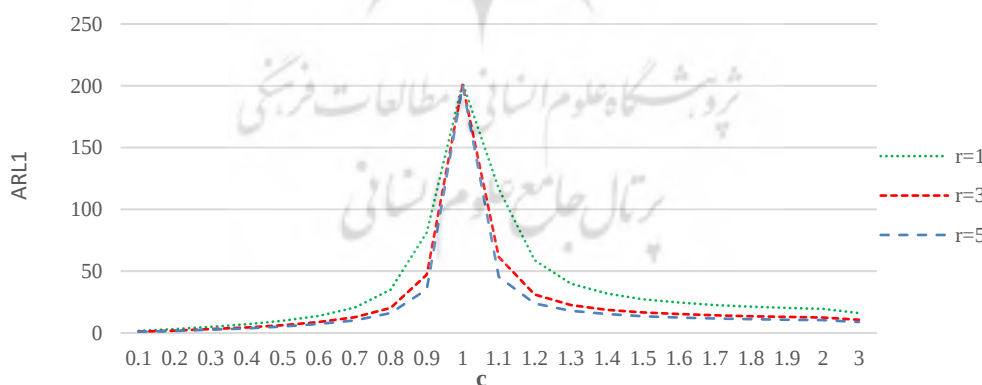
پارامتر شکل توزیع گاما برای آماره آزمون طول عمر یعنی v است و با افزایش پارامتر شکل توزیع گاما این توزیع به صورت حدی به توزیع نرمال میل می‌کند بنابراین افزایش پارامتر r رفته رفته از اریبی ARL_1 می‌کاهد تا جایی که مقدار ARL_1 تقریباً متقارن گردد.



شکل ۱۴. منحنی ARL_1 نمودار کنترل EWMA به ازای پارامترهای $ARL_0=200$, $\lambda=0.1$, $\alpha=0.5$ و r های مختلف

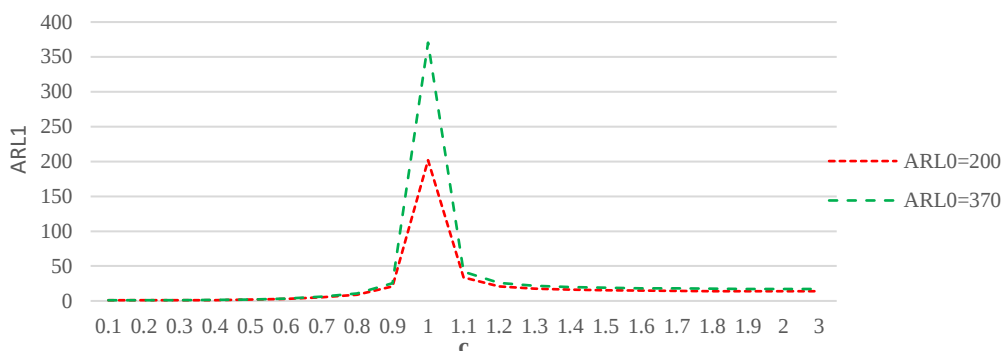
ارزیابی عملکرد نمودار کنترل Mixed EWMA-CUSUM

در این بخش مقدار ARL_1 نمودار کنترل Mixed EWMA-CUSUM به ازای مقادیر مختلف ثابت تغییر c و پارامترهای تاثیرگذار λ , α , r با استفاده از یک الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو حاصل می‌شود که مراحل آن در بخش ۳ ارائه شده است. همانند نمودار کنترل EWMA با افزایش پارامتر (r) ، به ازای ثابت نگه داشتن دیگر پارامترها مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. دلیل این امر آن است که هر چقدر تعداد خرابی‌ها در نمونه تصادفی گرفته شده از توزیع وایبول برای آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی بیشتر باشد، شانس کشف تغییر در میانگین عمر نمونه بیشتر خواهد شد و در نتیجه مقدار ARL_1 کاهش خواهد یافت. این امر در شکل (۱۵) قابل مشاهده است.



