Journal of Securities Exchange

Securities & Exchange Organization, Research, Development & Islamic Studies (RDIS)
Journal of Securities and Exchange, Summer 2024, V. 17, No.66, pp. 29-54

The Effect of Skewness and Kurtosis on Option Pricing Under Non-Normal Distribution[1]

Mohammad Reza Haddadi[2], Hossein Nasralahi[3]

Received: 2023/12/31
Accepted: 2024/05/21

Research Paper

Abstract

The Black-Scholes model is used to price a wide range of options contracts. The basic assumption in this model is to follow the normal distribution of returns. However, the reality of the market indicates the skewness and abnormal kurtosis of the data, which causes a decrease in the accuracy of the option price calculation. The main goal of this research is to determine the option price in data with non-normal skewness and kurtosis. In this regard, the option price was determined using two models, Black Shoals and Gram Charlier. For this purpose, the data of Iran Khodro in 2020 -7-27 to 2023-12-29 and Shasta in the period of 2022-5-26 to 2023-12-29 have been used. Hyper-skewness is used for the first time in domestic financial literature in this research and it was shown that this factor increases the accuracy of option pricing. The results of this research show. Shasta has more abnormal curvature and kurtosis than the car. The option price calculated with the Gram-Charlier model shows a lower error compared to the market price than the Black-Scholes model in Shasta. Therefore, Gram Charlie model has more flexibility than the Black Shoals model with abnormal skewness and kurtosis.

Key Words: Options, Black-Scholes Model, Gram-Charlier Model, Skewness, Kurtosis.

JEL Classification: G11, G12.

---

1. doi: 10.22034/JSE.2024.12400.2244

2. Associate Professor, Department of Zagros Financial Research Group, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. (haddadi@abru.ac.ir).

3. Ph.D. Student, Department of Financial Mathematics, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran. (Corresponding Author). (hosein.nasrolahi@abru.ac.ir).

فصلنامه بورس اوراق بهادار

سازمان بورس و اوراق بهادار، مرکز پژوهش، توسعه و مطالعات اسلامی

فصلنامه بورس اوراق بهادار، سال هفدهم، شماره ٦٦، تابستان ۱۴۰۳، صص ٥٤-٢٩

اثر چولگی و کشیدگی بر قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت توزیع غیرنرمال[1]

محمدرضا حدادی[2]، حسین نصرالهی[3]

مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۰۱

چکیده

مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری طیف وسیعی از قراردادهای اختیار معامله استفاده می‌شود. فرض اساسی در این مدل پیروی از توزیع نرمال بازده‌ها است. اما واقعیت بازار از چولگی و کشیدگی غیر نرمال داده‌ها حکایت دارد که همین موضوع باعث کاهش دقت در محاسبه قیمت اختیار می‌شود. هدف اصلی این پژوهش تعیین قیمت اختیار در داده‌های با چولگی و کشیدگی غیر نرمال است. در این راستا به تعیین قیمت اختیار در دو مدل بلک شولز و گرام چارلیه پرداخته‌شده است. برای این منظور، از داده‌های ایران‌خودرو در بازه ۱۳۹۹/۵/۶ تا ۱۴۰۲/۸/۱۰ و شستا در بازه ۱۴۰۱/۵/۳ تا ۱۴۰۲/۸/۱۰ استفاده شده است. ابر چولگی برای اولین بار در ادبیات مالی داخلی در این پژوهش به‌کاررفته است و نشان داده شد که این عامل باعث افزایش دقت در قیمت‌گذاری اختیار است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد. شستا چولگی و کشیدگی غیر نرمال بیشتری نسبت به خودرو دارد. قیمت اختیار محاسبه‌شده با مدل گرام چارلیه نسبت به مدل بلک شولز در شستا خطای کمتری نسبت به قیمت بازار نشان می‌دهد. بنابراین مدل گرام چارلیه انعطاف‌پذیری بیشتری را نسبت به مدل بلک شولز با چولگی و کشیدگی غیر نرمال دارد.

واژه‌های کلیدی: اختیار معامله، مدل بلک شولز، مدل گرام چارلیه، چولگی ، کشیدگی.

طبقه‌بندی موضوعی: G11 و G12

---

۱. doi: 10.22034/JSE.2024.12400.2244

۲. دانشیار، گروه پژوهشی مالی زاگرس، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. (haddadi@abru.ac.ir)

۳. دانشجو دکترا، گروه ریاضی مالی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران. (نویسنده مسئول). (hosein.nasrolahi@abru.ac.ir)

مقدمه

مشهورترین مدل برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، مدل بلک شولز[1] نام دارد که در سال ۱۹۷۳ ارائه‌شده است. مدل بلک شولز فرض می‌کند که بازده سهام از توزیع نرمال با نوسان ثابت پیروی می‌کند(اوتاما[2] و همکاران،۲۰۲۲). هال[3] (هال،۱۹۹۳) و ناتنبرگ[4] (ناتنبرگ،۱۹۹۴) اشاره می‌کنند که بازده سهام چولگی و کشیدگی غیر نرمال را نشان می‌دهد و انحرافات نوسان نتیجه نقض تجربی فرض نرمال بودن است. این مدل باوجود مزایایی همچون سادگی و برخورداری از فرم صریح برای قیمت اختیار معامله، به دلیل فرض‌های غیرواقع‌بینانه همواره با انتقاد روبرو شده است(شاکران،۱۳۹۱). این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه رونق ببخشد. مشکلاتی همانند فرضیه‌های مدل، عدم تطبیق با توزیع آماری داده‌های قیمت سهام، فرض بازار کامل، عدم دخالت هزینه معامله‌های و عدم کاربرد در قیمت‌گذاری اوراق اختیار آمریکایی بر مدل بلک شولز مترتب هستند. بدون تردید این مدل پایه و اساس شکل‌گیری بسیاری از مدل‌های مالی در حال حاضر است. فرض اساسی در مدل بلک شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌های پایه، لگ نرمال است. اما در بازارهای مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ نرمال، دارای چولگی و کشیدگی غیر نرمال است(تئودوسیو[5] و همکاران،۲۰۲۴). بدین ترتیب، با توزیع‌های مختلفی از قیمت‌های اختیار خرید یا فروش روبرو خواهیم شد که تفاوت آن‌ها در دم توزیع است. از زمان انتشار مدل بلک شولز، تلاش‌های زیادی شد تا برای دارایی‌هایی که بر اساس مشاهده‌های تجربی پویایی حرکت آن‌ها با ویژگی‌های حرکت براونی[6] هم‌خوانی ندارد، مدلی ارائه شود. در مدل بلک شولز، ثابت بودن نوسان فرض اصلی در نظر گرفته‌شده است، درحالی‌که به‌مرورزمان مشخص شد، این فرض برای اختیاراتی که قیمت اعمال متفاوتی دارند، صدق نمی‌کند. لبخند تلاطم[7] و تلاطم نامتقارن[8] پدیده‌های مشهوری بودند که این فرض را نقض

1. Black–Scholes
2. Utama
3. Hull
4. Natenberg
5. Theodossiou
6. Brownian motion
7. Volatility smile
8. Volatility skew

می‌کردند. این پدیده‌ها، در قالب رفتار غیر نرمال[1] توزیع نرخ بازده دارایی مطرح شده‌اند. درواقع توزیع نوسان واقعی، در مقایسه با منحنی زنگوله‌ای شکل توزیع نرمال، نامتقارن، دارای چولگی و همچنین دارای حافظه بلندمدت است.

هدف اصلی این پژوهش تعیین قیمت اختیار خرید اروپایی در داده‌های غیر نرمال است که چولگی و کشیدگی بیش‌ازحد توزیع بازده را در نظر می‌گیرد، همچنین ابر چولگی برای نخستین بار در ادبیات مالی داخلی در این پژوهش به‌کار رفته است و هدف از آن افزایش دقت در قیمت‌گذاری اختیار خرید است. تعیین انعطاف‌پذیری هریک از مدل‌های گرام چارلیه و بلک شولز و مقایسه آن‌ها تحت چولگی و کشیدگی غیرنرمال از دیگر اهداف مورد بررسی در این پژوهش است.

