فلسفه

سه نحله مهم در مبانی ریاضیات

بخش دوم

مکتب شهودگرائی و مکتب صورت‌گرایی

دکتر علی لاریجانی

چکیده:

روش ریاضی به معنی روش استنتاجی محض، شاید مهمترین مسئله مورد توجه فلاسفه ریاضی است که از زمان اقلیدس وجود داشته و در قرون اخیر به تکامل رسیده است. دقت در بحثهای بنیادی ریاضیات موجب ظهور سه نحله مهم شهودگرایی، صورت‌گرایی و منطق گرایی گردید.

حسابی شدن آنالیز بعنوان حادثه‌ای مهم در ریاضیات که تئوری مجموعه‌ها و تناقضات پایه‌ای را نتیجه داد بعنوان مقدمه‌ای برای ورود به بحث مطرح شده است.

در این مقاله دو نحله دیگر بحث شده است: ۱- مکتب شهودگرایی که موسس آن براور می‌باشد و مبتنی بر خروج ریاضیات از شکل روابط منطق صرف و مدخلیت تعقل و شهود ریاضی‌دان در ریاضیات است.

۲- مکتب صورت‌گرایی که موسس آن هیلبرت است و نوعی عکس‌العمل در برابر مکتب شهودگرایی است که به شفاف کردن استدلالهای ریاضی و تأسیس سیستمی سازگار از هندسه با اصول انتزاعی و صوری نموده کل ریاضیات می‌پردازد.

شهودگرایان، بکلّی امکان ساختن ریاضیات را برمنبای ضوابط صرف منطق و یـا شکـل کـاملاً صوری، رد می‌کنند.

شاید عمیق‌ترین نحلهٔ فلسفهٔ ریاضی را شهودگرایان[1] تشکیل می‌دهند، همان گونه که قبلاً بیان گردید، هر چند افکار براور به نحوی نشأت گرفته از آراء کانت می‌باشد امّا شاید بتوان گفت که ریشه‌هائی از افکار آنان (شهودگرایان) در آثار افلاطون قابل جستجو است. ولی ارائه این مشرب فکری در فلسفهٔ ریاضی از زمان براور آغاز گردید. در این مکتب، ریاضیات از شکل روابط منطق صرف و یا یک ساختار مکانیکی روابط خارج می‌شود و تعقل و شهود ریاضی‌دان در «برهان» و نظریه‌پردازی ریاضی مدخلیت پیدا می‌کند. شهودگرایان، بکلّی امکان ساختن ریاضیات را برمنبای ضوابط صرف منطق و یا شکل کاملاً صوری، رد می‌کنند. در نزد شهودگرایان حقایق ریاضی وجود ذهنی مستقل دارند. یعنی ریاضیات صرفاً به صورت یک سیستم فرمال یا صوری یا به صورت زبان قالب‌ریزی شده نیست، بقول ارندهِیتینگ[2] ریاضیات محصولی از ذهن انسان است، آدمی از زبان طبیعی و زبان قالب‌ریزی شده، فقط برای تبادل افکار استفاده می‌کند آن هم برای متقاعد کردن خود یا دیگران برای فهم مشترکی از موضوعات ریاضی لذا چنین همیاری زبان شناختی نمی‌تواند نمادی از ریاضی محسوب شود و به هیچ وجه خود ریاضی نخواهد بود.[3]

در واقع موضع شهودگرایان این است که علاوه براینکه ریاضیات یک سیستم سازگار صوری است، عناصری فراسیستمی نیز باید در ریاضیات به عنوان اصول موضوعه پذیرفته شود تا ریاضیات بتواند به مدل‌سازی بپردازد. این موضع شهودگرایان را در باب اشیاء ریاضی، مقایسه کنید با نظر لایب‌نیتس در نامه‌ای که برای واریگنون[4] نوشته است. لایب‌نیتس در این نامه می‌خواهد مبداء اندیشه‌ای را که منجر به کشف حساب انتگرال

1- Intiutionism 2- Heyting, A.

3- A.Heyting, "*Foundations of intutional mathematics* "philosophy of *mathematics* Selected Reading: Edited and With an Benaceraff and Hilary introduction, by patnam paul

4- Varignon

و بی‌نهایت کوچک‌ها شده است، توضیح دهد:
... هدف من این بود که نشان دهم ضرورتی ندارد که تحلیل ریاضی را بر اساس جدلهای متافیزیکی مبتنی نماییم و یا مطمئن شویم که در جهان طبیعی، خطوطی وجود دارند که به معنی دقیق کلمه و برخلاف خطوط معمولی بی‌نهایت کوچک هستند. و یا در نتیجه خطوطی وجود دارد که بی‌نهایت بزرگتر از خطوط معمولی ما هستند. به این علت است که من معتقدم برای پرهیز از هرگونه خرده‌گیری و برای اینکه بتوانم استدلال خود را برای همه به نحو روشن بیان کنم، کافی خواهد بود که «نامتناهی» را به واسطه «سنجش ناپذیر» توضیح دهم، یعنی به کمیاتی بیندیشم که به نحو سنجش‌ناپذیر یا غیرقابل قیاس بزرگتر یا کوچکتر از کمیات متعارف ما هستند. این مفهوم که درجات متعددی به هر تعداد که بخواهیم از مراحل سنجش‌ناپذیری برای ما فراهم می‌کند... به این معنی است که ذره‌ای مغناطیس یا مادهٔ مغناطیسی که از شیشه عبور کند، قابل مقایسه با یک دانه ماسه نیست و این دانهٔ ماسه قابل مقایسه با یک کره سماوی (جرم آسمانی) نیست. در عین حال باید توجه داشت که این مقادیر غیر قابل قیاس یا سنجش‌ناپذیر به هیچ وجه مقادیر ثابت و معین نیستند، بلکه در محاسبات هندسی می‌توانیم به هر مقدار که بخواهیم آنها را کوچک فرض کنیم و به این ترتیب یک نسخه یا محصول بی‌نهایت کوچک به معنی دقیق لفظ داشته باشیم.[1]