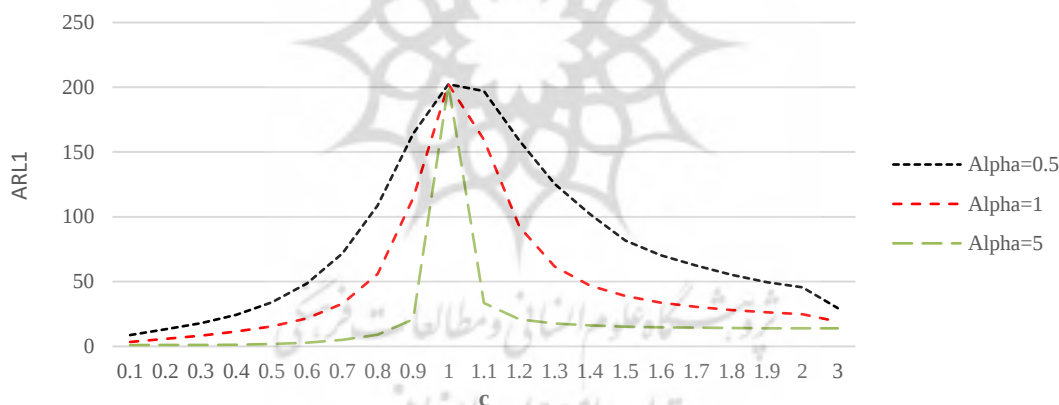
شکل ۱۵. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 200$ و $\lambda = 0.1$ و $\alpha^* = 0.5$ و $\alpha = 1.5$ و r های مختلف

✓ با افزایش میانگین طول دنباله تحت کنترل (ARL_0) به ازای ثابت نگه داشتن دیگر پارامترها، میانگین طول دنباله خارج از کنترل (ARL_1) نیز افزایش یافته است. زیرا با افزایش مقدار ARL_0 ، مقدار ضریب حد کنترل (b^*) افزایش پیدا می‌کند و به دنبال آن حد کنترل متغیر با زمان (b_i) نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه همین عامل موجب می‌گردد که اگر انحرافی در فرآیند رخ دهد، نمودار کنترل دیرتر آن را شناسایی کند و با تاخیر سیگنال خارج از کنترل صادر کند. این امر به خوبی در شکل (۱۶) دیده می‌شود.



شکل ۱۶. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 200$ و $ARL_0 = 370$ و پارامترهای $\lambda = 0.1$ و $a^* = 0.5$ و $\alpha = 1$ و $r = 1$

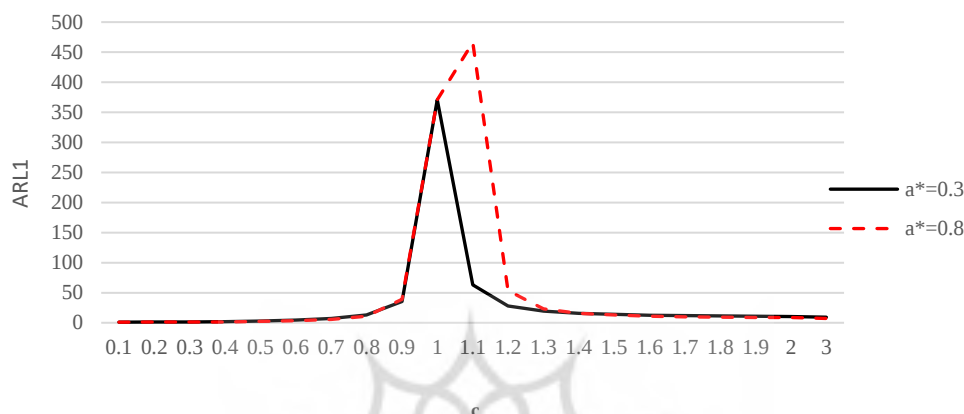
مانند نمودار کنترل EWMA با افزایش پارامتر شکل (α) ، مقدار ARL_1 کاهش می‌شود. در واقع با افزایش (α) ، پارامتر مقیاس توزیع گاما در حالت تحت کنترل (w_0) کاهش یافته و پارامتر مقیاس توزیع گاما در حالت خارج از کنترل (w_1) افزایش می‌یابد و به دنبال آن توان آزمون افزایش خواهد یافت و در نهایت مقدار ARL_1 کاهش می‌یابد. زیرا آماره آزمون عمر سانسور خرابی (v) در حالت خارج از کنترل از پارامترهای r و w_1 پیروی می‌کند و هر چقدر پارامتر (w_1) به ازای تعداد خرابی ثابت (r) افزایش یابد، قدرت نمودار در تشخیص انحرافات بادلیل افزایش یافته و از آن جایی که توان آزمون با میانگین طول دنباله خارج از کنترل رابطه معکوس دارد پس مقدار ARL_1 روند کاهشی خواهد داشت. این امر در شکل (۱۷) به خوبی دیده می‌شود.



