فلسفه

سه نحلهٔ مهم در مبانی ریاضیات

● قسمت اول

دکتر علی لاریجانی

فلسفهٔ ریاضی، تحقیق و پژوهش دربارهٔ مبانی ریاضیات است. اگر فلسفه از "چیستی" به طور مطلق سؤال می‌نماید، فلسفهٔ ریاضی حوزهٔ "چیستی" را محدود به قلمرو ریاضیات می‌کند. البته این بدان معنی نیست که در فلسفهٔ ریاضی فقط در همین موضوع بحث می‌شود. اصولاً با ورود بحث مدل سازی در ریاضیات نوع نگاه به "چیستی" در ریاضیات هم تا حدّی تغییر نمود. از جمله در فلسفهٔ ریاضی که درباره مبانی قضایا، علل صدق و کذب قضایای ریاضی و ساختارهای ریاضی بحث و گفتگو می‌شود. طبعاً کانت هم به عنوان یک فیلسوف باید در این قلمرو نظراتی داشته باشد، خصوصاً که متافیزیک مورد علاقهٔ وی، ربطی عمیق با این حوزه دارد. البته نباید انتظار داشت که نوع مباحث کانت شباهت جدّی با مباحث مطروحه در نزد فلاسفهٔ ریاضی در مشربهای مختلف داشته باشد، بلکه باید تلاش کرد برای مطالب کانت در درون سیستم‌های مختلف فلسفهٔ ریاضی تعبیر مناسب پیدا نمود.

از جمله مسائلی که از دیر باز اهمیت داشته و نزد کانت هم محل اعتنا بوده است، مسئلهٔ "اندازه‌گیری" و "اندازه پذیری" است که پایه مفهوم عدد است. این امر تاریخچهٔ بسیار جالبی دارد: تا قرن نوزدهم، ریاضی دانان نتوانسته بودند، مدل ریاضی مناسبی برای اندازه‌گرفتن مثلاً طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع یک متر، داشته باشند! عدد $\sqrt{2}$ می‌بایست اختراع می‌شد. حال اگر "اندازه پذیری" را به نیازهای مسّاحی محدود نکنیم، وارد پدیده‌ای می‌شویم که نیازهای جدیدی را به ما دیکته می‌کند. برخی از این نیازها در «تئوری اندازه»[1] و "تئوری اعداد کاردینال"[2] منعکس است. البته این فقط دو نمونه است که نشان می‌دهد مباحث مطروحه نزد فلاسفه و ریاضی‌دانان به چه روشهایی به حوزهٔ فلسفه ریاضی منتقل می‌گردند. مهم این است که ما به ماهیّت "مدل محور" در مفاهیم علمی و ربط آن به ریاضیات توجه کنیم.

از طرفی آنچه نزد ریاضیدانان امروز و فلاسفهٔ ریاضی جدّی گرفته می‌شود، روش ریاضی است و آنهم عبارت است از روش استنتاجی محض. تقریباً این روش از زمان اقلیدس[3] به نحو کلاسیک و دقیق وجود داشته است. در قرن هجدهم و نوزدهم این روش به نهایت دقت رسید و زمینه برای بحث‌های بنیادی‌تر در ریاضیات و علوم آماده شد. و سه نحلهٔ مهم در مبانی ریاضی که امروز مطرحند، یعنی شهودگرایی[4]، صورت‌گرایی[5]، و منطق‌گرایی[6]، هر یک در ادامه مباحث مهمّ ریاضی و

۱- تئوری اندازه (Measure theory) در واقع توسعه مفهوم اندازهٔ طول یک پاره‌خط محسوب می‌شود. مثلاً ما طول یک فاصله را روی محور R، با تفاضل دو نقطهٔ ابتدا و انتهای فاصله به دست می‌آوریم. در واقع طول یک فاصله، اندازه آن می‌باشد و یک تابع مجموعه‌ای (Set function) است که قلمرو آن زیر مجموعه‌هایی از R است و دامنه آن اعداد حقیق.

$C: P(R) \to R$

حال این مفهوم اندازه را توسعه می‌دهیم. تابع مجموعه‌ای M چنین تعریف می‌شود که به هر مجموعه E، یک عدد حقیق نسبت می‌دهد.

$M: \Pi \to R$

$\Pi \subset P(R)$

و دارای خصوصیات زیر است:

I) برای هر فاصله از اعداد حقیق مثل I

$m(I) = L(I)$

II) اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا باشد

$m(\cup E_n) = \Sigma\, m(E_n)$

III) M یک تبدیل غیر متغیر است. یعنی اگر E مجموعه‌ای باشد که برای یک M تعریف شده باشد و

$E + Y = \{X+Y: X \in E\}$

آنگاه: $M(E + Y) = M(E)$

نقل از کتاب: Millan.H.L. Royden, *Real Analysis* (Mc. New York, 1963) p:52

۲- عدد کاردینال، یعنی تمام مجموعه‌هایی که با یک مجموعه مثل T معادل باشند. معادل بودن در تئوری مجموعه‌ها یعنی بین دو مجموعه یک تابع «۱-۱» و «پوشا» (onto) وجود داشته باشد $f: M \to N$ دو مجموعه M و N را معادل گویند که بتوان بین آن دو تابع $f(x)= y$ تعریف که اولاً f، یک‌به‌یک باشد. یعنی اگر دو مقدار، $f(y)$، $f(x)= f(y)$، $f(x) \in N$ آنگاه $x=y$. و f را پوشا (onto) گویند اگر بهازاء هر $y \in N$ یک $x \in M$ وجود داشته باشد که $f(x)= y$.

بنابراین دو مجموعهٔ معادل به این معناست که بین آنها چنین تابعی بتوان تعریف کرد و عدد کاردینالِ یک مجموعه، یعنی تمام مجموعه‌های معادل آن.

3- Euclidus

4- Intuitioism

5- Formalism

6- Logicism

فلسفهٔ ریاضی، تحقیق و پژوهش دربارهٔ مبانی ریاضیات است. اگر فلسفه از "چیستی" به طور مطلق سؤال می‌نماید، فلسفهٔ ریاضی حوزهٔ "چیستی" را محدود به قلمرو ریاضیات می‌کند.