مبانی نظری و توسعه فرضیه‌ها

قراردادهای اختیار معامله یکی از ابزارهای مشتقه مالی است که اختیار خرید یا فروش دارایی پایه موضوع قرارداد را در قیمت ثابت در زمان مشخصی در آینده به دارنده آن می‌دهد. دارنده اختیار معامله را خریدار و طرف مقابل آن‌که اختیار خرید یا فروش را واگذار کرده، فروشنده اختیار معامله می‌نامند. قراردادهای اختیار معامله به دو نوع اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم‌بندی می‌شود. اختیار خرید اختیار معامله‌ای است که به دارنده آن حق خرید یک دارایی را می‌دهد. از سوی دیگر در اختیار فروش، دارنده اختیار معامله، حق فروش دارایی پایه موضوع قرارداد را به دست می‌آورد. یک مفهوم مهم در مطالعه قراردادهای اختیار معامله، توجه به رابطه میان قیمت دارایی موضوع قرارداد S و قیمت توافقی K است. در این رابطه از اصطلاحات در سود[2]، در ضرر[3] و بی‌تفاوت[4] استفاده می‌شود (کیمیاگری و همکاران، ۱۳۹۶). اختیار خرید زمانی در سود است که ارزش دارایی پایه موضوع قرارداد بزرگ‌تر از قیمت توافقی باشد. اگر ارزش دارایی برابر با قیمت توافقی باشد، اختیار معامله بی تفاوت است. همچنین اختیار خرید در ضرر است اگر ارزش دارایی پایه کمتر از قیمت توافقی باشد.

---

1. Non-Gaussian
2. In-the-Money Option
3. Out-of-the-Money Option
4. At-the-Money Option

مدل بلک شولز در نحوه قیمت‌گذاری در پوشش ریسک اختیار معامله نقش اساسی و محوری درمهندسی مالی داشته است. اساس مدل بلک شولز بررسی این است که نوسانات قیمت سهام در طول زمان‌های آتی چگونه حرکت خواهد کرد. فرض اساسی در این مدل این است که قیمت سهام از گشت تصادفی پیروی می‌کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه‌مدت دارای توزیع لگ نرمال است. تحت مدل قیمت‌گذاری اختیار بلک شولز، ارزش اختیار تابع حرکت براونی است. حرکت براونی بدون حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند. بر همین اساس مدل بلک شولز با رفتار بازارهای مالی ایده‌آل مطابقت دارد. این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه رونق ببخشد. با توجه به مزایای فرآیند حرکت براونی هندسی که مبنایی بسیار قابل‌انعطاف و از برخی جهات بسیار جذاب برای قیمت‌گذاری اختیارها فراهم می‌کند، یک مشکل حرکت براونی هندسی توزیع بازده به‌طور نرمال است و این برخلاف بسیاری از شواهد است که نشان می‌دهند بیشتر بازده دارایی‌ها، دارای چولگی و کشش بالاتر از حد نرمال هستند.

وجود چولگی مدرکی دال بر نقض مدل بلک شولز است زیرا مدل بلک شولز فرض می‌کند بازده‌های لگاریتمی به‌طور نرمال توزیع می‌شوند. دو انحراف از حالت نرمال به‌طور معین قابل دیدن هستند. یکی درجه تقارن در توزیع که با چولگی ارزیابی می‌شود چولگی با گشتاور سوم توزیع مرتبط است. برای متغیر تصادفی X با میانگین μ و انحراف معیار σ، چولگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{چولگی}\,(X)=\frac{1}{\sigma^3}E\left[(X-\mu)^3\right] \qquad (۱)$$

دیگری کشیدگی که ناشی از گشتاور چهارم توزیع است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{کشیدگی}\,(X)=\frac{1}{\sigma^4}E\left[(X-\mu)^4\right] \qquad (۲)$$

در موضوع درجه تقارن، ابر چولگی نیز مفهوم جدیدی است که برای نخستین بار در ادبیات مالی داخلی در این پژوهش به‌کاررفته است و نشان داده می‌شود که این عامل باعث افزایش دقت در قیمت‌گذاری است. ابر چولگی با گشتاور پنجم مرتبط است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود(یزدانیان وحاجی اکبری،۱۳۹۸).

$$\text{ابرچولگی}\,(X)=\frac{1}{\sigma^5}E\left[(X-\mu)^5\right] \qquad (۳)$$

توزیع نرمال همواره دارای چولگی و ابرچولگی صفر و کشیدگی سه است. بنابراین هر چولگی غیر صفر، ابر چولگی غیر صفر یا کشیدگی متفاوت از سه، به معنی انحراف توزیع از حالت توزیع نرمال است. اگر کشیدگی توزیع بیش از سه باشد گفته می‌شود توزیع دارای دم فربه (پهن) است یا گفته می‌شود ضریب کشیدگی مثبت[۱] است. برعکس، اگر کشیدگی توزیع کم‌تر از سه باشد گفته می‌شود توزیع دارای دم لاغر است و یا گفته می‌شود کشیدگی دارای پخی[۲] است. توزیع بازده‌های تاریخی بیشتر دارای دم فربه یا ضریب کشیدگی مثبت هستند کشیدگی زیاد در توزیع به معنی آن است که کشیدگی بیش از سه است.

برای ترکیب چولگی و کشیدگی غیر نرمال در فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز از گسترش گرام چارلیه[۳] تابع چگالی نرمال استفاده می‌شود که این رویکرد شبیه به گسترش سری تیلور برای توابع تحلیلی است. از این چگالی گسترش‌یافته، فرمول قیمت‌گذاری اختیار به دست می‌آید که حاصل جمع قیمت بلک شولز به‌اضافه روابط اصلاحی برای چولگی و کشیدگی غیر نرمال است(کورادو و سو[۴]،۱۹۹۶). به‌عبارت‌دیگر رویکرد در نظر گرفتن تأثیر چولگی و کشیدگی در قیمت دارایی برای ارزیابی اوراق بهادار ، استفاده از بسط سری گرام چارلیه است که از چندجمله‌ای هرمیت برای دستیابی به توزیع احتمال درروش گرام چارلیه استفاده می‌شود(عبدالرحمان،۲۰۱۹).

جارو و راد[۵] (جارو و راد، ۱۹۸۲) مدل قیمت‌گذاری اختیار نیمه پارامتریک را برای محاسبه انحراف قیمت اعمال، مشاهده شده در مدل بلک شولز را پیشنهاد کردند. آنها فرمول قیمت‌گذاری اختیار را از گسترش اجورث[۶] تابع چگالی لگ نرمال برای مدل‌سازی توزیع قیمت سهام به دست آوردند. استوارت و اورد[۷] (استوارت و اورد،۱۹۸۷) تمایز بین گسترش اجورث و گسترش گرام چارلیه را بررسی کردند. کورادو و سو، فرمول قیمت‌گذاری اختیار نیمه‌پارامتریک توزیع قیمت سهام را با گسترش سری گرم-چارلیه تابع چگالی نرمال مدل می‌کنند(براون و رابینسون،۲۰۰۲)، در عمل روش جارو و راد انحراف چولگی وکشیدگی از

---

1. Leptokurtosis
2. Platykurtosis
3. Gram-Charlier
4. Corrado and Su
5. Jarrow and Rudd
6. Edgeworth
7. Stuart and Ord

لگ نرمال بودن را برای قیمت سهام محاسبه می کند در حالی که روش کورادو و سو انحراف چولگی و کشیدگی از نرمال بودن را برای قیمت سهام محاسبه می کند سپس کورادو و سو همان نوع مطالعه را با بسط اجورث انجام دادند(کورادو و سو،۱۹۹۷). براون و رابینسون[1] (براون و رابینسون،۲۰۰۲) دو خطای تایپی در مدل کورادو و سو را تصحیح کردند. ضرایب چولگی و کشیدگی از برای همه توزیع های نرمال به ترتیب صفر و سه هست در حالیکه ضرایب چولگی و کشیدگی برای توزیع‌های لگ نرمال در توزیع‌های لگ نرمال مختلف متفاوت است. به همین دلیل گزارش و تفسیر نتایج تجربی بر اساس انحراف چولگی و کشیدگی مشاهده شده از توزیع نرمال راحت‌تر است، زیرا نقاط مرجع ثابت هستند. در این پژوهش بر روی چولگی و کشیدگی برای بازده سهام تمرکز کرده و برای تصحیح اریبی[2] مدل بلک شولز، با استفاده از مدل کورادو و سو، فرمول بلک شولز را با چولگی و کشیدگی غیرنرمال تا گشتاور چهارم محاسبه کرده و تحت احتمال ریسک خنثی، تابع چگالی گرام چارلیه را برای استخراج فرمول قیمت اختیار اروپایی استفاده می کنیم. برتری اصلی گسترش گرام چارلیه به این دلیل است که انعطاف‌پذیری بیشتری را نسبت به چگالی نرمال فراهم می کند

پاپانتونیس[3] در سال ۲۰۱۶ به بررسی نوسان قیمت اختیار در قراردادهای اختیار معامله به سبک اروپایی به روش گارچ و نقش حق بیمه ریسک در این نوع مدل پرداخته است و بیان کرد که این مدل‌ها دقت قیمت‌گذاری را با ترکیب برآوردهای نوسانات پویا افزایش می‌دهند و شرایط بازار را به‌طور بنیادی‌تری نسبت به فرضیه‌های استاتیک منعکس می‌کند. کارر[4] و همکاران در سال ۲۰۱۶ به بررسی یک چارچوب جدید برای قیمت‌گذاری قیمت اختیار به‌منظور پوشش ریسک سرمایه‌گذاران در این بازار در برابر نوسانات قیمت‌ها پرداخته‌اند و متوجه شدند که قیمت اختیار به طور چشمگیری بازده سهام آتی را پیش بینی می کند. کیسل[5] و همکاران در سال ۲۰۱۷ به بررسی و مقایسه قیمت‌گذاری اختیار معامله، تحت مدل‌های بلک شولز و هستون پرداخته‌اند و یک مدل قیمت‌گذاری اختیار دوعاملی را ارائه کردند که به‌طور مختصر تفاوت در تداوم نوسانات را تحت احتمالات تاریخی و ریسک خنثی نشان می‌دهد. هریس[6] در سال

1. Brown and Robinson
2. Bias
3. Papantonis
4. Carr
5. Kiesel
6. Harris

۲۰۱۸ به بررسی قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله اروپایی تحت مدل بلک شولز پرداخته است. او در این مقاله به بررسی معادلات و پارامترهای قیمت‌گذاری در مدل بلک شولز پرداخته است و یک مدل جدید با استفاده از توابع احتمال بیزی به‌جای توابع چگالی احتمال برای تخمین پارامترهای مدل ارائه کرده است.