شکل ۱۷. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 200$ و $a^* = 0.5$ و $\lambda = 0.1$ و $r = 1$ و $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 1$ و $\alpha = 5$

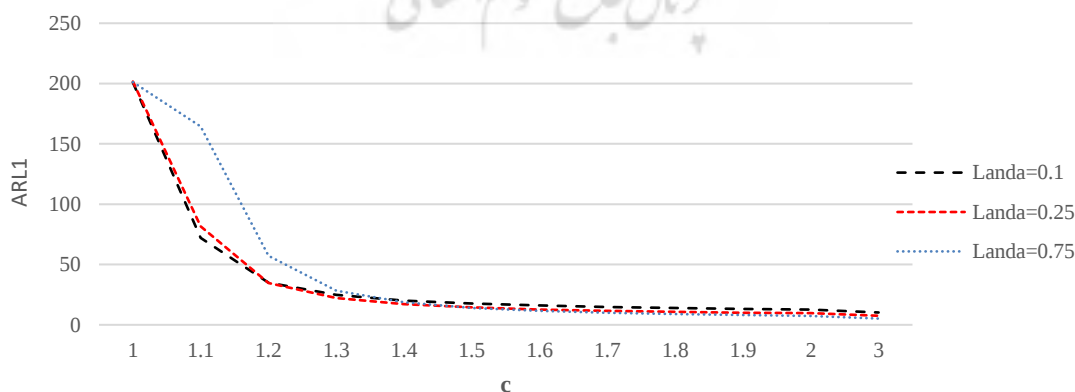
به ازای یک مقدار ثابت $ARL_0 = 370$ و با فرض ثابت نگه داشتن پارامترهای $\alpha = 2.5$ و $\lambda = 0.5$ و دیگر مفروضات، با افزایش پارامتر a^* و به ازای تغییرات مختلف در پارامتر مقیاس، مقادیر متفاوتی از ARL_1 به دست می‌آید. ثابت a^* همان ضریب مقدار مرجع متغیر با زمان (a_i) برای نمودار کنترل ترکیبی می‌باشد. مقدار مرجع a_i برابر با ضریبی از شیفیت بر حسب واحد انحراف معیار آماره Q_i یعنی σQ_i انتخاب می‌شود. همان گونه که از شکل (۱۸) پیداست، به هنگام بهبود فرآیند در زمانی که $c = 0.9$ می‌باشد عملکرد نمودار برای a^* کمتر، بهتر است و برای تغییرات بزرگتر از $(0.1 \leq c \leq 0.8)$ عملکرد نمودار برای a^* بیشتر، بهتر است. همچنین در زمان زوال فرآیند و کاهش میانگین، به ازای تغییرات $(1.1 \leq c \leq 1.4)$ عملکرد نمودار برای a^* کمتر، بهتر است و برای تغییرات بزرگتر $(1.5 \leq c \leq 3)$ عملکرد نمودار برای a^* بیشتر، بهتر است. در نهایت این نتیجه را می‌توان گرفت که به ازای تغییرات کوچک در پارامتر مقیاس توزیع وایبول، نمودار کنترل ترکیبی در کشف انحرافات با دلیل برای a^* کمتر، بهتر عمل می‌کند و هر چه تغییرات در پارامتر