منطق‌گرایی[7]، هر یک در ادامه مباحث مهمّ ریاضی و توجه به روش ریاضی، ظهور نمودند. البته باید توجه داشت، سه گرایش ذکر شده در مبانی ریاضیات را نمی‌توان دقیقاً دنبالهٔ کاوش‌های فلسفی سابق در باب مبانی ریاضیات دانست، هر چند از آن کاوش‌ها متأثر بوده‌اند. به عنوان مثال، در مقام مقایسهٔ آراء کانت با این نگاه در فلسفهٔ ریاضی باید متذکر شد،که کانت و دیگران می‌بایست اولاً عناصر به کار رفته در ریاضیات را از قرنطینهٔ انتولوژیک رد کنند و سپس به بنیان منطق - استنتاجی آن قضایا بپردازند.

امّا اگر، ریاضیات را مشغول به ساختن مدل‌های مورد نیاز در سایر علوم بدانیم با حالتی که ریاضیات را یکسره سراغ ریشه وجودی عناصر اولیه آن می‌فرستیم بسیار فرق می‌کند مثلاً، فرض کنید با "پلاستیک" مدلی برای "گل" ساخته‌اید، اگر ما مدل را با گل یکی بدانیم، در آن صورت عناصر مقوّم مدل با حالتی که ما مدل را غیر گل بدانیم بسیار فرق پیدا می‌کند! عین این مسئله در فلسفه ریاضی مطرح است. اگر قرار باشد "مدل" مثلاً برای تصورات فضایی ما باشد، دلیلی ندارد که از لحاظ انتولوژیک قوام مفهوم فضا را داشته باشیم. به عبارت دیگر: در مورد قضایای ریاضی، بحث انتولوژیک وجود دارد، امّا کاملاً جدا از آن پدیده‌ای است که می‌بایست به کمک ساخته‌های ریاضی مدل بخورد. با اقتباس از اصطلاح قدیمی در منطق، این تفاوت را گاهی چنین بیان می‌کنند: استنتاج ریاضی در "مادّه" نیست، بلکه در "صورت" است!

مثلاً تفاوت سیستم هندسی اقلیدس با آنچه هیلبرت[8] عرضه کرد، دقیقاً در این است که برای اقلیدس مفاهیم و قضایا متحد با پدیده مورد مطالعه بودند. لیکن برای هلیبرت صرفاً در داخل مدل قرار داشتند، لذا کار اقلیدس را "اکسیوماتیک مادّی" و کار هیلبرت را "اکسیوماتیک صوری" می‌نامند.

اهمیت این تمایز در مقایسه (و احتمالاً یافتن اتصال) افکار مثلاً کانت با ریاضی‌دانان معاصر و بعد از وی روشن می‌شود، لذا باید توجه داشت، در هر سه نحله از نحله‌های مبانی ریاضی، استنتاج ریاضی به تعبیر فوق‌الذکر، "مادّی" نیست، لیکن برای کانت همواره این استنتاج مادّی است.

به هر تقدیر، به طور کلّی، سه نحلهٔ فلسفی عمده، در مبانی ریاضیات مطرح است:

۱. منطق‌گرایی که عمدتاً برپایه نظرات راسل و وایتهد استوار می‌باشد.

۲. شهودگرایی که موسس آن براور[9] ریاضی‌دان معروف هلندی است.

۳. صورت‌گرایی که روش مورد نظر هیلبرت است و در مقابل نظریه براور طرح گردید.

حادثه‌ای مهم در ریاضیات

قبل از ورود به معرفی اجمالی مشرب‌های مختلف

7- Logicism

8- Hilbert

9- Browver

فلسفهٔ ریاضی، لازم است توضیحاتی راجع به چگونگی پیدایش این نحله‌های فلسفهٔ ریاضی بدهیم. حادثه مهمی در ریاضیات رخ داده است که می‌توان آن را "حسابی شدن آنالیز" (Arithmetization of Analysis) نامید. اعداد طبیعی و کسرها را اقلیدس در کتاب اصول خود بخوبی تعریف کرده بود. امّا وی تعریفی از اعداد اصم مانند $\sqrt{۲}$ به دست نداد بلکه تلاش نمود تا به کمك شکل هندسی مفهوم آن را ارائه نماید. اختراع و پیشرفت آنالیز، توسط گائوس[10] (۱۸۵۵ - ۱۷۷۷) و کوشی[11] (۱۸۵۷ - ۱۷۸٤) و آبل[12] (۱۸۲۹ - ۱۸۰۲) زمینه را برای واقعهٔ مهمی در ریاضیات در اواخر قرن نوزدهم آماده کرد. آن حادثه مهم عبارت بود از: امکان تعریف دقیق اعداد اصم توسّط اعداد طبیعی! البته برای این منظور روش‌های مختلفی ارائه شد. روش ویراشتراس[13] روش ددکیند[14] و روش کانتور[15]. یعنی به جای اینکه مفهوم اعداد اصم براساس یک تلقی گنگ از اشکال هندسی ساخته شود، آن را دقیقاً با کمک اعداد طبیعی تعریف کردند. پوانکاره[16] در سال ۱۹۰۰ در سخنرانی معروف خود گفته است:

> امروز در آنالیز فقط اعداد طبیعی. سیستم‌های محدود یا نامحدود از آنها باقی مانده است که توسط شبکه‌ای از روابط مساوی یا نامساوی به هم مربوط شده‌اند.

در حادثه حسابی شدن آنالیز که می‌توان گفت با تأخیر دو هزار ساله، یعنی از زمان فیثاغورث و ارشمیدس تا اواخر قرن نوزدهم صورت گرفت، سرنخ بسیاری از مباحث یافت می‌شود، که از آن جمله است تحولات منطق ریاضی، مباحث و نحله‌های مختلف در فلسفه ریاضی و بالاخره تحولات در علوم نظری کامپیوتر.