این موضع لایب‌نیتس که آغازگر نظریه منطق‌گرا در ریاضیات بود، نشان می‌دهد که او هیچ تعلق به کار نهایی که به دنبال وجود اشیاء ریاضی هستند، ندارد. و به همین خاطر از چیزی کار خود را آغاز می‌کند که نمی‌توان در وجود یا عدم آن در عالم طبیعت براحتی سخن گفت و آن مفهوم بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک است. اتفاقاً تئوری حساب انتگرال وی برهمین مفهوم ابتناء دارد، و بدین‌سان نشان می‌دهد که بدون توجه به بحث‌های وجودی در اشیاء ریاضی می‌توان نظامی برای ریاضیات ایجاد نمود. مثلاً هیتینگ درباره فهم ساختمان اعداد می‌گوید: فهم وحدت در اعداد اصل مهم محسوب می‌شود و بعد دنباله اعداد صحیح را می‌توان از این طریق یافت و بطور کلّی اعداد صحیح باید به عنوان واحدهایی در نظر گرفته شود که فقط بوسیله جایگاه و مکان آنها در

1- Latta, Rober, Leibnitz, *the Monadology and the philosophical Writings,* Oxford University press.1951

این دنباله از یکدیگر متمایز می‌گردند. ملاحظه می‌شود که دید کلّی در تمایز اعداد، دیدی شهودی است، و با شهودی ذهنی که فرد نسبت به سلسله اعداد دارد، هر عدد براساس جایگاه شهودی آن شأنی مختص خود پیدا می‌کند. ارند هیتینگ، موضع واقعی شهودگرایی را اینگونه ترسیم می‌کند:

اصولاً بحث ما، وجودی مستقل از اندیشه و ذهن خود ندارد. یعنی برای ریاضیات هستی متعالی قائل نیستم، هر چند این دیدگاه هم می‌تواند درست باشد که برای هر اندیشهٔ ریاضی، موضوعی مستقل از ذهن تصور کنیم. امّا حداقل لازم نیست که ضرورتاً چنین موضوعی کاملاً مستقل از اندیشه و ذهن بشری، برای اشیاء ریاضی قائل شویم، حتی اگر این موضوعات می‌باید از عمل منفرد و شخصی یک ذهن مستقل باشد. به هر تقدیر، اشیاء یا موضوعات ریاضی ماهیتاً به اندیشه و ذهن آدمی وابسته‌اند. وجود آنها فقط تا آنجا که بوسیله اندیشه بتواند مشخص گردند، تضمین شده است. و همینطور تا آنجا که در ذهن انسان خواص بر آنها مترتب باشد، می‌توان آنها را دارای آن خواص دانست.[1]

شهودگرایان، برای ریاضیات ماهیتی در ذهن قائلند که هم از محسوسات متمایز است و هم از روابط صرف منطق، ذهن در فرآیند تفکر دارای تصوراتی می‌گردد که این تصورات، به معنای انعکاس اشیاء بیرونی در درون ذهن نیست، بلکه یک عمل ذهنی است که برای انسان حاصل می‌شود. که این کنش ذهنی فراتر از قلمرو صرف زبان است. امّا مهمتر آن که این کنش ذهنی چگونه در ذهن به وجود می‌آید؟

در اینجا گرایش کانتی نحله شهودگرایی بیشتر هویدا می‌شود. به نظر آنان، این کنش ذهنی بر تصوری از امتداد در زمان که توسط قوه حافظه در ذهن محفوظ می‌ماند، ابتناء دارد درست نظیر نظریه کانت در باب حساب که آنرا بر شهود زمان استوار می‌دانست. به همین ترتیب می‌توان گفت در نزد فلاسفه شهودگرا، مفاهیم ریاضی معقولات ثانیه فلسفی تلقی می‌گردند بر خلاف منطق‌گرایان که ریاضیات نزد آنان جزء معقولات ثانیه منطق است. البته از همین جا مشخص می‌شود که در مشرب شهودگرایی هستی مستقلی از ذهن برای موضوعات ریاضی ضروری نخواهد بود، موضوعات ریاضی هر چند صرف ارتباط منطق نیستند لکن هستی آنها به اندیشه

۱– هیتینگ – همین مقاله.

مربوط است. اینجا تا حدودی فاصله این مشرب با نگاه افلاطونی هم روشن می‌گردد، و همین نسبت نیز در نظریه شناخت‌شناسی افلاطونی وجود دارد. امّا در تئوری شهودگرایان چنین جایگاهی برای موضوعات ریاضیات ضرورت ندارد. تا این حد برای شهودگرایان قابل قبول است که اشیاء ریاضی وجود ذهنی داشته باشند.

آراء «کرونکر» و «براور»

بطورکلّی می‌توان گفت، عکس‌العمل دوّم در مقابل ظهور تئوری مجموعه‌ها به عنوان بستر ریاضیات، مسلک شهودگرایی است که موسس آن (همانگونه که قبلاً بیان داشتیم) براور است. که با مقاله معروف وی، تحت عنوان «غیر قابل اعتماد بودن اصول منطق» (۱۹۰۸) وارد صحنه شد. اگر چه زمینه‌های کار وی توسط کرونکر[1] و پوانکاره تا حدودی آماده شده بود. نقطه شروع شهودگرایی کجاست؟ کرونکر از خود می‌پرسد:

چرا باید به سیستم ارائه شده برای مجموعه‌ها «چه در فرم غیر آکسیوماتیک آن که کانتور و دیگران بکار می‌برند و چه در فرم آکسیوماتیک» اعتماد کرد؟ چرا باید آنها را باور نمود؟ (سؤال اوّل از سه سؤال اصلی در فلسفهٔ ریاضی).