مقیاس بیشتر شود و میانگین توزیع وایبول کاهش یابد، نمودار برای a^* بیشتر، بهتر عمل می‌کند. همچنین مقدار بهینه b^* برای محاسبه حد کنترل بر حسب متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل و مقدار a^* تعیین می‌شود که خود مقدار a^* نیز توسط کارشناس فرآیند تعیین می‌گردد. در نهایت انتخاب یک مقدار مناسب برای ضریب a^* به حساسیت فرآیند تحت نظارت بستگی دارد. به طور کلی هر چقدر مقدار تغییر به وجود آمده در پارامتر تحت پایش بیشتر باشد، مقدار بیشتر a^* عملکرد نمودار را بهبود می‌بخشد و هر چقدر مقدار تغییر در پارامتر تحت پایش کمتر باشد، مقدار کمتر a^* می‌تواند در شناسایی انحرافات غیر تصادفی فرآیند، عملکرد نمودار کنترل ترکیبی را به طور قابل توجهی افزایش دهد.



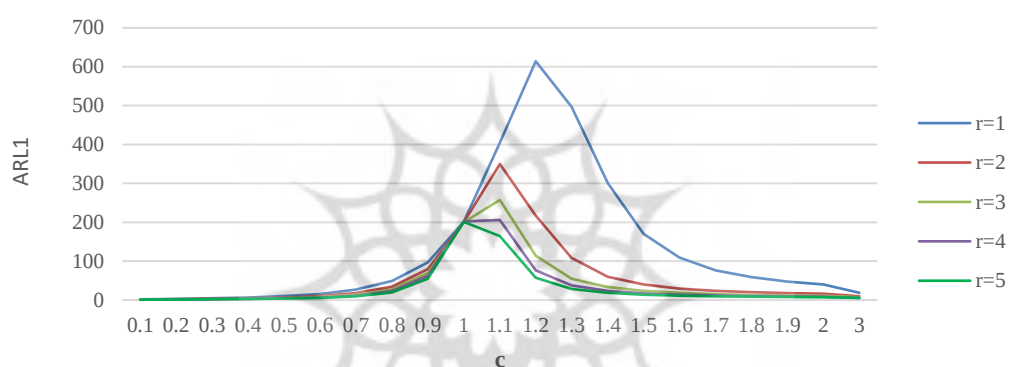
شکل ۱۸. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 370$ و $\lambda = 0.5$ و $r = 2$ و $\alpha = 2.5$ و $a^* = 0.3$ و $a^* = 0.8$

✓ برای تشخیص تغییرات کوچک در فرآیند، λ کمتر بهتر است و برای تشخیص تغییرات بزرگ در فرآیند، λ بیشتر بهتر است. به ازای تغییرات کوچک ($1 \leq c \leq 1.2$)، نمودار کنترل برای $\lambda = 0.1$ ، ARL_1 کمتری داشته و به ازای تغییرات متوسط ($1.2 \leq c \leq 1.5$)، نمودار برای $\lambda = 0.25$ ، نمودار کنترل از ARL_1 کمتری برخوردار بوده و به ازای تغییرات بزرگ ($1.5 \leq c \leq 3$) برای $\lambda = 0.75$ ، نمودار کنترل دارای ARL_1 پایین‌تری بوده و این یعنی هر چه قدر انحراف در فرآیند کوچک‌تر باشد مقدار وزنی که به نمونه فعلی یا در واقع به آخرین مشاهده داده می‌شود بهتر است کمتر باشد و وزن بیشتری به نمونه‌های پیشین داده شود بلکه توان آزمون افزایش یابد و نمودار عملکرد بهتری داشته باشد و برعکس، هنگامی که انحراف در فرآیند بزرگ باشد، مقدار وزنی که به نمونه آخر داده می‌شود باید بیشتر باشد و وزن کمتری به نمونه‌های قبلی داده شود تا نمودار در شناسایی شیفت‌های بزرگتر بهتر عمل کند. این امر در شکل (۱۹) به خوبی دیده می‌شود.