گائوس در نامه‌هایی به دوستان ریاضیدان خود همواره شکایت می‌کند که فلاسفه معاصر او، مانند کانت و دیگران، چون به این تحولات داخل ریاضیات آگاهی ندارند در فهم مسائل اصلی فلسفی مربوط به ریاضیات گرفتار این شده‌اند که نقطه و خط و عدد از لحاظ انتولوژیک چه جایگاهی دارند! در حالی که داستان واقعی کاملاً چیز دیگری است.[17]

10- Gauss
11- Cauchy
12- Abel
13- Wierstrous
14- Dedekind
15- Cantor
16- Poincaré

۱۷- برای روشنتر شدن موضوع بحث در زمینه نحوهٔ ساختن اعداد اصم از طریق اعداد گویا به چند نکته باید توجه شود:

I) مفهوم حدّ در بین ریاضی‌دانان این گونه تعریف می‌شود که فرض کنید دنباله‌ای از اعداد داریم. اگر این دنباله مرتباً به عددی نزدیکتر و نزدیکتر شود در اصطلاح می‌گویند در حد به آن عدد میل می‌کند یا آن عدد، حدّ دنباله است. تعبیر دقیقتر آن این است که عدد r را حدّ دنبالهٔ $\{P_n\}$ می‌نامند. اگر به مرکز r و هر شعاع دلخواه کوچکی مثل ε دایره‌ای رسم کنیم، یکی از اعضاء دنباله در آن قرار گیرند. و بیان ریاضی آن چنین است

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N \Rightarrow |P_n - r| < \varepsilon$$

II) اعداد طبیعی عبارتند از ۱ و ۲ و ۳ و...

اعداد گویا (rational) عبارتند از هر کسری بشکل $\frac{p}{q}$ مثلاً $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۷}{۸}$ و... که معمولاً با حرف Q نشان‌داده می‌شود: اعداد اصم عبارتند از اعدادی که گویا نیستند مثل $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و... اعداد حقیق جمع اعداد گویا و اعداد اصم است و آن را با R نشان می‌دهند.

در ریاضیات قدیم هرگز $\sqrt{۲}$ را نمی‌توانستند عدد بدانند، زیرا با مقیاس مشترک آنها فقط اعدادی مثل ۱ و ۲ و ۳ و... و حداکثر اعداد گویا می‌توانست جزء اعداد محسوب شود.

III) در ریاضیات توسط ریاضی‌دانانی نظیر ددکیند و ویراشتراس

←

تئوری مجموعه‌ها و تناقضات پایه‌ای

اولین و مهمترین نتیجهٔ حسابی شدن آنالیز، تولّد تئوری مجموعه‌ها، توسّط جورج کانتور بود. فرض کنید بخواهیم به روش ددکیند اعداد حقیق را بسازیم. در آن صورت مجموعهٔ بی‌نهایت متشکل از اعداد گویا که نیمهٔ پائینی یک "شکاف دِدِکیند"[18] را می‌سازد، خود نیز یک شیء جدید می‌باشد و مجموعهٔ متشکل از این اشیاء جدید هم خود شیء جدیدی است. دقیقاً این مسیر است که به تئوری عمومی مجموعه‌ها منتهی شد. البته وقتی این تئوری مطرح گردید بلافاصله مشاهده شد که ذهنهای ریاضی‌دانان منتظر آن بوده است. یعنی ریاضیدانان فهمیدند که از این نظریه برای دقیق‌تر کردن مباحث مختلف ریاضیات می‌توان استفاده کرد. در واقع تئوری مجموعه‌ها، تلقّ «مدل گونه» را در ریاضیات شکل داده است؛ زیرا، هنگامی که مدل‌ها از واقعیت‌ها فاصله می‌گیرند، آنگاه باید پرسید: «مدل‌ها را با چه مصالحی باید ساخت؟» تئوری مجموعه‌ها مصالح و مواد لازم برای ساختن مدلها را ارائه می‌دهد. یعنی با ظهور تئوری مجموعه‌ها دیدگاه جدید از ریاضیات به عنوان علم اختراع و گسترش و بررسی مدل‌ها، قوام منطق خود را پیدا کرد. امّا از لحاظ تاریخی این امر بعد از پدیده دیگری پیدا شده که همان ظهور پارادوکس‌ها در تئوری مجموعه‌ها است. پارادوکس بورالی فورتی، پارادوکس کانتور، پارادوکس راسل، پارادوکس دروغگو، نمونه‌هایی از این پارادوکس‌ها هستند. اولین و مهمترین اثر برخورد پارادوکس‌ها حرکت به سوی ارائه یک مبنای آکسیوماتیک برای تئوری مجموعه‌ها بود که تناقضات موجود را نداشته باشد. چنین سیستمی در اوائل قرن بیستم عرضه شد (مانند سیستم زرملو - فرانکل ZF). از اینجا بود که سؤالات مهمّی ظاهر شدند:

سؤال اوّل:

هنگامی که تئوری مجموعه‌ها به نحو طبیعی به کار می‌رفت، نوعی "احساس شهودی" پایهٔ قبول عینیت (انتولوژی) آنها بود. امّا وقتی این تئوری اکسیوماتیک شد، این ارتباط قطع شده است و لذا باید پرسید:

تئوری مجموعهٔ ZF (سیستم زرملو - فرانکل)، با واقعیت چه ارتباطی دارد؟

سؤال دوم:

چگونه باید به سیستم موجود اعتماد کنیم؟ می‌دانیم که پارادوکس‌های شناخته شده را دربر ندارد، امّا آیا پارادوکس‌هایی ناشناخته وجود ندارند؟ در واقع در اینجا سؤال از سازگاری سیستم است.

سؤال سوم:

آیا همهٔ ریاضیات را باید براساس (با مصالح و امکانات) تئوری مجموعه‌ها بنا کرد؟ در واقع تمام هندسه و آنالیز بر این اساس ساخته می‌شوند، امّا سؤال این است که چرا باید قبول کنیم که تمام ریاضیات براساس این تئوری بنا می‌شود؟

سؤالات فوق، ریشهٔ گرایش‌های مختلف در مبانی ریاضیات بوده است. و در واقع چالش‌های اصلی

←

اثبات شد که هر عدد اصم را می‌توان از طریق یک دنباله از اعداد گویا نشان داد. که آن دنباله در حدّ به آن عدد اصم میل می‌کند. مثلاً برای $\sqrt{7}$ در واقع دنباله‌ای مثل $\{a_n\}$ وجود دارد که $\{a_n\} \rightarrow \sqrt{7}$. به این ترتیب اعداد اصم نیز جزء اعداد محسوب گردیدند. و از این مطلب نتایج مهمّی در نظریه پیوستگی و فشردگی حاصل شد.