اوتاما و همکاران (۲۰۲۲) نشان دادند که بازگشت سهام با مقادیر چولگی و کشیدگی نزدیک به ۰ و ۳، منجر به نزدیک شدن قیمت اختیار در مدل گرام چارلیه به قیمت اختیار در مدل بلک شولز می‌شود. قیمت‌گذاری اختیار با چولگی و کشیدگی بر اساس توزیع گاوسی توسعه‌یافته چوله نیز توسط تئودوسیو و همکاران در ۲۰۲۴ موردبررسی قرار گرفت. نتایج به توضیح سوگیری‌های بلک شولز کمک می‌کند و نشان دادند که اگر تأثیر چولگی یا کشیدگی غالب باشد، ممکن است هر نوع قیمت‌گذاری اشتباه رخ دهد.

در پژوهش‌های داخلی نیز اولین پژوهش مربوط به پورحیدی در سال ۱۳۷۸ است که سه مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اوراق بهادار، شامل مدل توزیع یکنواخت قیمت سهام، مدل توزیع دوجمله‌ای قیمت سهام و مدل توزیع نرمال را بررسی کرده است و به تبیین و تشریح مدل‌های یادشده پرداخته است و نتیجه می‌گیرد مدل توزیع نرمال که توسط بلک شولز ارائه شده، برای قیمت‌گذاری اختیارمعامله بهتر از دو مدل دیگر است. کیمیاگری و آفریده‌ثانی در سال ۱۳۸۷ به بررسی قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک شولز و درخت دوتایی پرداخته‌اند. آنالیزمدل‌ها در مقاله نشان می‌دهد که مدل بلک شولز مدلی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معامله سهم‌های با نوسان پایین و مدل درخت دوتایی، مدلی مناسب برای قیمت‌گذاری سهم‌ها با نوسان بالا است. باغستانی و همکاران در سال ۱۳۹۷ به مطالعه و تعیین قیمت قرارداد اختیار معامله آسیایی پرداختند که از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تعیین قیمت اختیار استفاده کردند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که اختیار آسیایی نسبت به اختیار معامله اروپایی ارزان‌تر است. همچنین اثر تغییر در متغیرهایی همچون قیمت جاری دارایی، نرخ بهره بدون ریسک و نوسان قیمت دارایی بر قیمت اختیار معامله مثبت ارزیابی شد. ابوالی و همکاران در سال ۱۳۹۸ با تمرکز بر معادله شرودینگر گونه اصلی بلک شولز و حل این معادله با روشی متفاوت و جدید برای اثبات و بهبود معادله‌ی بلک شولز انجام دادند.

امیری نیز در سال ۱۳۹۹ نشان می‌دهد که مقایسه قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله فروش بیانگر آن است که در سطوح مختلف قیمت اعمال، در تمام‌روزهای سرمایه‌گذاری

قیمت اختیار معامله فروش بر اساس مدل بلک شولز کمتر از قیمت اختیار معامله خرید بر اساس مدل دوجمله‌ای است. بهرادمهر و طهماسبی در سال ۱۴۰۱ نیز قیمت‌گذاری اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران را موردمطالعه قراردادند و از دو روش واریانس ناهمسانی و روش آماری برای محاسبه نوسانات بازده سکه طلا استفاده کردند. آن‌ها از داده‌های شش قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران استفاده کردند نتایج از هردو روش بلک شولز و برابری خریدوفروش، توصیه به سرمایه‌گذاران برای خرید اختیار خرید برای سرمایه‌گذاری است. محمدی‌نژاد و نیسی در سال ۱۴۰۱ به قیمت‌گذاری اختیار بر پایه مدل‌های نرخ بهره لایبور پرش-انتشار پرداختند و مدلی حاصل از تبدیل یک معادله دیفرانسیل تصادفی با جمله پرش به یک معادله دیفرانسیل جزئی انتگرالی بدون ریسک ارائه کردند. احمدی و اسماعیلی در سال ۱۴۰۲ به بررسی اختیار معامله رنگین‌کمانی آسیایی هندسی در بازار بورس و اوراق بهادار ایران پرداختند. آنها دو سهم از بازار سهام ایران را انتخاب کردندکه دینامیک آنها از حرکت براونی کسری است و قیمت اختیارمعامله را برای این دو سهم محاسبه کردند همچنین تاثیر پارامترهای مختلف مدل از جمله نرخ بهره و پارامتر هرست را بر روی قیمت اختیار معامله بررسی کردند. پیمانی و همکاران در سال ۱۴۰۲ به بررسی مدل‌های ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله با نرخ سود تصادفی و مقایسه عملکرد هر یک از آن‌ها با مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود غیر تصادفی با مدل بلک-شولز و مرتون پرداختند. نتیجه پژوهش بیانگر آن است که در ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های کوتاه‌مدت، تفاوت چندانی میان مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی و مدل بلک، شولز و مرتون وجود ندارد. در حالی‌که ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های بلندمدت با استفاده از مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته‌اند.

روش‌شناسی پژوهش

روش‌های قیمت‌گذاری اختیار به سه دسته اصلی پارامتریک، نیمه‌پارامتریک و ناپارامتریک تقسیم‌بندی کرد. در ادامه، توضیحاتی درباره هر کدام از این دسته‌ها ارائه می‌شود:

روش‌های پارامتریک: این روش‌ها بر اساس فرضیه‌های مشخص و مدل‌های ریاضی تعریف می‌شوند. در این روش‌ها بیشتر از توزیع‌های خاص برای قیمت دارایی‌های پایه استفاده می‌شود.

نخستین مدل پایه‌ای در این خصوص مدل بلک شولز است و مدل‌های گسترش یافته بلک شولز مانند مدل بلک شولزمرتن وهستون مدل‌هایی از این دست هستند.

روش‌های نیمه‌پارامتریک: این روش‌ها ترکیبی از فرضیه‌های پارامتریک و ناپارامتریک هستند. در این روش‌ها، برخی از پارامترها به صورت مشخص فرض می‌شوند در حالی که بقیه به صورت ناپارامتریک مدل‌سازی می‌شوند. مدل گرام چارلیه روشی نیمه‌پارامتریک است.

روش‌های ناپارامتریک: این روش‌ها هیچ فرضی درباره توزیع قیمت دارایی‌ها ندارند و به طور کلی بر اساس داده‌های تجربی عمل می‌کنند. مانند شبیه‌سازی مونت‌کارلو که برای قیمت‌گذاری اختیارها به کار می‌روند و به هیچ فرض خاصی درباره توزیع قیمت‌ها نیاز ندارند.

مدل انتخابی در این پژوهش مدل بلک شولز و مدل گرام چارلیه است. مدل انتخابی بلک شولز یکی از محبوب‌ترین مدل‌ها برای قیمت‌گذاری اختیارها است. دلایل استفاده از مدل بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار معامله سادگی و کارایی، تئوری مالی قوی، کاربرد گسترده آن است. اما فرض اساسی مدل بلک شولز پیروی از توزیع نرمال با نوسان ثابت است که واقعیت‌های بازار گاهی این گونه نیست و بازده سهام دارای چولگی و کشیدگی غیر نرمال است. این موضوع باعث خطای بیشتر در قیمت گذاری اختیارمعامله می‌شود. در این شرایط مدل گرام چارلیه انتخاب مناسبی برای قیمت‌گذاری اختیارها است زیرا اثر چولگی و کشیدگی را در نظر می‌گیرد.