وی ابتدا به این امر توجه می‌کند که اگر اصول تئوری مجموعه‌ها به مجموعه‌های متناهی محصور شود، عقل عرفی به راحتی همه را می‌پذیرد، امّا تمام قدرت و اهمیّت تئوری مجموعه‌ها از به کارگیری آن در مورد مجموعه‌های غیر متناهی حاصل می‌گردد!

سؤال مهّم اینست: این توسعه با چه مجوزی صورت گرفته است؟

اتفاقاً قرائن بسیاری دلالت بر عدم درستی این توسعه می‌کند! مثلاً عقل عرفی می‌گوید «همواره کل بزرگتر از جزء است» در حالیکه در مجموعه‌های غیر متناهی کل و جزء می‌توانند از لحاظ اندازه مساوی باشند. مثلاً اگر W مجموعه اعداد طبیعی و N مجموعه اعداد زوج باشد، می‌دانیم که $(N \sim W)$، یعنی «اندازه» N , W یکی است![2]

1- Kronecker

۲- در ریاضیات جدید، وقتی دو مجموعه نامتناهی باشند، معادل بودن و یا یکی بودن آنها مثل مجموعه‌های متناهی تعریف نمی‌شود. در واقع تعریف متعادل بودن دو مجموعهٔ نامتناهی، توسعه تعریف «مساوی بودن» دو مجموعه متناهی است در بین دو مجموعه نامتناهی. برای اینکه دو مجموعه N, W معادل یا یک اندازه باشند باید بتوان بین دو مجموعه، یک تابع، یک به یک (۱-۱) و پوشا (onto)

نمونه دیگر این است که در مورد مجموعه‌های متناهی از اعداد طبیعی، می‌توان گفت که همواره دارای بزرگترین عضو است، در حالیکه در مجموعه‌های نامتناهی، چنین ادعایی نمی‌توان کرد که همواره دارای عضو بزرگتر است!

اهمیت اشکال براور در این است که وی نه تنها مبانی تئوری مجموعه‌ها را مورد تردید قرار می‌دهد، بلکه این اشکال را عمدتاً به منطق هم وارد می‌کند! بنظر او، این باور که اصول منطق باقی مانده از ارسطو، همواره در همه شرایط قابل اعتماد باشد، نیز نوعی توسعه بدون دلیل از حالتهای متناهی به وضعیتهائی است که نامتناهی می‌باشند! بنظر براور، منطق کلاسیک به نوعی از ریاضیات مجموعه‌های متناهی و زیر مجموعه‌های آن انتزاع شده بود. سپس از روی اشتباه و بدون توجه به این ریشه، منطق به زمینه‌هایی فراتر از ریاضیات متناهی تعمیم داده شده و دوباره به حوزهٔ ریاضیات، امّا این بار در زمینهٔ مجموعه‌های نامتناهی به کار گرفته شده است!

در اینجا مشاهده می‌شود که نوعی تأثیر پذیری از روش کانت وجود دارد. کانت هم معتقد است که غالباً موضوعاتی را در متافیزیک مطرح می‌کنند که تعمیم بلاوجه تأملات عقلی است. کل شناخت ما در قلمرو شناخت تجربی و یا مربوط به عالم ممکن تجربی است. امّا عقل علاقه‌مند است قوانینی را که در این قلمرو صحیح هستند، به قلمرو غیر مجاز تسرّی دهد و این آغاز خطای متافیزیسین‌هاست. در اینجا هم براور معتقد است: منطق کلاسیک را که قوانین آن متناسب با مجموعه‌های متناهی است و قوانین درستی هم دارد، منطق‌دانان و به تبع آنان ریاضی‌دانان بلاوجه به حوزهٔ مجموعه‌های نامتناهی تسرّی داده‌اند.

اصل ثالث بین نقیضین

یکی از معروفترین اصولی که مورد نقد

تعریف کرد. بین مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد زوج می‌توان چنین تابعی تعریف کرد.

$f: N \rightarrow W$

$f(x) = \frac{x}{2}$

این تابع یک به یک است زیرا اگر $f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$

همچنین این تابع پوشا (onto) است زیرا اگر $x' \in \omega$ باشد می‌توان $\acute{a} \in N$ پیدا کرد که: $F(\acute{a}) = x'$ باشد. ω

$\Rightarrow 2x' \in N$

$F(2x') = x' \Rightarrow \acute{a} = 2x'$ Q.E.D

پس مجموعه W و N معادلند.

براور قرار گرفته است – و قبلاً هم بدان اشاراتی داشتیم – بررسی اصل نفی وسط بین نقیضین یا ثالث بین نقیضین است. و براور آن را در مورد مجموعه‌های نامتناهی نمی‌پذیرد. این اصل در کلی‌ترین فرم آن می‌گوید:

برای هر قضیه مانند A، یا A درست است یا ßA و حالت دیگری وجود ندارد یعنی در هر قضیه‌ای یا وجه اثباتی آن ویا نفی آن درست است.

حال فرض کنید D یک مجموعه از اشیاء است و P یک خصوصیت درباره اشیاء، و فرض کنید که حکم A چنین تعریف شده باشد:

$\exists x : x \in D (P)$

یعنی عضوی از D وجود دارد که دارای خصوصیت «P» است. حال نقیض A، یعنی ⌉A چه معنایی می‌دهد؟ مسلّماً معنای آن این است: به ازاء هر عضو D، خصوصیت P صادق نیست یا اینکه "x « D (ßP)

حال اصل نفی وسط بین نقیضین می‌گوید: یا عضوی در D وجود دارد که خصوصیت P را ارضاء کند و یا همه اعضاء D، مصداق ⌉P هستند.