18- Dedekind Cut

نظر طرفداران منطق‌گرایی بر این بوده و هست که کلیهٔ حقایق ریاضی و منطق در نهایت امر قابل تجزیه به گزاره‌های منطقی بدیهی و یکسانند. یعنی تمام ریاضیات قابل تحویل به تعدادی گزاره‌های صادق منطقی خواهد بود.

ریاضیات هم، همگی از این سرچشمه آب می‌خورند. البته ما باید بین ریاضیات "کلاسیک" و این نحله‌های فلسفی در مبانی ریاضیات تمایز قائل شویم. ریاضیات کلاسیک فعالیت‌های ریاضی‌دانانی را شامل می‌شود که همانند ویراشتراس، کوشی، ددکیند، و کانتور به ساختن بناهای ریاضی در یک تئوری مجموعه (خواه طبیعی و غیر صریح و یا صریح و اکسیوماتیک) مشغولند و چندان توجّهی به نگرانی‌های فلیسوفان ندارند. امّا در این نحله‌های فلسفی تلاش اصلی این است که مبانی ریاضیات (مبانی کارهای مثل کارهای ددکیند، ویراشتراس و کانتور) از نظر واقع‌گرایی، نزدیکی به حقیقت (سه سؤال مهم فوق) روشن شود. لذا نوع کار این فیلسوفان (که به فلسفه ریاضی اشتغال دارند) با نوع کار ریاضی‌دانانی مثل کانتور و ددکیند متفاوت است. البته نمی‌توان آراء لایب‌نیتس و کانت را در ایجاد نحله‌های فلسفه ریاضی، بی‌تأثیر دانست. زیرا هر دو در مسائل منطق و مبانی صدق و کذب قضایا به نتایجی رسیده بودند.

لایب نیتس که برخی وی را مبدع منطق ریاضی می‌دانند، نظام ریاضی را برای ارائه اندیشه‌های فلسفی مناسب می‌دید. لایب نیتس، حقایق ریاضی و منطق را مبتنی بر اصل عدم تناقض $(\forall x \sim (p(x) \wedge \sim p(x))$ می‌دانست. این فکر که از لایب‌نیتس آغاز شد، در نزد منطق‌گرایان نظیر فرگه[19] و راسل[20] دنبال گردید.

از طرفی افکار فلسفی کانت، در ایجاد دو گرایش دیگر فلسفهٔ ریاضی یعنی شهودگرایی و صورت‌گرایی مؤثر واقع شد. نزد کانت، منطق در ریاضیات همان نقشی را دارد که در سایر علوم دارد، و به هیچ وجه نمی‌توان همه حقایق ریاضی را حقایق منطق دانست. هر چند قضایا ونتایج ریاضی که بر اصول متعارف مبتنی است، توسط اصول منطق به دست می‌آید. امّا اصول متعارف و قضایای ریاضی خود صرفاً اصولی منطق نیستند، بلکه به اموری فرا منطق نیازمندند. به همین دلیل باید از شهود مدد گرفت. وی حقایق ریاضی را تألیفی و ماتقدم می‌شمرد. لذا هیلبرت از مبانی تفکر کانتی، نحله صورت‌گرایی را در ریاضیات پی‌افکند و از طرفی براور با استفاده از تفکر کانت، نحله شهودگرایی را سامان داد. و تعداد مراحل تجزیه از گزاره‌های مرکب تا گزاره‌های ساده منطق، قطعاً تعدادی متناهی خواهد بود. یعنی تمام ریاضیات قابل تحویل به تعدادی گزاره‌های صادق منطق خواهد بود. البته نظریه منطق‌گرایی پیروان چندانی پیدا نکرد، زیرا گزاره‌های یکسان نظیر گزاره‌های تحلیلی کانت نمی‌تواند همه حقایق ریاضی را پوشش دهد. بخصوص اینکه مبنای این مکتب، اصل عدم تناقض است و اصولی که از این اصل نتیجه می‌گردد نظیر نفی نفی یک قضیه، معادل خود قضیه است ($A \rightarrow {\sim}{\sim}A$ و ${\sim}{\sim}A \rightarrow A$) در همه نظامها قضایا یا اصولی ضروری نیستند، مثلاً در نظامهای منطق چند ارزشی، چنین اصولی مثل ${\sim}{\sim}A \rightarrow A$ مورد قبول نیست. از طرفی اگر روش تحلیلی فرگه و راسل را در این زمینه نیز مد نظر قرار دهیم، بازهم، مبنای این مکتب در نهایت به قوانینی منطق

19- Frege

20- Russell

که بداهت دارند باز می‌گردد، و این بداهت در چنین اصولی باید به نحوی جزء خصوصیات ادراکی انسان باشد، مثلاً جزء فطریات و یا مستقلات عقلی و... بنابراین صرف منطق نیست که بنای ریاضیات بر آن استوار است، و ریاضیات صرفاً ساختاری ریاضی-مکانیکی ندارد.

منطق‌گرایی

توسعهٔ ریاضیات در قرن هجدهم و نوزدهم و بخصوص حسابی شدن آنالیز، سبب شد که مفاهیم مختلفی از ریاضیات را بتوان به مفاهیم ساده‌تری منحل کرد و در واقع آنها را به کمک مفاهیم ساده‌تر و بسیار عمومی‌تر تعریف نمود. این مسئله باعث شد که گروهی چنین بپندارند که: ریاضیات فقط شعبه‌ای ازمنطق است! و لذا مفاهیم ریاضی باید به کمک مفاهیم منطق تعریف شوند و قضایای ریاضی هم به عنوان قضایایی در منطق اثبات گردند! یک سیر تاریخی می‌توان برای این تفکّر ترسیم نمود:

- لایب‌نیتس (۱۷۱٦-۱٦٤٦) معتقد بود که علم منطق باید مفاهیم و اصولی تلق شوند که در سایر علوم پایه اصلی مفاهیم و قضایای آن علوم به حساب آیند.
- ددکیند (۱۸۸۸) و فرگه (۱۹۰۳-۱۸۸٤) با تلاش فراوان، مفاهیم بسیاری از ریاضیات را به مفاهیم ساده و به ظاهر منطق منحل نمودند.
- پئانو (۱۹۰۸) قضایای ریاضی را با علائم منطق بیان کرد.