فرمول‌های بلک شولز برای قیمت‌های اختیار معامله از نوع اروپایی که سود پرداخت نمی‌کنند، عبارت است از(هال،۱۹۹۳):

$$C = S_t \mathrm{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathrm{N}(d_2) \tag{۴}$$

$$P = Ke^{-rT}\mathrm{N}(-d_2) - \mathrm{N}(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left[r - \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

و N نشان‌دهنده تابع احتمال تجمعی نرمال، S_t نشان‌دهنده دارایی پایه ، K نشان‌دهنده قیمت اعمال، T نشان‌دهنده تاریخ انقضا، t نشان‌دهنده زمان جاری، r نشان‌دهنده نرخ بهره بدون ریسک، σ نشان‌دهنده نوسان پذیری است. قیمت دارایی پایه S_t در مدل بلک شولز از معادله دیفرانسیل تصادفی پیروی می کند.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t^Q \qquad (۵)$$

در این معادله r نرخ بهره بدون ریسک، σ نوسان و w_t^Q یک فرایند وینر استاندارد تحت اندازه ریسک خنثی Q است. با توجه به معادله (۵) می‌توان گفت که σ تنها پارامتر غیرقابل مشاهده در این مدل است که می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخیِ تغییرات قیمت دارایی پایه به‌صورت زیر است:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)^2} \qquad (۶)$$

برآورد کرد. در مدل قیمت گذاری بلک شولز عواملی نظیر قیمت توافقی(K) ، قیمت پایه دارایی(S_t)، نوسان پذیری(σ)، زمان تا سررسید(T) و نرخ بهره بدون ریسک (r)تأثیرگذار هستند.

کورادو و سو (۱۹۹۶) در مقاله خود توضیح دادند که فرمول کلی برای مدل بلک شولز قابل‌تعمیم است و این تعمیم به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$C_{BS} = e^{-rT}\int_K^{\infty}(S_T - K)\, g(S_T) dS_T \qquad (۷)$$

چند جمله‌ای هرمیت در سال ۱۸۱۰ توسط لاپلاس تعریف شد و در سال ۱۸۵۹ توسط چبیشف[1] موردمطالعه قرار گرفت، سپس نادیده گرفته شد و دوباره پس از بررسی این چندجمله‌ای توسط چارلز هرمیت در سال ۱۸۶۴ موردتوجه قرار گرفت. شکل این چندجمله‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad (۸)$$

1. Chebyshev

از رابطه (۸) می‌توان چندجمله اول هرمیت را به‌صورت زیر به دست آورد.

$$H_0(z) = 1 \qquad H_1(z) = z$$
$$H_2(z) = (z^2 - 1) \qquad H_3(z) = (z^3 - 3)$$
$$H_4(z) = (z^4 - 6z^2 + 3) \qquad H_5(z) = (z^5 - 10z^3 + 15)$$

این چندجمله‌ای دارای ویژگی‌های متعامد است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z)\ H_n(z) n(z) dz = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ m! & , m = n \end{cases} \qquad (۹)$$

که $n(z)$ تابع چگالی نرمال به‌صورت زیر است:

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-z^2}{2}\right)} \qquad (۱۰)$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت اساس فضای هیلبرت [1] را تشکیل می‌دهند و برای به دست آوردن گسترش تابع چگالی احتمال استفاده می‌شوند. معمولاً این سری گرام چارلیه نام دارد. گسترش گرام چارلیه برای تخمین تابع چگالی استاندارد نرمال بسیار خوب است. در دو دهه اخیر استفاده از این گسترش در حوزه مالی برای مدل بازده لپتوکورتیک، چولگی، نوسانات گروهی و غیره معرفی‌شده است. برای اهداف عملی، تنها چند عبارت اول این بسط در نظر گرفته‌شده است که دارای چند جمله اضافه نسبت به تابع چگالی احتمال نرمال است. چندجمله‌ای اضافه‌شده به تابع چگالی احتمال نرمال اثرات خروج از نرمال بودن را توضیح می‌دهد، سری گرام چارلیه از گشتاورهای توزیع واقعی استفاده می‌کند. سری اجورث [2] شبیه گرام چارلیه است اما به‌جای گشتاورها از انباشته‌ها [3] استفاده می‌کند. اگرچه این سری‌ها معادل هستند، اما برای اهداف محاسباتی، سری گرام چارلیه بهتر از سری اجورث عمل می‌کند(جانسون و همکاران،۱۹۹۴). چندجمله‌ای هرمیت دارای چندین برتری است. یکی از مزایا این است که تابع چگالی می‌تواند به‌طور رسمی به‌صورت زیر گسترش یابد:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, H_n(z) n(z) \qquad (۱۱)$$

---

1. Hilbert
2. Edgeworth
3. Cumulants

که $H_{\mathrm{n}}(z)$ چندجمله‌ای هرمیت، $n(z)$ تابع چگالی نرمال و ضرایب C_n از چندجمله‌ای هرمیت به دست می‌آیند. به این صورت که دو طرف معادله (۱۱) را در $H_m(z)$ ضرب کرده و سپس انتگرال‌گیری در بازه $(-\infty, \infty)$ که به‌صورت زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, H_m(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(z)\, H_m(z) n(z) dz \tag{۱۲}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) n(z) dz$$

$$= C_0 \int_{-\infty}^{\infty} H_0(z) H_m(z) n(z) dz$$

$$+ C_1 \int_{-\infty}^{\infty} H_1(z) H_m(z) n(z) dz + \ldots + C_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(z) H_m(z) n(z) dz$$

$$+ C_m \int_{-\infty}^{\infty} H_m(z) H_m(z) n(z) dz + C_{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m+1}(z) H_m(z) n(z) dz + \ldots$$

سپس با استفاده از خواص متعامد در رابطه (۸) تا رابطه (۹) داریم:

$$C_m = \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) H_m(z) dz \tag{۱۳}$$

از رابطه (۱۳) مقادیر:

$$C_0 = 1 \qquad C_1 = \mu_1$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2!}\right)(\mu_2 - 1) \qquad C_3 = \left(\frac{1}{3!}\right)(\mu_3 - 3\mu_1)$$

$$C_4 = \left(\frac{1}{4!}\right)(\mu_4 - 6\mu_2 + 3) \qquad C_5 = \left(\frac{1}{5!}\right)(\mu_5 - 10\mu_3 + 15\mu_1)$$

که $E(z) = \mu_1 = 0$، $E(z^2) = \mu_2 = 1$، $E(z^3) = \mu_3$، $E(z^4) = \mu_4$، $E(z^5) = \mu_5$ به ترتیب میانگین، واریانس، چولگی، کشیدگی، و ابرچولگی نرمال استانداردشده هستند. بسط برای $g(z)$ نرمال استاندارد تا گشتاور پنجم به صورت زیر است.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{5} C_n H_n(z) n(z) = n(z)\left[\underbrace{\left[H_0(z) + \mu_1 H_1(z) + \frac{1}{2!}(\mu_2 - 1)H_2(z) + \frac{1}{3!}(\mu_3 - 3\mu_1)H_3(z) + \frac{1}{4!}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3)H_4(z)\right]}_{g(z)_{1-4}} + \underbrace{\frac{1}{5!}(\mu_5 - 10\mu_3 + 15\mu_1)H_5(z)}_{g(z)_5}\right] = g(z)_{1-4} + g(z)_5 \quad (۱۴)$$

پس از جایگزینی معادله (۱۴) به معادله (۷) فرمول قیمت‌گذاری اختیار را بر اساس گشتاور ابرچولگی به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$C_{BS_s} = e^{-rT}\int_K^{\infty}(S_T - K)g(z)\,dS_T = e^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\left(S_t e^{(r-0.5\sigma^2)T + z\sigma\sqrt{T}} - K\right)[g(z)_{1-4} + g(z)_5]\,dz = C_{GC_4} + C_{GC_5} \quad (۱۵)$$

C_{GC_4} در معادله (۱۵) فرمول کورادو و سو است.

$$C_{GC_4} = C_{BS} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4 \quad (۱۶)$$

با در نظر گرفتن چولگی و کشیدگی، قیمت اختیار اروپایی در مدل گرام چارلیه به شرح زیر است:

$$C_{GC} = C_{BS} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4 \quad (۱۷)$$

که در آن:

$$C_{BS} = S_t \mathrm{N}(d) - Ke^{-rT}\mathrm{N}(d - \sigma\sqrt{T})$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\sigma^2)\right]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Q_3 = \frac{1}{3!}S_t\sigma\sqrt{T}\left((2\sigma\sqrt{T} - d)n(d) + \sigma^2 T N(d)\right)$$

$$Q_4 = \frac{1}{4!}\,S_t\sigma\sqrt{T}\left(\left(d^2 - 1 - 3\sigma\sqrt{T}(d - \sigma\sqrt{T})\right)n(d) + \sigma^3 T^{\frac{3}{2}}N(d)\right)$$

در این حالت فرمول قیمت اختیار به گشتاور چهار محدودشده است. این فرمول با فرمول استفاده‌شده توسط کورادو و سو (۱۹۹۷)یکسان است. حال اگر گشتاور پنجم (تأثیر ابر چولگی) را در نظر بگیریم، فرمول قیمت اختیار به‌صورت زیر است.

$$C_{GC_s} = C_{BS} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4 + (\mu_5 - 10\mu_3)Q_5 \qquad (۱۸)$$

که در آن:

$$Q_5 = \frac{1}{120} S_t \sigma\sqrt{T}\left(\sigma^4 T^2 N(d) + n(d)\left[4\sigma^3 T^{\frac{3}{2}} - 6\sigma^2 T + 3d^2\sigma\sqrt{T} + d\sigma\sqrt{T} - 3\sqrt{T} - d^3 + 3\right]\right)$$

و N نشان‌دهنده تابع احتمال تجمعی نرمال، n نشان‌دهنده تابع چگالی احتمال نرمال، S_t نشان‌دهنده قیمت سهام، K نشان‌دهنده قیمت اعمال، T نشان‌دهنده تاریخ انقضا، t نشان‌دهنده زمان جاری، r نشان‌دهنده نرخ بهره بدون ریسک، σ نشان‌دهنده نوسان پذیری، μ_3 نشان‌دهنده ضریب چولگی، μ_4 نشان‌دهنده ضریب کشیدگی و μ_5 نشان‌دهنده ابر چولگی[1] است.