در ادامه بررسی خود، فرض کنید که عضوی از D معین شد، ما می‌توانیم تشخیص دهیم که آیا P صادق است یا نه، اگرچه این فرض خود مشکلات فراوانی دارد!

حال فرض کنید D یک مجموعه متناهی باشد، طبیعی است که ما می‌توانیم اعضاء D را یک به یک بررسی کنیم و ببینیم آیا دارای خصوصیت P هستند یا نه و در هر حال آیا تمام اعضاء D، نقیض P را ارضاء می‌کنند یا نه. البته اشکالات عملی فراوانی در همین سطح می‌توانند ظاهر شوند. مثلاً هنگامیکه که D مجموعه‌ای بسیار بزرگ باشد و مثلاً چند میلیون عضو داشته باشد و یا D مجموعه‌ای بزرگ نباشد، امّا تعیین اینکه D صادق است یا نه، کاری وقت‌گیر باشد. اینها را اشکالات فنی می‌نامیم نه اصولی! به هر صورت به شکل اصولی می‌توانیم بازرسی خود را از اعضاء D یک به یک انجام دهیم. دقیقاً همین امکان است که اصل نفی وسط بین نقیضین را برای مجموعه‌های محدود (متناهی) در ذهن براور قابل قبول می‌سازد.

امّا وقتی مجموعه D بی‌نهایت می‌شود، مشکل کاملاً اصولی پیدا می‌شود: دیگر نمی‌توان اعضاء مجموعه D را یک به یک بررسی کرد و نهایتاً اصل فوق را اثبات نمود!

البته در برخی مواقع می‌توان راه حل‌های موردی ارائه نمود که براور را موقتاً مجاب نماید! مثلاً اگر به نحوی یک نمونه از عناصر مجموعه

برای ریاضی‌دانان، ریاضیات شهودی جاذبه‌ای ندارد، اگر چه برای فلاسفه موضوع جالبی است!

D ساخته شوند که دارای خصوصیت P باشند:
یا با فرض اینکه همهٔ عناصر D ویژگی $\neg P$ را ارضاء می‌کنند به تناقض برسیم، مثلاً فرض کنید که مجموعه D همه زوجهای مرتب (m,n) از اعداد طبیعی باشد و خصوصیت P(m,n) این باشد که: $m^2 = 2n^2$.

در این صورت کشف فیثاغورس که $\sqrt{2}$ عددی اصم است، معادل این است که در D هیچ عنصری وجود ندارد که P را ارضاء کند!

نکته مهّم اینست که وجود این موارد هرگز به ما تضمین نمی‌دهد که درهر مورد بتوانیم چنین راه حلهائی را پیدا کنیم! مثلاً قضیه فرما یا آخرین مسئله فرما که از سال ۱۶۳۷ تا سال ۱۹۹٤ راه حلّی نداشت، نمونه‌ای است که تردید براور را تشدید می‌کند. مطابق این قضیه معادل سیال $x^n + y^n = z^n$ هیچ جواب مثبتی برای $n > 2$ در میان اعداد طبیعی ندارد. البته وقتی $n = 2$ باشد، اعداد فیثاغورسی، معادله را حل می‌کنند، مانند (۵، ٤، ۳) یا (۱۳، ۱۲، ۵) حال فرض کنید D مجموعه همهٔ چهارتایی‌هایی از اعداد طبیعی مانند (x, y, z, n) هستند که $n > 2$ می‌باشد، خصوصیت P دربارهٔ اعضاء D، یعنی:

$$X^n + Y^n = Z^n$$

تا قبل از حل مسئله فرما در سال ۱۹۹٤ مسلماً براور نمی‌پذیرفت که بگوئیم: یا عضوی در D وجود دارد که خصوصیت P را ارضاء می‌کند و یا به ازای همه اعضاء D، داریم $\neg P$

بنابراین، اگر بخواهیم خواسته براور را چنان ارضاء کنیم که وی قاعده نفی وسط را بپذیرد، باید نه فقط همه مسائل لاینحل ریاضی موجود را حل کنیم، که همه مسائل ممکن برای طرح در آینده را نیز حل نمایم. طبیعی است که در این حالت براور براحتی قاعدهٔ نفی وسط را رها کند! براور و پیروانش سعی کردند، بخشی از ریاضیات را که ممکن است بدون قاعده نفی وسط توسعه داد بسازند و بدین ترتیب، «ریاضیات شهودی» خلق شد. طبیعی است که ریاضیات کلاسیک شامل ریاضیات شهودی است و البته بسیار فراتر از آن هم می‌رود. یعنی برای ریاضی‌دانان، ریاضیات شهودی جاذبه‌ای ندارد، اگر چه برای فلاسفه موضوع جالبی است!

براور و مسئله بی‌نهایت

همانطور که قبلاً هم اشاره شد، ریشه مشکل شهود گرایان با ریاضیات کلاسیک در

تلق آنان از «بی‌نهایت» است! برای ریاضیات کلاسیک مجموعه اعداد طبیعی به همان اندازه که هریک از اعضاء تعیّن دارند، حقیق است، یعنی مجموعهٔ بی‌نهایت یک حقیقت کامل و قابل اشاره است، در حالیکه «براور» بی‌نهایت را به نحو فرعی غیر متعین و به شکل یک قوّای که همواره به سوی تعین باید سیر کند و هرگز کامل نشود می‌پندارد! در اینجا چند مطلب مهم وجود دارد که باید روشن شود.