بنابراین نباید عجیب باشد که در آغاز قرن بیستم، راسل معتقد شود که یکباره باید ریاضیات را از دل علم منطق بیرون آورد.

لازم است قدری توضیح بدهیم که تحویل[21] قضایای ریاضی به منطق و بالعکس، یعنی ساختن مفاهیم ریاضی از مفاهیم منطق چگونه انجام می‌شود؟

مطابق مسلک راسل و فرگه، عدد کاردینال، یعنی تمام مجموعه‌هایی که با یک مجموعه مانند M معادل هستند $M= M^{\ddot{E}}$، به همین ترتیب عدد کاردینال O و عدد کاردینال $M + 1$ تعریف می‌شوند. حال به تعریف عدد طبیعی توجه نمائید: عدد کاردینال X طبیعی است، اگر و فقط اگر هر خصوصیت استقرائی مانند P را ارضا کند.

خصوصیت P را استقرایی می‌نامیم اگر:

اولاً: عدد O دارای خصوصیت P باشد.

ثانیاً: اگر عدد M دارای خصوصیت P باشد، M+1 هم دارای آن خصوصیت باشد.

باید توجّه داشت که در اینجا ما، استقراء ریاضی را به عنوان یک واقعیت برای اعداد نمی‌پذیریم، بلکه، اعداد طبیعی را طوری می‌سازیم که این خصوصیت را داشته باشند.

حال به تعریف مذکور توجه کنید، ملاحظه می‌شود که در آن مفهوم "خصوصیت" (یعنی در بین کاردینال‌ها) به کار رفته است و ضمناً مجموعه کامل اینها می‌بایست موجود باشند تا ما از میان آنها تمامی خصوصیات استقرائی را جدا کنیم و سپس اعداد طبیعی را به دست آوریم. امّا در اختیار داشتن مجموعهٔ خصوصیت‌های کاردینال‌ها، ما را با تناقض‌های متعددی روبرو می‌کند.

لذا راسل پیشنهاد می‌کند که:

اولاً: تعریف‌های غیر انتاجی[22] ممنوع شوند.

ثانیاً: به کمک یک شبکه مطبّق و مجاز، قدم به قدم مفاهیم مزبور ساخته شوند "تئوری مشبک تایپ".[23]

21- Reduction
22- Impredicative
23- Ramified theory of types

در توضیح باید اشاره داشت که: تعاریف غیر انتاجی، چه تعاریفی هستند؟

فرض کنید A یک مجموعه باشد و a عضو. حال اگر a طوری تعریف شده باشد که هم یک عضوی از A باشد و هم A در تعریف a به کار رفته باشد، در آن صورت تعریف ارائه شده "غیر سیلانی" است، یعنی اخبار جریان (سیلان) طبیعی ندارد. نوعی دوران در آن مشاهده می‌شود. مثلاً در تعریف اعداد طبیعی، به هر صورت، "عدد طبیعی بودن" یکی از خصوصیات در بین کاردینال‌هاست. در حالی که مجموعهٔ این خصوصیات خود در تعریف "طبیعی بودن عدد" به کار رفته است. بسیاری از ریاضی‌دانان، علّةالعلل ظهور تناقضات را در مجاز شمردن تعاریف غیر اخباری دانسته‌اند، مانند پوانکاره، راسل، هرمن وایل[24] در کتاب معروفش، کمّ متّصل[25] سعی دارد نشان دهد، چه مقدار از آنالیز را می‌توان بدون استفاده از تعاریف غیر اخباری بنا کرد. راسل، به دنبال این مسلک است که تعاریف غیر اخباری را ممنوع اعلام کند. امّا در چنین حالتی جای این سؤال باقی است که : «تئوری جایگزین چیست؟»

راسل تئوری مطبّق اشیاء را پیشنهاد می‌کند. این تئوری را به نحو ساده می‌توان چنین بیان کرد:

طبقه ۰: تمام اشیاء عینی و موجود بدون تحلیل منطق، یعنی دارای وجود صریح و بی‌واسطه برای ما که در واقع این طبقه معادل وجود اشیاء است.

طبقه ۱: تمام خصوصیات مربوط به اشیاء طبقهٔ ۰ (و در واقع این طبقه همان معقول اول است که به ماهیات اشیاء مربوط می‌شود).

طبقه ۲: تمام خصوصیات مربوط به اشیاء طبقهٔ ۱ (و در واقع این طبقه معقول ثانی فلسفه یعنی مفاهیم فلسفی است).

حال که طبقات را تعریف کردیم، می‌گوییم: هیچ خصوصیتی قابل قبول نیست، مگر آنکه در یکی از این طبقات باشد. مثلاً خود مفهوم "خصوصیت غیر اخباری" یا "خصوصیت اخباری" خارج از این طبقه‌بندی است. سپس برای جلوگیری از تعاریف غیر اخباری در یک طبقه، راسل مجبور می‌شود در داخل هر طبقه، سطوح مختلفی تعریف کند: فرض کنید در طبقه $n > O$ هستیم. تمام خصوصیاتی که بدون اشاره به هیچ مجموعه‌ای تعریف می‌شوند، در سطح O. هستند آنها که در تعریف خود مجموعه‌هایی از سطح M به کار می‌برند، در سطح $M+1$ خواهند بود. با این تمایز، تعریف اعداد طبیعی اخباری می‌شود! زیرا حوزهٔ تغییرات خصوصیت استقرائی «P» در هر سطحی باشد، عدد طبیعی بودن، مربوط به یک سطح بالاتر می‌شود.امّا این طبقات و سطوح امکان ساختن آنالیز معمولی را از ما سلب می‌کند. زیرا آنالیز پر از تعاریف غیر اخباری است.