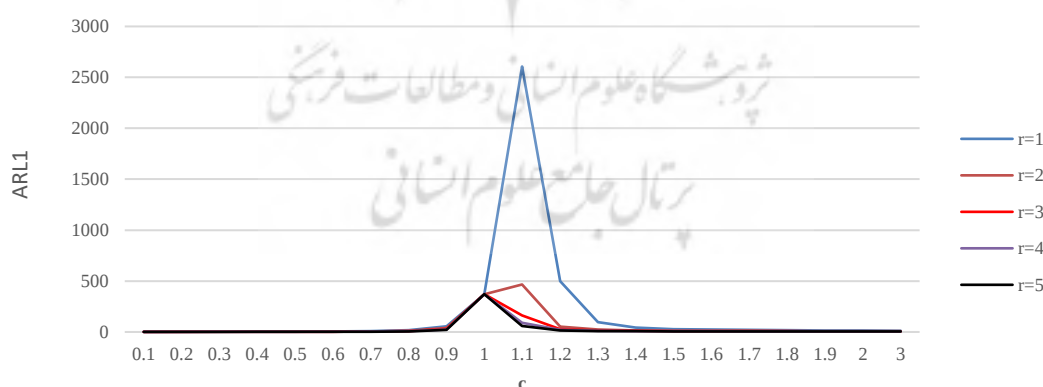


شکل ۱۹. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 200$ و $\alpha = 1$ و $r = 5$ و $a^* = 0.5$ و برای λ های مختلف

✓ از نمودارهای ارائه شده مشخص است که مقدار ARL_1 نامتقارن و اریب می‌باشد. به این صورت که مقادیر ARL_1 به ازای $(c > 1)$ بزرگتر از مقادیر ARL_1 به ازای $(c < 1)$ هستند. بنابراین نمودار کنترل MEC همانند نمودار کنترل EWMA انحرافات را به ازای $(c < 1)$ سریع‌تر شناسایی می‌کند. این امر در شکل (۲۰) به وضوح دیده می‌شود. همچنین، زمانی که $(c = 1)$ می‌باشد و هیچ گونه تغییری در وضعیت فرآیند به وجود نیامده که اصطلاحاً می‌گویند فرآیند در حالت تحت کنترل قرار دارد، $ARL_0 = ARL_1$ است. یک نمودار کنترل زمانی بهترین عملکرد را دارد که بیشترین مقدار ARL_1 آن در نقطه $(c = 1)$ باشد و هر زمان انحرافی در پارامتر فرآیند رخ بدهد به ازای $(c > 1)$ و $(c < 1)$ ، مقدار ARL_1 آن کاهش یابد. از طرفی نمودار کنترل Mixed EWMA-CUSUM برای λ های بزرگ و به ازای تغییرات کوچک اریب است، یعنی پیک ARL_1 دیگر در زمان $(c = 1)$ نیست و به ازای $(c > 1)$ مقدار آن کاهش نمی‌یابد بلکه افزایش می‌یابد و این افزایش پس از مدتی دوباره کاهش می‌یابد. البته همان طور که پیشتر ذکر شد پارامتر r عامل موثری در بهبود عملکرد نمودار کنترل است به گونه‌ای که با افزایش مقدار r رفته رفته از مقدار ARL_1 کاهش یافته و میزان اریبی آن به ازای r بیشتر، کاهش می‌یابد تا جایی که به ازای $r = 5$ این اریبی از بین می‌رود و مقدار بیشینه ARL_1 در همان نقطه $(c = 1)$ قرار می‌گیرد و سپس به ازای $(c > 1)$ روند کاهشی را طی می‌کند. این قضیه در اشکال (۲۰) و (۲۱) به خوبی نمایان است.