بعد از محاسبه μ_3، μ_4 و جملات Q_3، Q_4 و قرار دادن در فرمول ۱۷ قیمت اختیارخرید با در نظرگرفتن چولگی و کشیدگی به دست می‌آید. با اضافه شدن ضریب μ_5 و جمله Q_5 در فرمول ۱۸ قیمت اختیارخرید با در نظرگرفتن چولگی، کشیدگی و ابر چولگی به دست به دست می‌آید.

درنهایت اثر تغییرات داده‌ها بر روی قیمت اختیار با محاسبه خطا بررسی می‌شود. خطا به کمک روش MAPE محاسبه می‌شود:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{C}_i - C_i)}{\hat{C}_i} \times 100 \qquad (۱۹)$$

که $\hat{C}_i$ نشان‌دهنده قیمت پایانی اختیار در بازار و C_i نشان‌دهنده قیمت محاسبه‌شده اختیار و n تعداد مشاهدات است. بازدهی روزانه از طریق تفاضل گیری از لگاریتم قیمت آن در دو دوره متوالی قابل‌محاسبه است

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \qquad (۲۰)$$

به‌طوری‌که r_t بیانگر بازدهی سهام در زمان t و P_t و P_{t-1} بیانگر قیمت‌ها در زمان t و $t-1$ است.

1. Super skewness

یافته‌های پژوهش

در این پژوهش، سهم ایران‌خودرو با نماد خودرو در بازار بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۹/۵/۶ تا ۱۴۰۲/۸/۱۰ و قیمت پایانی سهم سرمایه‌گذاری تأمین اجتماعی با نماد شستا در بازار بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۴۰۱/۵/۳ تا ۱۴۰۲/۸/۱۰، مورد بررسی قرار گرفت. علت انتخاب، نوسانات قیمتی بالا، حجم معاملات و وجود اختیار این دو نماد است. براین اساس دو نماد خودرو و شستا به عنوان دارایی پایه و اختیار آنها به ترتیب با نمادهای ضخود و ضستا انتخاب شدند که خود اختیارها نیز از حجم معاملات بالای برخوردار هستند.

در ادامه قیمت اختیار خرید اروپایی تحت مدل بلک شولز و گرام چارلیه محاسبه و درنهایت با قیمت بازار مقایسه می‌شود. لازم به بیان است برای محاسبه و تحلیل داده‌ها از نرم‌افزار R نسخه ۴-۳-۲ همراه با بسته‌های(readxl، pastecs، moments، tseries، univariateML، Metrics) استفاده‌شده است. نظر به اینکه عملکرد مدل‌های مختلف سری زمانی، با توجه به داده‌های مختلف می‌تواند تحت تأثیر قرار گیرد، پیش از انجام هر اقدامی، به بررسی آماره‌های توصیفی متغیرها در قالب جدول۱ پرداخته می‌شود. بر اساس نتایج ارائه‌شده جدول ۱ میانگین بازده خودرو عددی منفی و بسیار نزدیک به صفر است. همچنین این متغیر دارای چولگی مثبت می‌باشد که نشان‌دهنده آن است که بازده مثبت محتمل‌تر از بازده منفی است. ضریب کشیدگی نشان‌دهنده کشیدگی بیشترنسبت به توزیع نرمال است. و برای شستا میانگین عددی مثبت و بسیار نزدیک به صفر است. همچنین این متغیر دارای چولگی منفی که نشان‌دهنده ریسک بالاتر است. ضریب کشیدگی نشان‌دهنده کشیدگی کمترنسبت به توزیع نرمال است.

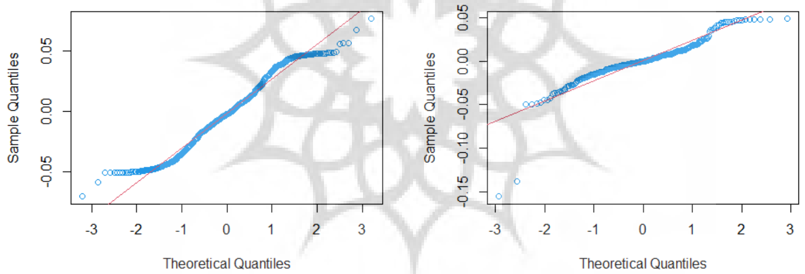
جدول ۱. آماره های توصیفی

انحراف معیار	میانگین	ابر چولگی	کشیدگی	چولگی	آماره توصیفی
۰/۰۲۸۷۲	-۰/۰۰۱۶۴	۰/۴۴۵۸۳	۲/۱۷۲۷۰	۰/۰۷۹۲۵	بازده خودرو
۰/۰۲۳۰۹	۰/۰۰۰۶۳	-۷۵/۱۷۲۲۵	۱۳/۶۴۹۸۵	-۱/۵۷۱۹۱	بازده شستا

برای بررسی نرمال بودن داده‌ها با استفاده از نمودارها و شاخص های آماری، نزدیکی توزیع داده‌ها به توزیع نرمال را بررسی می کنیم. آزمون نرمال بودن توزیع سری بازده روزانه خودرو و شستا(آزمون جاک–برا[1] و آزمون شاپیرو –ویلک[2]) در جدول ۲ ارائه‌شده است. این آزمون‌ها بیانگر غیر نرمال بودن تابع توزیع چگالی احتمال سری بازده روزانه خودرو و شستا است. با توجه به اینکه مقدار احتمال آزمون کمتر از ۰/۰۵است بنابراین فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها رد می‌شود.

جدول ۲. آزمون نرمال بودن

متغیر تحقیق	آزمون جاک–برا		آزمون شاپیرو –ویلک		وضعیت نرمال بودن
	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	
سری بازده روزانه خودرو	۲۱/۱۳۸	۰/۰۰۰۰۲	۰/۹۷۳۸۳	۰/۰۰۰۰۰	غیر نرمال
سری بازده روزانه شستا	۱۵۱۵/۶	۰/۰۰۰۰۰	۰/۸۶۸۰۹	۰/۰۰۰۰۰	غیر نرمال



(ب) نماد شستا (آ) نماد خودرو

شکل ۱. نمودار چندک – چندک بازده نماد خودرو و شستا

در ادامه برای بررسی نوع توزیع از معیارهای اطلاعاتی آکائیک[3] و شوارتز- بیزین[4] استفاده می کنیم.

1. Jarque-Bera Test
2. Shapiro-Wilk Test
3. Akaike
4. Schwarz-Bayesian

جدول ۳. آزمون تعیین نوع توزیع داده‌ها

سری بازده روزانه	ایران‌خودرو		شستا	
معیار اطلاعاتی / توزیع	شوارتز- بیزین	آکائیک	شوارتز- بیزین	آکائیک
نرمال	-۳۰۷۷/۹۲۹	-۳۰۸۷/۱۰۲	-۱۳۵۲/۲۸۹	-۱۳۵۹/۶۲۹
چوله-نرمال [۱]	-۳۰۷۲/۹۷۵	-۳۰۸۶/۷۳۳	-۱۳۴۷/۹۴۱	-۱۳۵۸/۹۵۱
تی استودنت [۲]	-۳۰۷۱/۳۴۳	-۳۰۸۵/۱۰۲	-۱۴۳۰/۵۷۰	-۱۴۴۱/۵۷۹
جوله- تی استودنت [۳]	-۳۰۶۶/۳۸۰	-۳۰۸۴/۷۲۵	-۱۴۲۶/۱۲۰	-۱۴۴۰/۸۰۰
خطای تعمیم‌یافته [۴]	-۳۱۲۷/۱۵۵	-۳۱۴۰/۹۱۳	-۱۳۴۹/۰۹۹	-۱۳۶۰/۱۰۸
چوله- خطای تعمیم‌یافته [۵]	-۳۰۷۳/۶۴۲	-۳۰۹۱/۹۸۷	-۱۳۴۶/۹۲۹	-۱۳۶۱/۶۰۹

با توجه به جدول ۳ و کمترین مقادیر معیارهای اطلاعاتی آکائیک و شوارتز-بیزین دیده می‌شود که سهم خودرو دارای توزیع خطای تعمیم‌یافته است و سهم شستا دارای توزیع تی استودنت است.