لذا راسل مجبور می‌شود اصلی را وارد کند تحت عنوان "اصل تحویل یا انحلال" یا (فروکاهش)[26] که می‌گوید: در هر طبقه تمام خصوصیات سطوح بالای O به خصوصیاتی متشابه‌المصادیق در سطح O قابل تناظر هستند.

حال اگر معتقد باشیم فقط روابط قابل تعریف موجودند، اصل تحویل یا انحلال می‌گوید هر خصوصیت غیر اخباری در یک طبقه، دارای یک نظیر اخباری در همان طبقه می‌باشد!

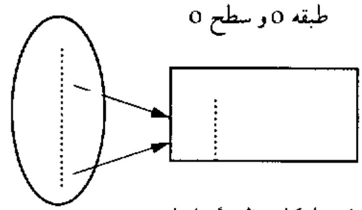
با اصل تحویل یا انحلال، راسل توانست تمام ریاضیات را از یک "مجموعهٔ مبانی" که می‌بایست منطق خوانده شوند، استنتاج نماید.

24- Herman Weyle 25- *Das Kontiniun*

26- Reducibility Axiom

طبقه o

طبقه o و سطح o



اصول و ارکان نظریهٔ راسل

برای روشن‌تر شدن نظرات راسل، اصول و ارکان کار راسل را به اجمال توضیح می‌دهیم. دیدگاه فلسفی - ریاضی راسل و وایتهد که در کتاب اصول ریاضیات بدانها پرداخته‌اند، بر چند رکن استوار است:

۱. اصول متعارف منطق: این اصول اولیه که مبنا و اساس کار منطق کردن ریاضیات محسوب می‌شوند، اصولی همیشه صادق می‌باشند، مثلاً عدد به عنوان چیزی که دارای معنایی خاص می‌باشد در نظر گرفته و تعریف می‌شود نه به عنوان مجموعه‌ای از اعضای پیوسته. بدین طریق برای هر عدد تعریفی وجود دارد. بر این اساس ریاضیات باید ساخته شود.

۲. نمادهای اولیه و گزاره‌های توابع گزاره‌ای: برای مفاهیم اولیه در این موضع معنایی قائل می‌شوند. البته این به معنای تعریف مفاهیم اولیه نیست زیرا آنها تعریف‌پذیر نیستند، لذا برای معانی اولیه و نمادها و گزاره‌های اولیه، معنایی را مشخص می‌نماید که در این مجموعه اصول کار قرار می‌گیرد. مثلاً گزاره‌ها را با علائم خاصی نظیر p و q و... نشان می‌دهند و توابع گزاره‌ای را با علائمی نظیر $\phi(x)$ و $\psi(x)$ و صدق گذاره‌ای را با $\vdash$ نشان می‌دهند و همین طور سلب و فصل و عطف و استلزام را نمادگزاری می‌نمایند. گزاره‌های اولیه که اصول متعارف حساب گزاره‌ها هستند عبارتند از:

1. $p \vee q \rightarrow p$

2. $q \rightarrow (p \vee q)$

3. $p \vee q \rightarrow (q \vee p)$

4. $p \vee (q \vee s) \rightarrow (q \vee (p \vee s))$

5. $(p \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee s))$

البته در اینکه تلاش راسل، فرگه و وایتهد در زمینه منطق کردن ریاضیات کاری بزرگ بوده وباعث توسعهٔ منطق ریاضی گردید، تردید نیست؛ لکن این امر بدان معنا نیست که این سیستم، نظامی کامل و تام را ارائه داده است. اشکالات زیادی بر این دیدگاه وارد است. کارناپ در مقالهٔ مبانی منطق‌گرای ریاضیات (سال ۱۹۳۱) می‌گوید:

> مسئلهٔ مبانی منطقی و شناخت‌شناسی ریاضی، هنوز به طور تام وکامل حل نشده است. این امر به گونه‌ای جدّی، نظر ریاضی‌دانان و فلاسفه را به خود جلب می‌کند. زیرا هرگونه عدم اطمینان در پایه‌های این "قطعی‌ترین علوم" باعث نهایت تشویش خواهد شد. از میان اقدامات مختلفی که قبلاً در راه رفع موانع برداشته شده است، هیچ یک را نمی‌توان به عنوان حلاّل همه مشکلات دانست.

این کوشش عمدتاً در سه بخش منطق‌گرایی راسل، و شهودگرائی براور و صورت‌گرایی هیلبرت صورت گرفته است. چون قصدم آن است که طرحی هر چند نارسا از مهمترین جنبه‌های ساختمان منطق‌گرایی ریاضی ارائه دهم، در نظرم این گونه است که نباید صرفاً عرصه‌هایی را مد نظر داشته باشم که روش منطق‌گرایی به طور کلّی یا به نحو جزئی در آن توفیق داشته، بلکه باید توجه به مشکلات خاص این روش نیز داشت. یکی از مهمترین

مسائل در زمینه مبانی ریاضی، چگونگی رابطهٔ ریاضی و منطق است. منطق‌گرایی قائل است که ریاضیات قابل تحلیل به منطق است، بنابراین چیزی جز منطق نیست. فرگه اولین فردی است که از این نظر حمایت کرد (۱۸۸٤). وایتهد و راسل، دو ریاضی‌دان انگلیسی‌اند که در اثر عظیم خود، اصول ریاضیات[۲۷] سیستمی کردن منطق را ایجاد کردند و از نتایج آن ابتناء ریاضیات برآن است. دیدگاه منطق‌گرایی را به دو بخش می‌توان تقسیم کرد:

۱. گزاره‌های ریاضیات را می‌توان از گزاره‌های منطق و به وسیله تعاریف روشن و صریح استخراج کرد.