مطلب اوّل:

معانی سورهای کلّی و جزئی در مبنای شهودی و مبنای کلاسیک باید درست فهمیده شود، سور کلّی $\forall n\, p(n)$، در مبنای شهودی یعنی هر عدد طبیعی مانند N فرض شود، حتماً $p(n)$ درست است. روش اثبات اینگونه احکام عمدتاً از طریق استقراء است، البته باید در دو رکن استقراء یعنی:

$p(o)$

$p(n) \rightarrow p(n + 1)$

مبانی شهودی بکار رود.

در مبنای کلاسیک تقریباً همین معنا وجود دارد. البته می‌تواند به این معنا هم باشد که برای هر عضو مجموعه بی‌نهایت اعداد طبیعی حکم $p(n)$ درست است. استقراء ریاضی هم در ارکان کلاسیک است!

امّا در مورد سور جزئی یعنی از قبیل $\exists n\, p(n)$، مبنای کلاسیک خیلی روشن است. یعنی: عضوی مانند N در مجموعه ω از اعداد طبیعی وجود دارد که به نحویکه $p(n)$. امّا در مبنای شهودی این جمله به نحو فشرده خبر می‌دهد که مدعی می‌تواند یک نمونه ارائه دهد که حکم P درست باشد یا به نحو اصولی صاحب روشی است که از عهدهٔ این امر برمی‌آید! از این جهت برهان شهودی باید «ساختنی»[1] باشد. لذا تمایز ریاضیات کلاسیک و شهودی هم در مفاهیم است و هم در برهان.

مطلب دوّم:

مبنای شهودی، همانطور که اشاره شد، تنها به ریاضیات کلاسیک ایراد ندارد، بلکه به مبانی منطق کلاسیک هم ایراد دارد. لذا، علاوه بر مقایسه سورها خوبست سایر عملیات منطق را هم مقایسه کنیم:

– فصل احکام، $A \vee B$، یعنی یا A درست است یا B درست است و یا اینکه ما روشی در اختیار داریم که در هر مورد به ما امکان می‌دهد که یکی از این دو را که درست است برگزینیم!

– وصل احکام، $A \wedge B$، یعنی A، B درست است.

1- Constructive

-انتاج، $A \rightarrow B$، یعنی B از A با برهان شهودی قابل حصول است! به عبارت روشن‌تر: اگر برهانی برای A باشد، با روشی معین می‌توانیم برهانی برای B بدست آوریم!

-نقیض، $\neg A$، یعنی از حکم A با برهان شهودی می‌توانیم تناقض بدست آوریم، به عبارت روشنتر، از هر برهانی برای A، می‌توان به نحو شهودی برهانی برای یک تناقض از قبیل $B \wedge \neg B$ بدست آورد.

مطلب سوّم:

سؤال اساسی اینست که چه توجیه فلسفی برای ریاضیات کلاسیک می‌توان پیدا کرد؟ مسلماً سیاست‌های یک بام و دو هوا، از قبیل آنچه هرمان وایل برگزیده است. قابل قبول نیست! وی هر وقت به عنوان ریاضی‌دان کار می‌کرد، کاملاً کلاسیک رفتار می‌کرد و هر وقت مشرب فلسفی برمی‌گزید، یک شهودگرا بود! پیشنهاد شهودگرایان کاملاً روشن است و هیچ حالت دوگانگی ندارد، کلاً پیشنهاد آنان برای ریاضیات کلاسیک قابل تحمّل نیست. در واقع شهودگرایان صورت مسئله را عوض کرده‌اند! آنان برای چیز دیگری، غیر از ریاضیات مبنای فلسفی پیدا کرده‌اند! بنابراین سؤال عمده، که ارائه مبنای فلسفی برای ریاضیات کلاسیک است بی‌جواب گذاشته شده است.

مطلب چهارم:

ارزیابی مبنای شهودگرایان است، قطع نظر از کفایت مبنای آنها طبیعی است که مبنای آنها، بخش قابل اطمینانی از منطق و ریاضیات است، به نحوی که می‌توانیم ریاضیات شهودی را قسمت مطمئنی از فکر عرفی بشر بدانیم و آن را محکمتر از هر معرفت دیگر علمی ارزیابی کنیم. این بدان معنا نیست که بقیهٔ منطق و ریاضیات مشکل دارند. مثلاً قاعدهٔ حذف وسط در نقیضین، از لحاظ عقل عرفی بسیار روشن است و قید شهودگرایان نوعی تحمیل به این قاعده است! حتّی معنای سور جزئی، مانند $\exists n\, p(n)$ هم در عقل عرفی کاملاً طبیعی است و تحمیل اینکه حتماً روشی درکار باشد تا به ازای یک n، نشان دهد چگونه $p(n)$ صادق است نوعی تحمیل است. ما براحتی بین قدرت یافتن مدّعی و معنای حکم تفاوت می‌گذاریم. نقیض $\exists n\, p(n)$، یعنی نباشد نمونه‌ای از اعداد طبیعی که برای آن حکم p درست باشد! یعنی به ازای هر عدد طبیعی $\neg p$ درست است. این‌مسئله را عقل عرفی درک می‌کند و اقرار دارد و میزان «شهود» آن هرگز کمتر از ادّعای شهودگرایان نیست!