در ادامه برای جلوگیری از انجام رگرسیون های کاذب، مانایی توسط دو نوع آزمون مانایی، آزمون دیکی - فولر تعمیم یافته [۶] و کویاتکوفسکی - فیلیپس- اشمیت - شین [۷] مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۴. آزمون مانایی

متغیر تحقیق	آزمون دیکی – فولر تعمیم‌یافته		آزمون KPSS		وضعیت مانایی
	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	آماره آزمون	سطح معنی‌داری	
سری بازده روزانه خودرو	-۸/۵۰۸۵	۰/۰۱	۰/۴۴۲۲۹	۰/۰۵۸۹۳	مانا
سری بازده روزانه شستا	-۶/۴۱۴۴	۰/۰۱	۰/۱۶۴۰۷	۰/۱	مانا

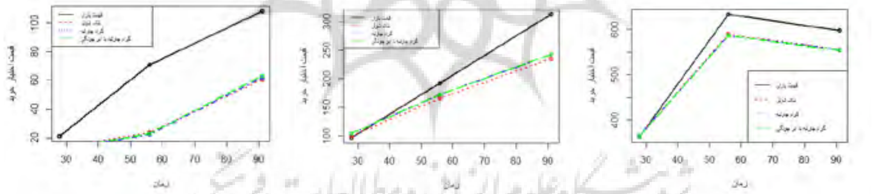
فرض صفر در آزمـون دیکی-فولر تعمیم‌یافته، نامانایی است و فرض جایگزین مانایی است. در آزمون ککویاتکوفسکی -فیلیپس -اشمیت -شین فرض صفر مانایی است و فرض جایگزین

1. Skew-Normal Distribution
2. Student's T-Distribution
3. Skew-Student
4. Generalized Error Distribution
5. Skew-Generalized Error Distribution
6. Augmented Dickey–Fuller Test
7. Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) Tests

نامانایی است که عکس آزمـون دیکی-فولر تعمیم‌یافته است. با توجه به جدول ۴ دیده می‌شود سری بازده ماناست.

جدول ۵. اختیار خرید اروپایی سهم ایران‌خودرو با نوسان تاریخی

وضعیت	تاریخ اعمال	قیمت سهم	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		گرام چارلیه		گرام چارلیه با ابر چولگی	
					قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا
در سود	۲۸	۲۳۱۹	۲۰۰۰	۳۶۲	۳۶۵/۹۳۷۸	۱/۰۸۷۷۷	۳۶۴/۶۴۸۷	۰/۷۳۱۶۷	۳۶۴/۴۲۱۹	۰/۶۶۹۰۳
بی‌تفاوت	۲۸	۲۳۱۹	۲۴۰۰	۹۶	۹۹/۲۵۳۷۷	۳/۳۸۹۳۴	۱۰۳/۴۶۹۹۲	۷/۷۸۱۱۶	۱۰۳/۶۷۳۸۳	۷/۹۹۳۵۷
در ضرر	۲۸	۲۳۱۹	۲۸۰۰	۲۱	۱۲/۹۴۹۹۰	۳۸/۳۳۳۷۸	۱۱/۸۸۶۹۲	۴۳/۳۹۵۵۹	۱۲/۲۷۲۴۳	۴۱/۵۵۹۸۱
در سود	۵۶	۲۳۱۹	۱۸۰۰	۶۳۳	۵۸۹/۴۰۸۰	۶/۸۸۶۵۷	۵۸۷/۳۵۹۱	۷/۲۱۰۲۵	۵۸۷/۲۹۸۲	۷/۲۱۹۸۷
بی‌تفاوت	۵۶	۲۳۱۹	۲۴۰۰	۱۹۲	۱۶۶/۰۴۳۳	۱۳/۵۱۹۱۳	۱۷۲/۰۲۸۲	۱۰/۴۰۱۹۶	۱۷۲/۱۱۳۳	۱۰/۳۵۷۶۳
در ضرر	۵۶	۲۳۱۹	۳۰۰۰	۷۱	۲۳/۶۴۱۸۲	۶۶/۷۰۱۶۵	۲۲/۲۸۳۵۸	۶۸/۶۱۴۶۸	۲۳/۰۲۸۹۲	۶۷/۵۶۴۸۹
در سود	۹۱	۲۳۱۹	۱۹۰۰	۵۹۸	۵۵۴/۹۴۸۹	۷/۱۹۹۱۸	۵۵۴/۵۷۸۸	۷/۲۶۱۰۶	۵۵۴/۰۳۴۱	۷/۳۵۲۱۵
بی‌تفاوت	۹۱	۲۳۱۹	۲۴۰۰	۳۱۲	۲۳۵/۲۱۷۰	۲۴/۶۰۹۹۳	۲۴۲/۶۶۱۹	۲۲/۲۲۳۷۵	۲۴۲/۵۸۳۴	۲۲/۲۴۸۸۹
در ضرر	۹۱	۲۳۱۹	۳۰۰۰	۱۰۸	۶۰/۶۵۱۲۹	۴۳/۸۴۱۳۹	۶۱/۷۸۹۳۲	۴۲/۷۸۷۶۶	۶۳/۱۲۴۶۵	۴۱/۵۵۱۲۵



درضرر   بی‌تفاوت   در سود

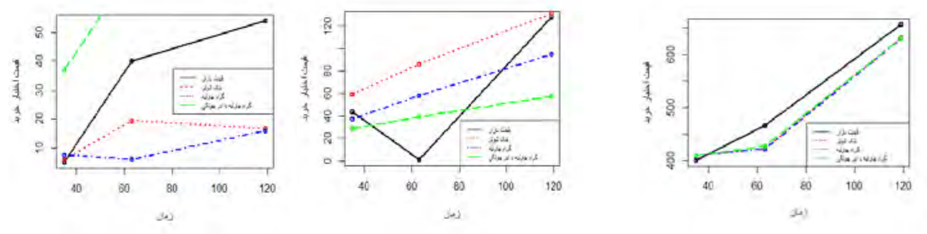
شکل۲. قیمت اختیار خرید نماد خودرو در بلک شولز، گرام چارلیه، گرام چارلیه با ابر چولگی

در جدول ۵ قیمت ضخود (اختیار خرید اروپایی نماد خودرو) با نوسان تاریخی در سه روش بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی با سررسید و قیمت اعمال متفاوت محاسبه شد. از جدول ۵ دیده می‌شود در کوتاه مدت (۲۸ روز) خطای هر سه مدل نسبت به میان مدت (۵۶ روز) و بلند مدت (۹۱ روز) بسیار کمتر است. در حالت درسود با سررسید کوتاه مدت از

نظر خطای کمتر به ترتیب گرام چارلیه با ابر چولگی، گرام چارلیه و بلک شولز و با سررسیدهای میان‌مدت و بلندمدت به ترتیب بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی قرار دارند. در حالت بی‌تفاوت با سررسید کوتاه‌مدت از نظر خطای کمتر به ترتیب بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی قرار دارند و با سررسید میان‌مدت به ترتیب گرام چارلیه با ابر چولگی، گرام چارلیه و بلک شولز و با سررسید بلندمدت به ترتیب گرام چارلیه، گرام چارلیه با ابر چولگی و بلک شولز قرار دارند. در حالت درضرر با سررسیدهای کوتاه‌مدت و میان بلندمدت از نظر خطای کمتر به ترتیب بلک شولز، گرام چارلیه با ابر چولگی و گرام چارلیه و بلندمدت به ترتیب گرام چارلیه با ابر چولگی، گرام چارلیه و بلک شولز قرار دارند. مجموع مربع خطای محاسبه‌شده بلک شولز ۸۷۴۰/۹۹۶، گرام چارلیه ۹۱۸۹/۸۲۴، گرام چارلیه با ابر چولگی ۸۷۹۱/۵۵۸ است. نتایج نشان می‌دهد که در مجموع بلک شولز نسبت به گرام چارلیه با ابر چولگی و گرام چارلیه خطای کمتری را به خود اختصاص داده است.