۲. قضایای ریاضی را می‌توان ازاصول متعارف منطق و به وسیله قیاس منطق صرف، استنتاج نمود.[۲۸]

نقد و بررسی مشرب منطق‌گرایان

بنابراین دیده می‌شود فیلسوفان ریاضی متأخر اگر چه گرایش منطق در ریاضیات داشتند ولی هرگز منکر عدم تمامیت سیستم منطق در ریاضیات و نقاط ضعف آن نبودند. برخی از اهم اشکالاتی که بر این سیستم گرفته شده است غیر از آنچه قبلاً بدان اشارت رفت عبارتند از:

الف: در سیستم منطق گرایی ریاضیات، لاجرم می‌باید از توابع همیشه صادق استفاده نمایند که اینها یا عطفی هستند و یا فصلی، ولی به هر تقدیر همیشه صادقند، نظیر V(P,S)، تنها در شرایطی همیشه صادق است که فقط S,P هر دو صادق باشند. و در قضایای فصلی، $\wedge$ (P,S) در سه حالت همیشه صادقند یا: S,P هر دو صادق باشند، یا یکی از S,P صادق باشند، در غیر این صورت کاذب است. بنابراین سه نوع قضیه در شکل فصلی و یک نوع قضیه در شکل عطفی همیشه صادقند. صورت عام‌تر این معنا این گونه می‌شود که اگر مجموعه‌ای از قضایا مثل (pi) را داشته باشیم،

$\exists p_j : p_j = T$ اگر $\wedge (p_1 ... p_n) = T$

قضایای همیشه صادق در ساختار منطق گرایی ریاضیات نقش بسزائی دارد. امّا فهم صادق این قضایا، در ساختمان ریاضی احتیاج به امور دیگری دارد که از صرف منطق، صدق آنها نتیجه نمی‌شود.

ب: در نظام راسل، "بی‌نهایت" به عنوان اصل موضوعه یا اصل متعارف گرفته شده است. امّا روشن است ازنفس منطق چنین اصلی بر نمی‌خیزد و احتیاج به اموری فرا منطق دارد. راسل در کتاب مقدمه فلسفه ریاضی[۲۹] فصل (XIII) را اختصاص به اصل "بی‌نهایت" داده است. این اصل را این گونه بیان می‌دارد:

اگر n، عددی کاردینال[۳۰] (اصلی) و استقرائی[۳۱] باشد. آنگاه حداقل یک طبقه (مجموعه) از جزئیات وجود دارد که n قسمت داشته باشد.

همین مؤلف در کتاب علم ما به عالم خارج[۳۲] فصل ششم را به "بحث تاریخی درباره مسئلهٔ عدم تناهی" اختصاص داده و فصل هفتم را تحت عنوان "نظریه مثبت عدم تناهی"

27- *Principia Mathematica*

28- *Philosophy of Mathematics: selected readings*, edited by Benacerraf Paul and Hilary Putnam, 1964.

29- Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*.

30- Cardinal

31- Inductive

۳۲. برتراندراسل، علم ما به عالم خارج، ترجمه بزرگمهر.

نامیده است، در این رساله می‌گوید:

اگر به خاطر داشته باشید وقتی دلایلی را که علیه حقیقت و واقعیت عالم حس اقامه کرده‌اند بر می‌شمردیم گفتیم که یکی از آنها مبتنی بر امتناع اتصال و عدم تناهی است، نظر به بحثی که سابقاً درباره فیزیک نمودیم چنین می‌نماید که هیچ گونه دلیل قطعی بر عدم تناهی و اتصال در متعلقات حس یا ماده وجود ندارد. با این حال تبیین و توجیهی که مبتنی بر فرض عدم تناهی و اتصال باشد از نظر علمی آسانتر و طبیعی‌تر از هر توجیه دیگری است و چون به طوری که گئورگ کانتور ثابت کرده، تناقضات مورد ادعای مخالفان حقیقت ندارد و موهوم است دیگر موجبی نمی‌ماند که برای تبیین عالم دنبال نظریهٔ تناهی برویم.[۳۳]

وی در همین مقاله بحث مفصلی در احکام جدلی‌الطرفین کانت در باب اینکه «عالم زماناً مبدئی دارد و مکاناً محدود به حدود است» و اینکه «عالم نه مبدأ زمانی دارد و نه حدود مکانی» دارد، نتیجه می‌گیرد که اینها احکام جدلی‌الطرفین نیستند و با فرض عدم تناهی عالم به تناقض نخواهیم رسید. وی در مورد اشکالات مفهوم لایتناهی می‌گوید:

اشکالات مفهوم لایتناهی دو قسم است که قسم اوّل ظاهر و غیر واقع است و قسم دیگر به نحوی است که حل آن مستلزم قدری تفکر و استدلال جدید است که چندان آسان نیست. اشکالات ظاهره بیشتر حاصل بحث لفظی است که مفهوم عدم تناهی ریاضی با آنچه فلاسفه عدم تناهی حقیقی می‌نامند خلط می‌شود. از لحاظ لفظی "بی‌نهایت" باید به معنی «آنچه نهایت یا انتهاء ندارد» باشد. امّا در واقع بعضی تسلسلات لایتناهی دارای نهایت است و بعضی دارای انتها نیست و بعضی مجموعات لایتناهی‌اند امّا تسلسل ندارند و لذا حقاً نه می‌توان آنها را بدون انتها دانست ونه دارای نهایت.

... اشتباهاتی که به واسطهٔ این عدم تناهی (یا تسلسل) موسوم به "حقیقی" در مفاهیم حکماً داخل شده عجیب است. آنها متوجه شده‌اند که این مفهوم غیر از آن چیزی است که ریاضیّون "لایتناهی" می‌خوانند. ولی اصرار دارند بگویند که همان مفهومی است که ریاضیون بیهوده در صدد وصول به آنند. لذا در نهایت حسن نیّت ولی با اطمینان کامل به ریاضیون اندرز می‌دهند که تمسک آنها به عدم تناهی "کاذب" یا اعتباری خطاست. زیرا لایتناهی "حقیقی" بالمرّه با آن اختلاف دارد. جواب آن این است که آنچه آنها عدم تناهی "حقیقی" می‌نامند، مفهومی است که با بی‌نهایت ریاضی هیچ ارتباطی ندارد و میان آنها فقط تشابه لفظی و خیالی است... مورد نظر ما همان "عدم تناهی کاذب" یا اعتباری است.[۳۴]

در جای دیگر همین مؤلف می‌گوید:

پاره‌ای خواص غریبه ریاضیه اعداد لایتناهی نیز موجب تحیّر گردیده است، مثلاً عدد نامتناهی را نمی‌توان با افزودن یک واحد یا دو برابر ساختن آن زیادتر کرد. این گونه غرایب در نظر بسیاری متخصصین خلاف عقل و منطق آمده است، امّا در واقع فقط خلاف عادات ذهنیهٔ ماست.[۳۵]

مقصود آنکه منطق‌گرایانی مثل راسل، برای بی‌نهایت، اصلی قائلند و در سلسلهٔ استدلالات منطق از

۳۳. همان، ص ۱۶۲.