شکل ۲۰. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 200$ و $\lambda = 0.75$ و $\alpha^* = 0.5$ و $\alpha = 1$ و r مختلف



شکل ۲۱. منحنی ARL_1 به ازای $ARL_0 = 370$ و $\lambda = 0.5$ و $\alpha^* = 0.8$ و $\alpha = 2.5$ و r مختلف

در حالت حدی توزیع وایبول با افزایش پارامتر شکل، به سوی توزیع نرمال میل خواهد کرد و همین امر موجب می‌گردد که منحنی متوسط طول دنباله نمودار کنترل MEC با افزایش پارامتر شکل توزیع وایبول تقریباً متقارن گردد به طوری که تفاوت مقدار اریبی منحنی ARL_1 نمودار کنترل ترکیبی برای پارامترهای شکل مختلف در اشکال بالا کاملاً واضح است. در واقع با افزایش پارامتر شکل توزیع وایبول

نه تنها عملکرد نمودار کنترل افزایش می‌یابد بلکه میزان اریبی منحنی ARL_1 آن کاهش می‌یابد و در حالت حدی به یک منحنی نرمال میل می‌کند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، نمودارهای کنترل EWMA و Mixed EWMA_CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی خرابی طراحی شده‌اند. هدف از طراحی این نمودارهای کنترل، نظارت بر میانگین طول عمر محصولات می‌باشد. در این تحقیق فرض بر این است که طول عمر محصولات از توزیع وایبول با پارامتر شکل ثابت و معلوم و پارامتر مقیاس متغیر و مجهول پیروی می‌کند. در واقع تغییر در میانگین طول عمر نمونه تحت تاثیر تغییر در پارامتر مقیاس توزیع وایبول می‌باشد. مقادیر ARL_1 برای نمودارهای کنترل پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای تاثیرگذار از طریق الگوریتم‌های شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه گردیده و نتایج آن به وسیله نمودار به ازای پارامترهای مختلف نشان داده شده‌اند. نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM نسبت به نمودار کنترل EWMA در کشف تغییرات کوچک و حساس برتری قابل توجهی داشت. ساختار نمودار کنترل Mixed EWMA_CUSUM طوری طراحی شده که با ترکیب دو نمودار کنترل باحافظه EWMA و CUSUM، در تشخیص انحرافات کوچک به وجود آمده در میانگین فرآیند حساس باشد. به عنوان تحقیقات آتی در زمینه طراحی نمودارهای کنترل تحت آزمون طول عمر، طراحی یک نمودار کنترل CUSUM تحت آزمون طول عمر سانسورشدگی نوع دوم، طراحی نمودارهای کنترل شوهارت تحت آزمون طول عمر سانسور پیشرونده و طراحی دیگر نمودارهای کنترل ترکیبی تحت آزمون طول عمر سانسور هیبریدی پیشنهاد می‌شوند.

تعارض منافع. برای ارائه مطالب و نگارش این مقاله هیچ‌گونه کمک مالی از هیچ فرد، نهاد و سازمانی دریافت نشده است و نتایج و دستاوردهای این مقاله به نفع یا ضرر سازمان یا فردی خاص نخواهد بود. حضور نویسندگان در این پژوهش به عنوان شاهدی بی‌طرف ولی متخصص بوده است و نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منافی ندارند.