بخش سوم

مکتب صورت گرایی [1]

قبلاً اشاره کرده‌ایم، که ریاضیات کلاسیک هنگامیکه به تئوری مجموعه آکسیوماتیک منتهی شد، ما دربارهٔ مبانی آن به سه سؤال عمده روبرو شدیم:

۱. ارتباط این تئوری با واقعیت چیست؟

۲. چرا باید به این تئوری از لحاظ عدم وجود تناقض اعتماد کرد؟

۳. چرا باید آنرا حدّ نهایی ریاضیات بدانیم؟

هیلبرت که موسّس مکتب صورت‌گرایی است، سؤال سوم را رها می‌کند و در واقع آنرا به شکل منفی پاسخ می‌دهد و باب را برای گسترش‌های دیگر در تئوری مجموعه باز می‌گذارد اما در مورد دو سؤال اولیه پاسخهای جالبی دارد:

در مورد سؤال اوّل:

می‌گوید، مهّم نیست که تناظری مستقیم بین مفاهیم و روابط تئوری با عالم واقع نباشد. این وضعیت در فیزیک نظری هم اتفاق افتاده است همین قدرکه از تئوری «کار» می آید، کافی است!

در مورد سؤال دوّم:

می‌گوید، باید در داخل تئوری ثابت کنیم که تناقض ممکن نیست! و با این شعار برنامه هیلبرت برای ریاضیات آغاز می‌شود.

برنامه‌ای که سی سال بعد معلوم شد، عملی نیست (قضایای گودل که بعداً بدان خواهیم پرداخت).

شفاف کردن استدلالهای ریاضی

اوّلین اقدام مهم هیلبرت که قطع نظر از برنامهٔ وی اهمیّت دارد، شفاف کردن استدلالهای ریاضی است. او این کار را ابتدا با هندسه اقلیدسی آغاز کرد و سپس آنرا برای تمام ریاضیات کلاسیک انجام داد. هیلبرت بیشترین بحث خود را درباب هندسه در کتاب مبانی هندسه [2] مطرح نموده است. در این کتاب، هیلبرت تلاش می‌نماید.

اولاً هندسه را براساس یک سری اصول انتزاعی ذهن بسازد که هیچ نیازی به رجوع به عالم واقع و استمداد از شهود حسّی نداشته باشد.

ثانیاً او ثابت نمود که در تحلیل اعداد حقیق و مخصوصاً در جبر متغیرهای سه گانهٔ حقیق، یک مدل ممکن برای اصول هندسی وجود دارد.

هر چند بسیاری از ریاضی‌دانان، عقاید هیلبرت را سطحی وکم اهمیت تلق نموده‌اند،

1- Formalism

2- *Foundotions of Geometry*

لکن باید توجه داشت که دوری تحقیقات هندسهٔ هیلبرت از پژوهشهای جدید امری است و تأسیس یک سیستم سازگار از هندسه با اصول مشخص و روشن کاملاً انتزاعی، امر دیگری است که قابل توجّه است.

ارکان آراء هیلبرت در هندسه

برای این کار، هیلبرت اقدامات ذیل را در همین کتاب انجام داده است:

I) نقطه و خط و سطح را اینگونه تعریف می‌کند:
تعریف: سه مجموعه اشیاء مجزّا را درنظر بگیرید. اشیاء مجموعه نخست را نقاط می‌نامیم و آنها را با C, B, A و... نمایش می‌دهیم و اعضای مجموعه دوّم را خطوط می‌نامیم و با c, b, a و... نشان می‌دهیم. و اعضاء مجموعه سوّم را صفحات می‌نامیم و با ∝، β، γ... نمایش می‌دهیم نقاط همچنین اجزاء خط هندسی، و نقاط و خطوط، اجزاء صفحه هندسی و خطوط و صفحات، اجزاء فضای هندسی، نامیده می‌شوند.[1]

بدین ترتیب هیلبرت بدون رجوع به شهود حسّی، نقطه و خط و صفحه را این گونه به صورت صرفاً سه مجموعه مجزّا تعریف کرده است که اصول ذیل در مورد آنها حاکم است.

II) قدم دوّم هیلبرت در تأسیس هندسهٔ خویش، تعریف اصول هندسه است. اصول هندسه را به پنج گروه تقسیم می‌کند:

۱. اصل تقاطع[2]
۲. اصل ترتیب[3]
۳. اصل تناسب یا تجانس[4]
٤. اصل توازی[5]
۵. اصل پیوستگی[6]

III) اصول تقاطع از نظر هیلبرت هشت تاست:

III-1) برای هر دو نقطه A ، B، یک خط a وجود دارد که شامل A,B است.

III-2) برای هر دو نقطه A , B، بیش از یک خط وجود ندارد که شامل A , B باشد.

III-3) حداقل دو نقطه بر یک خط واقع است. حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط واقع نشوند.

III-4) برای هر سه نقطهٔ C, B, A که بر یک خط واقع نباشند، صفحه‌ای وجود دارد که شامل سه نقطه باشد. و در هر صفحه نقطه‌ای وجود دارد.

III-5) برای هر سه نقطه C, B ,A که بر یک خط قرار نداشته باشند، بیش از یک صفحه

1- Hilbert. *Foundotions of Geometry,* p: (3).
2- Incidence
3- Order
4- Congruence
5- Parallel
6- Continuity

وجود ندارد که شامل هر سه نقطه گردد.

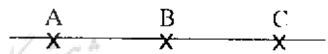
III-6) اگر دو نقطه B,A از خط a در صفحه α واقع باشند. سپس هر نقطه خط a در صفحه α واقع است.

III-7) اگر دو صفحه α و β نقطه مشترکی مثل A داشته باشند، آنگاه حداقل در یک نقطهٔ دیگر مثل B مشترک می‌باشند.

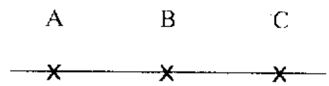
III-8) حداقل چهار نقطه وجود دارد که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند.

IV) هیلبرت برای گروه دوّم از اصول خویش، یعنی اصل ترتیب، چهار اصل قائل است:

IV1) اگر نقطه B بین C,A باشد، آنگـاه، نقاط A، C,B سه نقطه مجـزّای خـطی مـثل a خواهند بود که B در آن خط بین A، C واقـع است.