جدول ۶. اختیار خرید اروپایی سهم شستا با نوسان تاریخی

وضعیت	تاریخ اعمال	قیمت سهم	قیمت اعمال	قیمت بازار	بلک شولز		گرام چارلیه		گرام چارلیه با ابر چولگی	
					قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا	قیمت	درصد خطا
درسود	۳۵	۱۱۰۶	۷۱۲	۴۰۰	۴۰۹/۵۳۱۶	۲/۳۸۲۹۰	۴۰۹/۲۶۳۷	۲/۳۱۵۹۳	۴۰۹/۵۳۱۳	۲/۳۸۲۸۲
بی‌تفاوت	۳۵	۱۱۰۶	۱۱۱۲	۴۴	۵۹/۳۰۴۸۸	۳۴/۷۸۳۸۱	۳۷/۲۶۶۹۲	۱۵/۳۰۲۴۴	۲۸/۹۰۷۰۹	۳۴/۳۰۲۰۵
درضرر	۳۵	۱۱۰۶	۱۳۱۲	۵	۶/۰۱۵۰۶	۲۰/۳۰۱۳۱	۷/۶۳۰۷۴	۵۲/۶۱۴۹۳	۳۷/۰۰۴۹۶	۶۴۰/۰۹۹۳۸
درسود	۶۳	۱۱۰۶	۷۱۲	۴۶۶	۴۲۱/۷۴۰۹	۹/۴۹۷۶۶	۴۲۲/۵۶۴۹	۹/۳۲۰۸۴	۴۲۶/۶۷۲۸	۸/۴۳۹۳۱
بی‌تفاوت	۶۳	۱۱۰۶	۱۱۱۲	۱	۸۶/۳۰۱۵۷	۸۵۳۰/۱۵۷	۵۷/۹۲۵۵۸	۵۶۹۲/۹۱۶	۳۹/۵۹۵۴۶	۳۸۵۹/۵۴۶
درضرر	۶۳	۱۱۰۶	۱۳۱۲	۴۰	۱۹/۳۶۰۱۴	۵۱/۵۹۹۶۴	۵/۹۸۹۲۶	۸۵/۰۲۶۸۳	۷۱/۵۲۷۷۲	۷۸/۸۱۹۳۱
درسود	۱۱۹	۱۱۰۶	۵۱۲	۶۵۶	۶۳۰/۹۸۹۷	۱۱/۶۷۹۶۰	۶۲۹/۳۹۷۰	۱۱/۳۹۷۷۱	۶۲۹/۶۶۵۴	۱۱/۴۴۵۲۰
بی‌تفاوت	۱۱۹	۱۱۰۶	۱۱۱۲	۱۲۸	۱۳۱/۱۰۹۵۸	۲/۴۲۹۳۶	۹۴/۹۰۹۴۱	۲۵/۸۵۲۰۲	۵۷/۸۵۳۳۵	۵۴/۸۰۲۰۷
درضرر	۱۱۹	۱۱۰۶	۱۵۱۲	۵۴	۱۶/۶۰۳۶۹	۶۹/۲۵۲۴۲	۱۶/۰۰۵۲۱	۷۰/۳۶۰۷۲	۱۰۱/۵۰۰۴۱	۸۷/۹۶۳۷۲



در ضرر　　　　بی‌تفاوت　　　　در سود

شکل ۳. قیمت اختیار خرید نماد شستا در بلک شولز، گرام چارلیه، گرام چارلیه با ابر چولگی

در جدول ۶ قیمت ضستا (اختیار خرید اروپایی نماد شستا) با نوسان تاریخی در سه روش بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی با سررسید و قیمت اعمال متفاوت محاسبه شد. از جدول ۶ نیز دیده می‌شود در کوتاه مدت (۳۵ روز) خطای هر سه مدل نسبت به میان‌مدت (۶۳ روز) و بلندمدت (۱۱۹ روز) بسیار کمتر است. در حالت درسود با سررسیدهای کوتاه‌مدت و بلندمدت از نظر خطای کمتر به ترتیب گرام چارلیه، گرام چارلیه با ابر چولگی و بلک شولز و با سررسید میان‌مدت به ترتیب گرام چارلیه با ابر چولگی، گرام چارلیه وبلک شولز قرار دارند. در حالت بی‌تفاوت با سررسید کوتاه‌مدت از نظر خطای کمتر به ترتیب گرام چارلیه، گرام چارلیه با ابر چولگی و بلک شولز قرار دارند و با سررسید میان مدت به ترتیب گرام چارلیه با ابر چولگی، گرام چارلیه و بلک شولز و با سررسید بلندمدت به ترتیب بلک شولز ، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی قراردارند. در حالت در ضرر با سررسیدهای کوتاه‌مدت و بلندمدت از نظر خطای کمتر به ترتیب بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی و میان‌مدت به ترتیب بلک شولز، گرام چارلیه با ابر چولگی و گرام چارلیه قرار دارند.مجموع مربع خطای محاسبه‌شده بلک شولز ۷۲۷۷، گرام چارلیه ۳۲۴۲، گرام چارلیه با ابر چولگی ۱۵۳۲ است. نتایج نشان می‌دهد که در مجموع گرام چارلیه با ابر چولگی نسبت به گرام چارلیه و بلک شولز خطای کمتری را به خود اختصاص داده است.

در مقایسه جدول ۵ و ۶ در حالت درسود در میان مدت و بلندمدت اختیار خرید اروپایی نماد خودرو با مدل بلک شولز خطای کمتری در محاسبه قیمت اختیار دیده می‌شود در حالی که در همین شرایط (درسود در میان مدت و بلندمدت) اختیار خرید نماد شستا مدل‌های گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابر چولگی نسبت به بلک شولز خطای کمتری را نشان می‌دهد.

بحث و نتیجه‌گیری

در مجموع پژوهش‌های داخلی محدودی در خصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی صورت پذیرفته است و پژوهش‌های موجود متمرکز هم تنها بر روی یکی از مدل‌ها هستند. به‌عنوان نمونه کیمیاگری و آفریده‌ثانی (۱۳۸۷) و ابوالی و همکاران (۱۳۹۸) فقط معادله‌ی بلک شولز را موردبررسی قراردادند. همچنین دو فرض اساسی در مدل بلک شولز ثابت بودن نوسان و پیروی از توزیع نرمال بازده‌ها است که در بسیاری از شرایط واقعی بازار صدق نمی‌کند و رفتار واقعی بازار را نشان نمی‌دهد. بعضی از پژوهش‌های داخلی مثل امیری(۱۳۹۸) و یا طهماسبی (۱۴۰۱) به بررسی تحت فرض عدم ثابت بودن نوسان پرداخته‌اند و فرض غیر نرمال بودن داده‌ها در هیچ از پژوهش‌های داخلی موردتوجه نبوده است. اما واقعیت بازار از چولگی و کشیدگی غیر نرمال داده‌ها حکایت دارد.

ضرایب چولگی و کشیدگی برای همه توزیع‌های نرمال به ترتیب صفر و سه هست در حالی که ضرایب چولگی و کشیدگی برای توزیع‌های لگ نرمال مختلف متفاوت است. به همین دلیل گزارش و تفسیر نتایج تجربی بر اساس انحراف چولگی و کشیدگی مشاهده‌شده از توزیع نرمال راحت‌تر است، زیرا نقاط مرجع ثابت هستند. چولگی و کشیدگی غیرنرمال در توزیع‌های ضمنی اختیار منجر به پدیده لبخند نوسان می‌شود که همین موضوع باعث کاهش دقت در محاسبه قیمت اختیار می‌شود. هدف اصلی این پژوهش تعیین قیمت اختیار خرید اروپایی در داده‌های با چولگی و کشیدگی غیر نرمال است. در این راستا به تعیین قیمت اختیار در سه مدل بلک شولز، گرام چارلیه و گرام چارلیه با ابرچولگی با نوسان تاریخی در سررسیدهای مختلف و در حالت‌های در سود، بی‌تفاوت و در ضرر پرداخته شده است. قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با گسترش گرام چارلیه با رویکرد چند جمله‌ای هرمیت به دست می‌آید. قیمت اختیار به دست آمده با بسط گرام چارلیه، قیمت اختیار معامله بلک شولز به علاوه معادله مربوط به چولگی و کشیدگی غیرعادی است. قیمت اختیار معامله در مدل گرام چارلیه تحت تأثیر عوامل متعددی

از جمله قیمت اولیه سهام، قیمت اعمال K، ریسک نرخ بهره r، سررسید T، نوسانات σ و چولگی و کشیدگی است.

نتایج این پژوهش نشان داد قیمت اختیار در نماد شستا برای مدل گرام چارلیه بسیار بهتر از قیمت اختیار نسبت با مدل بلک شولز است زیرا دارای دارای خطای کمتری است. به عبارت دیگر، مدل گرام چارلیه برای این نماد در مقایسه با قیمت اختیار معامله مدل بلک شولز به قیمت اختیار بازار نزدیکتر است، اما برای نماد خودرو اینگونه نیست به این دلیل که شستا چولگی و کشیدگی غیر نرمال بیشتری نسبت به خودرو دارد.