منابع

1. Adeoti, O. A. (2020). On control chart for monitoring exponentially distributed quality characteristic. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(2), 295–305, <http://doi.org/10.1177/0142331219868595>.
2. Alghamdi, S. A. D., Aslam, M., Khan, K., Jun, C. H. (2017). A Time Truncated Moving Average Chart for the Weibull Distribution. *IEEE Access*, 5, 7216–7222, <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2697040>.
3. Ali, S., Shamim, R., Shah, I., Alrweili, H., & Marcon, G. (2023). Memory-type control charts for censored reliability data. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(6), 2365–2384, <http://doi.org/10.1002/qre.3347>.
4. Aslam, M., Saghir, A., Ahmad, L. (2020). *Introduction to statistical process control*. John Wiley & Sons, <http://doi.org/10.1002/9781119528425>.
5. Baklizi, A., Ghannam, S. A. (2022). An attribute control chart for the inverse Weibull distribution under truncated life tests. *Heliyon*, 8(12), e11976, <http://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e11976>.
6. Fadaei, S., Pouya, A., & Kazemi, M. (2015). Development of fuzzy statistical process control chart for defect ratio monitoring. *Industrial Management Perspective*, 5(3), 91–116. (In Persian).
7. Faraz, A., Saniga, E. M., & Heuchenne, C. (2015). Shewhart control charts for monitoring reliability with Weibull lifetimes. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(8), 1565–1574, <http://doi.org/10.1002/qre.1692>.
8. Jun, C. H., Lee, H., Lee, S. H., Balamurali, S. (2010). A variables repetitive group sampling plan under failure-censored reliability tests for Weibull distribution. *Journal of Applied Statistics*, 37(3), 453–460, <http://doi.org/10.1080/02664760802715914>.
9. Khan, N., Aslam, M., Raza, S. M. M., Jun, C. H. (2019). A new variable control chart under failure-censored reliability tests for Weibull distribution. *Quality and Reliability Engineering International*, 35(2), 572–581, <http://doi.org/10.1002/qre.2422>.
10. Khan, N., Srinivasa Rao, G., Aslam, M. (2018). Design of chart for a Birnbaum Saunders distribution under accelerated hybrid censoring. *Journal of Statistics and Management Systems*, 21(8), 1419–1432, <http://doi.org/10.1080/09720510.2018.1470753>.

11. Kumar, P. (2016). *Industrial Engineering and Management*. Delhi: Pearson India Education Services.
12. Li, C., Xiao, X. (2023). On censoring time in statistical monitoring of lifetime data. *Technometrics*, 65(3), 418–431, <http://doi.org/10.1080/00401706.2023.2177351>.
13. Mohammadipour, P., Farughi, H., Rasay, H., Arkat, J. (2021). Designing Exponentially Weighted Moving Average control charts under failure censoring reliability tests. *International Journal of Engineering*, 34(11), 2398–2407, <http://doi.org/10.5829/IJE.2021.34.11B.03>.
14. Mohammdaipour, P., Farughi, H., Rasay, H. (2023). Manufacturing Process Optimization to Increase Product Reliability by Control Charts. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, 8(1), 1–12, <http://doi.org/10.22070/jqepo.2022.15321.1212>.
15. Rao, G. S. (2018). A control chart for time truncated life tests using exponentiated half logistic distribution. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 12(1), 125–131, <http://doi.org/10.18576/amis/120111>.
16. Rasay, H. (2021). Monitoring lifetime data for a failure censoring reliability test with replacement using Shewhart type and exponentially weighted moving average control charts. *Scientia Iranica*, <http://doi.org/10.24200/sci.2021.56498.4771>.
17. Rasay, H., Arshad, H. (2020). Designing variable control charts under failure censoring reliability tests with replacement. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 42(15), 3002–3011, <http://doi.org/10.1177/0142331220938206>.
18. Rash, S. (2024). Evaluating the Quality of Manufactured Products by Providing an Approach based on the ANFIS Neural-Fuzzy Network (Case Study: Khazar Plastic Manufacturing and Industrial Company). *Journal of Industrial Management Perspective*, 14(1), 114–134, <http://doi.org/10.48308/JIMP.14.1.114>.
19. Raza, S. M. M., Sial, M. H., Hassan, N. U., Mekiso, G. T., Tashkandy, Y. A., Bakr, M. E., Kumar, A. (2024). Use of improved memory type control charts for monitoring cancer patients recovery time censored data. *Scientific Reports*, 14(1), 5604, <http://doi.org/10.1038/s41598-024-55731-0>.
20. Sadeghi, H., Farughi, H., Kalavandi, F., Salgi, M. (2023). Economic production system planning considering variable demand and random machine failures. *Industrial Management Perspective*, 13(3), 93–126, <http://doi.org/10.48308/jimp.13.3.93>. (In Persian).