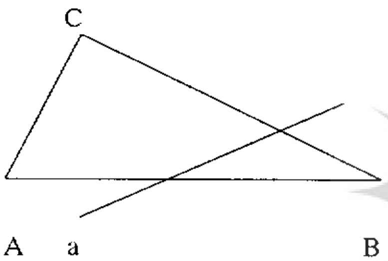


IV-2)برای هر دو نقطه A، C، حداقل یک نقطه B روی خط AC وجود دارد کـه C بـین B,A واقع است.



IV-3) از هر سه نقطه‌ای که بـر یک خـط واقع هستند، بیش از یک نقطه را نمی‌توان بین آندو دیگر، تلق نمود.

IV-4) C, B, A را سه نقطه فرض کنید که بر یک خط واقع نیستند و a را خطی در صفحه ABC فرض کنید که هیچیک از نقاط C, B, A را در بر ندارد. اگر خط a از نقطه‌ای از پاره خط AB بگذرد، حتماً از نقطه‌ای از پاره خط AC و یا نقطه‌ای از پـاره خـط BC خـواهـد گـذشت.



V) هیلبرت در گروه سوّم، یعنی اصل تناسب و تجانس، پنج اصل قائل است:

V-1) اگر B,A دو نقطه از خط a باشند، و Á نقطه‌ای روی همین خط و یا خط دیگری مثل á باشد. آنگاه همیشه می‌توان نقطه‌ای مثل (´B) در طرفی از خط á که از Á آغـاز مـی‌شود، یافت به طوری که پاره‌خط AB مـتناسب یـا مساوی پاره‌خط ´ÁB باشد و با این عـلامت

نشان داده می‌شود($AB \equiv A'B'$)

V-2) اگر پاره خط $A'B'$ و پاره‌خط $A''B''$ هر دو متناسب با پاره‌خط AB باشند، آنگاه پاره خط $A'B'$ و $A''B''$ نیز با یکدیگر متناسبند، و بطور خلاصه اگر دو پاره‌خط با پاره‌خط سومی متناسب باشند، با یکدیگر متناسبند.

V-3) در روی خط a، اگر دو پاره‌خط BC , AB وجود داشته باشند که فقط در نقطه B اشتراک داشته باشند و علاوه بر این، بر همان خط و یا خط دیگر a' دو پاره‌خط $A'B'$ و $B'C'$ وجود داشته باشد، که فقط در نقطه B' اشتراک دارند، بطوریکه $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$ آنگاه $AC \equiv A'C'$

V-4) اگر زاویه $<(h,k)$ در صفحه α داده شده باشد و خط a' را در صفحه α' داشته باشیم و طرف معینی از a' در α' نیز داده شده باشد، آنگاه در صفحه α'، فقط و فقط یک شعاع k' وجود دارد، بطوری که زاویه $<(h,k)$ متناسب یا مساوی با زاویه $<(h',k')$ است و تمامی نقاط داخلی زاویه $<(h',k')$ در طرف داده شده a' قرار می‌گیرد:

$<(h,k) \equiv <(h',k')$

و اینکه هر زاویه با خودش متناسب یا برابر است، نیز درست است

$<(h,k) \equiv <(h,k)$

V-5) اگر برای دو مثلث $A'B'C'$ و ABC تناسب یا تساوی‌های زیر را داشته باشیم:

$AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$<BAC = <B'A'C'$

آنگاه $<ABC \equiv <A'B'C'$

VI) اصل توازی: هیلبرت اصل توازی اقلیدس را اینگونه مطرح می‌کند:

اگر خط a و نقطه A در خارج از a داده شده باشد، آنگاه حداکثر یک خط در صفحه (A,a) وجود دارد که از A می‌گذرد و هیچ نقطه تلاقی با a نیز نخواهد داشت.

VII)اصول پیوستگی: هیلبرت دو اصل در گروه اصول پیوستگی مطرح نموده است:

VII-1) اصل اندازه و یا اصل ارشمیدس: اگر CD, AB دو قطعه خط باشند، آنگاه یک عدد n وجود دارد بطوریکه n تا پاره خط CD که بطور پیوسته از A در امتداد A به طرف B قرار گیرد، از نقطه B فراتر رود.

VII-2) اصل تمامیت خط [1]

این نمونه‌ای از کاری است که هیلبرت برای صوری نمودن هندسه انجام داده است البته

1- Axiom of Line Completeness

همان‌گونه که مطرح شد، این روش را در تمامی ریاضیات توسعه داد. آشکار است تلاش هیلبرت در فرمال کردن هندسه، خارج نمودن شهود از سیستم هندسی اقلیدسی است. این فرآیند به «فرمالیزاسیون»[1] معروف شده است. خلاصه مطلب اینست: ابتدا ما بخشی از ریاضیات را که در تئوری اعداد طبیعی به نحو شهودی وجود دارد، مبنا قرار می‌دهیم، سپس بر آن اساس «زبان» را می‌سازیم. ماهیتاً عناصر زبان رشته‌های متناهی هستند، لذا همه در این بخش کوچک قرار دارند. آنگاه تئوری، در واقع، مجموعه‌ای است از «قضایا» در این زبان. سپس مفهوم برهان را در این بخش می‌سازیم و عملاً «استدلال» با ماهیت فوق الذکر در اختیار ماست و این اقدامات را ماهیتاً «محدود»[2] می‌نامند.

فرض کنید تئوری معادل «فرمالیزه - ریاضی شده!» مجموعه‌ها را چنین ساختیم و آن را با علامت ZF نشان می‌دهیم. عملاً همهٔ کارهای غیر محدود، هم در این تئوری ماهیتاً محدود وجود دارد زیرا، کاری به معنای عناصر نداریم. در داخل یک سیستم بسته عمل می‌کنیم.