اوتاما و همکاران (۲۰۲۲) نشان دادند که بازده سهام با مقادیر چولگی و کشیدگی ناچیز، منجر به نزدیک شدن قیمت اختیار در مدل گرام چارلیه به قیمت اختیار در مدل بلک شولز می‌شود که این نتایج نیز در این مقاله برای قیمت اختیار در نماد ضخود (اختیار خودرو) با چولگی و کشیدگی کمتر در مقایسه با نماد ضستا (اختیار شستا) با چولگی و کشیدگی بیشتر تایید می‌شود. قیمت گذاری اختیار با چولگی و کشیدگی بر اساس توزیع گاوسی توسعه‌یافته چوله نیز توسط تئودوسیو و همکاران در ۲۰۲۴ مورد بررسی قرار گرفت و نشان دادند که اگر تأثیر چولگی یا کشیدگی غالب باشد، ممکن است در هر نوع قیمت‌گذاری اشتباه رخ دهد. موضوع کشیدگی غالب در داده‌ها با در نظر گرفتن مدل‌های پرش باعث کنترل و کاهش خطا در برآورد قیمت اختیار می‌شود که محمدی‌نژاد و نیسی در سال ۱۴۰۱ به این موضوع پرداختند. موضوع چولگی غالب نیز در این مقاله با تاثیر ابرچولگی مورد بررسی قرار گرفت که سبب کنترل و کاهش خطا در برآورد قیمت اختیار در مواردی که چولگی غالب باشد، می‌شود.

تقدیر و تشکر

این پژوهش در راستای طرح «مقایسه قیمت گذاری اختیار معامله تحت توزیع غیرنرمال در مدل بلک شولز و گرام چارلیه با تحلیل نوسان» که با حمایت مالی دانشگاه آیت الله بروجردی و با کد رهگیری ۲۱۸۲۸۲ -۱۵۶۶۴ انجام پذیرفته است.

References

Abdurakhman. (2019), the Fifth-Moment Effect in Black-Scholes Model and Its Performance at Market, *Applied Mathematical Sciences*. 13.

Aboura, S. and Maillard, D. (2015), Option Pricing under Skewness and Kurtosis using a Cornish Fisher Expansion, Amundi, 1-22.

Abuvali, Mehdi; Khalili Iraqi, Maryam; Hassanabadi, Hassan, and Yaqubnejad, Ahmed. (2018). Option pricing with a new analytical method for the Black-Scholes equation. *Financial Management Strategy*, (3) 135, 7-155. (In Persian)

Ahmadi, Mohammadreza; Ismaili, Neda. (2023). Asian geometric rainbow options in the stock market of Iran. Stock Exchange Quarterly, (63) 101, 16-120. (In Persian).

Alchemy, Ali Mohammad; Hajizadeh, Ehsan; Dastkhan, Hossein and Ramezani, Majid. (2016). Presenting a new hybrid model for pricing European option contracts, *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, 28(1), 87-99. (In Persian)

Alchemy, Ali Mohammad; Afride Thani, Ehsan. (1999). Presenting an integrated method for option pricing based on two models, Black Sholes and Binary Tree (a case study of the Iranian stock market), I*nternational Quarterly Journal of Industrial Engineering and Production Management*, 19(4), 119-127. (In Persian)

Amiri, Mahdia; Mirzapour Babajan, Akbar and Akbari Moghadam, Bait Elah. (2017). Investigation of the investment strategy in option contracts with the Black-Scholes pricing method (case study: gold coin option contracts in the Iran Commodity Exchange), *Financial Economy Quarterly*, (40) 11, 47-63. (In Persian).

Amiri, Mahdia. (2019). pricing of option contracts with Black-Scholes, Bonus and binomial methods (case study: gold coin option contracts in Iran Commodity Exchange). *Stock Exchange Quarterly*, (50) 13, 170-141. (In Persian)

Baghestani, Maryam; Pish Bahar, Ismail and Dashti, Qadir. (2017). Asian Option Pricing Using Monte Carlo Simulation: A Case Study of Soybean Meal. *Agricultural Economics (Economics and Agriculture)*, (41)12, 1-26. (In Persian).

Baharadmehr, Nafiseh; Tahmasabi, Narges. (2022). pricing of gold coin option contract in Iran commodity exchange market: Black-Scholes approach and buying and selling parity. *Financial Economics (Financial Economics and Development)*, (60)16, 69-92. (In Persian)

Brockman, P. and et. al. (1997), Deterministic Versus Stochastic Volatility: Implications for Option Pricing Models.

Brown C. and D. Robinson. (2002), Skewness and Kurtosis Implied by Option Prices: A Correction, Journal of Financial Research, Fall 2002, forthcoming, 9 pages.

Corrado, C. J.; Su, T. (1996), S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula. *Journal of Futures Markets* 6, 611-629.

Corrado, C. J.; Su, T. (1997), Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P 500 Index option prices. *The Journal of Derivatives* (Summer), 8-19.

Harris D. (2018), Pricing European Style Options, University of rovidence,. 1-49.

Hashminejad, Sayyed Mohammad; Abdullahi, Mohammad Reza. (2014). Forecasting financial risk, first edition, Bourse Information and Services Company, Bourse Publications. (In Persian)

Hashminejad, Seyyed Mohammad; Abdullahi, Mohammad Reza. (2014), Financial risk forecasting, first edition, Bourse Information and Services Company, Bourse Publications.

Hull, J. (1993), Options, Futures, and other Derivative Securities. Englewood Cliffs, NJ: Prentice

Ivanov, Roman. (2015), the maximum gamma-ray variance distribution process and the pricing path of the options. *European Finance*, 2, 979-993.

Jarrow, R.; Rudd, A. (1982), Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 10, 347-369.

Johnson, N.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1994), Continuous univariate distributions. 2nd edition. New York: Wiley.

Kiesel, Rüdiger, Rahe, Florentin. (2017), Option pricing under time-varying risk-aversion with applications to risk forecasting, *Journal of Banking and Finance*, 76, 120-138.

Kleinert, H. (2004), Option pricing for non-Gaussian price fluctuations, Physica A, 338, 151-269.

Leon A., J., Mencia, and E., Sentana. (2007), Parametric properties of semi-nonparametric distributions with applications to option valuation, working paper, University of Alicante.

Mohammadinejad, Reyhane; Nissi, Abdolsadeh. (2022). Spread Option Pricing Based on Libor Jump-Diffusion Models. *Financial management perspective* (38)12, 35-49. (In Persian)

Mirzaei Badizi, Vahid; Baharadmehr, Nafisa. (2017). Investigating variance risk in the Iranian coin option market, *Financial Economy Quarterly*, year 13, number 46. 145-159. (In Persian)

Natenberg, S., (1994), Option Volatility and Pricing. Chicago: Probus Publishing.

Nabavi Chashmi, Seyyed Ali. (2013). Investigating asymmetric combined strategies in stock put option trading for risk management and analysis of speculative opportunities in Tehran Stock Exchange. *Financial Knowledge of Securities Analysis*, 7(No. 2 (Serial 22)), 1-14. (In Persian)

Nabavi Chashmi, Seyyed Ali; Bahramzadeh, Razia. (2017). Investigating the effectiveness of Levi's process in option pricing. *Financial knowledge of securities analysis* (38) 11,117-127. (In Persian)

Nissi, Abdulsadeh; Maleki, Behrouz and Rezaian. Today (2016). Estimation of the parameters of the European option pricing model under the base asset with stochastic volatility with the help of the loss function approach, *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 28. (In Persian)

Peymani, Muslim; Amiri, Maitham and Sekot, Seyyed Mohammad. (2023). Valuation of option bonds with random interest rate in Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspectives*, (41) 13, 91-115. (In Persian)

Pour Heydari Omid (1999). The pricing pattern of option sheets, *financial research*, Spring, article 5, 4(2), 125-97. (In Persian)

Papantonis, Ioannis. (2016), Volatility risk premium implications of GARCH option pricing models Economic modeling, 58, .104-115.

Peymany, M., Amiri, M., & Sokout, S. M. (2023), Option Pricing Using Stochastic Interest Rate in Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspective*, 10.52547/jfmp.2023.231018.1273

Peter Carr., Liuren Wu. (2016), Analyzing volatility risk and risk premium in option contracts: A new theory

Pour Heydari, O. (1999), options pricing model, financial research, *Financial Research Journal*, 4(14)

Shakran, Zahra. (2012). Valuation of American trading options under stochastic turbulence. The third conference of financial mathematics and applications, Semnan, Semnan University. (In Persian)

Theodossiou, P., & Trigeorgis, L. (2024), Option Pricing with Skewness and Kurtosis Based on the Skewed General Gaussian Distribution. Available at SSRN 4757383.

Utama, R. C., Hilnie, A. M. F., & Siswahyudi, W. A. (2022), European put option pricing model with gram-charleir expansion in third moments. *Perwira Journal of Science & Engineering*, 2(1), 41-49.

Yazdanian, Narges; Haji Akbari, Ali. (2018). Investigating the effect of exchange rate fluctuations on the levels of skewness and elongation of portfolio returns of companies listed on the Tehran Stock Exchange. *Financial Management Perspectives*, (25) 121, 9-146. (In Persian).