مرحله بعد، تلاشی برای اثبات سازگاری این تئوری است. روشهای متداول در زمان اثبات سازگاری نسبی بوده است. یعنی بر مبنای یک تئوری، مدلی برای تئوری دیگر ساخته می‌شده، امّا این امر کافی نیست! ما می‌خواهیم سازگاری ریاضیات را (یاZF) را ثابت کنیم و قبل از آن تئوری دیگری نداریم. هیلبرت متوجه می‌شود که مفهوم سازگاری (یا ناسازگاری) عملاً ما را از سیستم بسته بیرون می‌برد. لذا، وی بین تئوری و فوق تئوری (یا ماوراء تئوری)[3] تمایز می‌گذارد و بدینوسیله ماوراء ریاضی را تعریف می‌کند! یعنی اثبات سازگاری، در واقع قضیه‌ای در ماوراء ریاضی یا در ماوراء (ZF) است.

امّا این ماوراء چیست؟ و کجاست؟ مفاهیم اولیه آن کدامند؟

هیلبرت تلاشهای اولیه را انجام داد، لیکن نتوانست کار را بجایی برساند.

ارزیابی کار هیلبرت

باید گفت، امکانات منطق هیلبرت کفاف بررسی نهایی موضوع را نمی‌داد، یک ربع قرن بعد، این وسائل آماده شد. یعنی ما می‌بایست سازگاری را در دل تئوری ZF ثابت کنیم (کهZF، تئوری فرمالایز شده یا صورت بندی

1- Formalization 2- Finitary

3. Meta theory

شده مجموعه‌هاست). لذا در دل این تئوری، تئوری عروسکی (ZF) را می‌سازیم. حال ZF نسبت به (ZF) همان نسبت ماوراء ریاضی به ریاضی یا ماورای تئوری به تئوری را دارد! ZF در حکم ماوراء تئوری قرار می‌گیرد. و (ZF) تئوری کاری[1] می‌شود.

سپس حکمی از قبیل consis (ZF) حکمی است که باید دید، آیا در ZF قابل اثبات است یا نه؟

وقتی کار به اینجا رسید و در واقع مسئله هیلبرت کاملاً ریاضی بیان شد، گودل[2] پاسخ آنرا صریحاً اثبات کرد:

ZF consis (ZF)

قضیه فوق می‌گوید:

حکم consis (ZF) در تئوری ZF اثبات‌پذیر نیست!

یعنی سازگاری سیستم (ZF) در داخل ZF قابل اثبات نیست.

البته این بدان معنی نیست که ⌉consis (ZF) برهان دارد، بلکه معنای دقیق آن قضیه اینست:

عنصری مانند D وجود ندارد، به نحوی که D برهانی برای consis (ZF) در تئوری ZF باشد.

یعنی صورت دقیقتر اینست که:

ZF ∃D(D is a proof for Consis (ZF))

ممکن است، کسی بگوید، این عدم امکان اثبات شاید ناشی از «ضعف» تئوری ZF باشد و لذا، با اضافه کردن تعدادی آکسیوم بتوان کاری کرد که ZF قادر به اثبات سازگاری خود بشود، امّا قضیه گودل در واقع آن را هم رد می‌کند، زیرا گودل در واقع نشان داده است که برای مجموعه‌ای از تئوری‌ها، مانند S داریم:

S consis (s´)

عناصر این مجموعه فقط کافی است شامل مقداری از تئوری اعداد طبیعی باشند! یعنی بر آن مقدار، هر قدر اضافه کنید، مشکل حلّ نمی‌شود. حتّی اگر حکم سازگاری ZF رابه

1- Object theory

۲- به زبان ساده‌تر، قضیه گودل عبارتست از:

یک محمول وجود دارد که هیچ نظام کامل صوری برای بیان آن وجود ندارد.

در این قضیه نکتهٔ مهمّی نهفته است (در واقع گودل خاتمه مشرب صورت‌گرایی را اعلام می‌نماید)، و آن این است که مجموعه افکار و مفاهیم ریاضی را نمی‌توان دریک سیستم صوری قالب ریزی (فرمالایز) نمود. حداقل یک مفهوم خارج از این سیستم باقی می‌ماند. این قضیه نشان می‌دهد برای کمال یک سیستم ریاضی، همیشه یک عنصر فرامنطقی لازم است.

عنوان اصل موضوع به آن اضافه کنیم، باز مسئله حل نمی‌شود. زیرا تئوری جدید

$$ZF' = ZF \cup \{consis\ (ZF)\}$$

خواهد بود و برای آن باز داریم:

$$ZF' \quad consis\ (ZF')$$

لذا، بسیار معقول است که بپذیریم، برنامه هیلبرت قابل تحقق نمی‌باشد! نکته قابل توجه این است که در بیست سال اخیر، علوم نظری کامپیوتر رشد فراوانی کرده است و دانشمندان بدنبال ساختن «هوش مصنوعی» هستند. می‌توان گفت، هر نمونه از این ساختار، در واقع یک تئوری است که البته «محدود» است و فقط بخشی از تئوری اعداد را دربر دارد. به عبارت دیگر: ماشین مسئول هوشمندی، عملاً معادل کار در یک تئوری فرمالیزه ضعیف است! این امر، زحمات هیلبرت را از هدر رفتن نجات داده است! یعنی تمام آنچه هیلبرت برای اثبات سازگاری دنبال می‌کرد، کاربرد جدیدی پیدا کرده است که آثار تکنولوژیک آن دست کمی از دستاورد فلسفی مورد نظر هیلبرت ندارد!