۳۴. همان، ص ۱۸۶ و ۱۸۷.

۳۵. همان، ص ۱۸۹.

آن بهره می‌جویند. باید دانست این اصل یک اصل بدیهی یا اصل متعارف نیست، چنانکه راسل در چاپ اول اصول ریاضیات، وجود بی‌نهایت را به عنوان یک اصل بدیهی یا متعارف قبول نمود. البته وی در چاپ دوم این کتاب، وجود بی‌نهایت را به عنوان یک اصل موضوعه طرح نمود. و در هر دو مورد با مشکل مواجه می‌شود. زیرا اگر ریاضیات متأخر از منطق است در ساختمان ریاضی نباید در هیچ مرحله‌ای، تعلق فراتر از منطق نیاز باشد. در حالی که وجود بی‌نهایت یا پذیرفتن بی‌نهایت به نحو مثبت یک امر منطق صرف نیست، کما اینکه ریاضی‌دان و فیلسوف دیگری نظیر هیلبرت چنین اصلی را ضروری نمی‌داند. هیلبرت در رسالهٔ در باب نامتناهی[٣٦]، بحثی دارد که ریشه کاوش‌های بشر در باب نامتناهی یا بی‌نهایت از کجا منشأ گرفته است؟ وی می‌گوید:

اول به اختصار معلوم کنیم که واقعاً چه معنایی به نامتناهی داده شده است. ابتدا مشخص کنیم از علم فیزیک چه امری در این باب می‌توان یافت. اولین تأثیر روشنی که در طبیعت می‌یابیم "پیوستگی" است. یک قطعه فلز یا حجمی از مایع را وقتی ملاحظه می‌کنیم، این تصور برایمان ایجاد می‌شود که آنها به طور نامحدود تقسیم‌پذیر هستند و هر قسمت کوچک درست همان خواص کلّ را دارد. امّا حالا روش‌های بررسی طبیعت ماده به اندازه کافی دقیق شده است و دانشمندان به حدودی از تقسیم‌پذیری رسیده‌اند که این حدود داشتن تقسیمات به تلاش آنان مربوط نمی‌گردد (مثلاً حضور آنان) بلکه به طبیعت ماده ارتباط دارد. بنابراین می‌توانیم این تعبیر را درست بدانیم که علم معاصر تمایل به رهایی از "بی‌نهایت کوچک‌ها" دارد... حتی علم فیزیک در اتمگرایی ماده موقف نمی‌گردد. در آخر همین قرن گذشته، این اتمگرایی در الکتریسته هم رخ نمود، که در ابتدای امر، بسیار نظر عجیبی به نظر می‌رسید. زیرا الکتریسته تا آن زمان امری سیال تلقی می‌شد و نمونه‌ای از یک امر پیوسته بود. بعدها معلوم گردید که از الکترون‌های مثبت و منفی به وجود آمده است. حالا علاوه بر ماده و الکتریسته در طبیعت، چیز دیگری وجود دارد که قانون بقاء در مورد آن صادق است و آن انرژی است. امّا همین انرژی هم سیستم‌پذیری نامحدود را نمی‌پذیرد. پلانک "کوانتای انرژی" را کشف نمود. از این رو چنین امری که تقسیم پذیری مورد نیاز برای تحقق بی‌نهایت کوچک را داشته باشد، وجود ندارد و هیچ کجا در واقعیت یافت نمی‌شود. تقسیم پذیری بی‌نهایت فقط در اندیشه وجود دارد. تنها یک امر ذهنی است که در واقع به وسیله نتایج تجربی مأخوذ از طبیعت تکذیب می‌گردد.

دومین جایی که با این سؤال روبرو می‌شویم یعنی این سؤال که آیا بی‌نهایت در عالم وجود دارد، وقتی است که جهان را به منزله یک کل در نظر بگیریم. در اینجا باید به بسط و توسعه عالم نظر افکند تا دریابیم آیا هر چیز بی‌نهایت بزرگ را دربر می‌گیرد؟ امّا مجدداً می‌بینیم که علم امروز مخصوصاً اخترشناسی نمی‌تواند این نظر را تأیید کند. آن هم نه با توسل به تحقیقات ناقص نظری متافیزیکی، بلکه با ادلهٔ تجربی و با استفاده از قوانین طبیعی، ایرادهای جدّی درباره

٣٦. متن سخنرانی او در سال ١٩٢٥ در کنگره‌ای که به مناسبت بزرگداشت ویراشتراس ریاضی‌دان معروف در مونستر برگزار شده بود در کتاب زیر چاپ گردیده: *Philosophy & Mathematics*: Selected Readings. Edited by paul Benacerrof and Hilary putnam.

نظریهٔ بی‌نهایت دانستن عالم، مطرح می‌نمایند. هندسهٔ اقلیدس ضرورتاً این اصل موضوعه را قبول می‌کند که «مکان بی‌نهایت است» هر چند هندسه اقلیدس یک سیستم سازگار عقلانی است. امّا این امر نتیجه نمی‌دهد که هندسهٔ اقلیدس تصویری واقعی از عالم است.

اینکه آیا مکان حقیقی، اقلیدسی است یا نا اقلیدسی، باید به وسیله تجربه و مشاهده مشخص گردد. تلاش برای اثبات لایتناهی بودن مکان به وسیله پژوهش‌های نظری صرف، اشتباهی بزرگ محسوب می‌گردد. در مشاهده این امر واقعی که در خارج، همیشه از هر مکان مشخص مکانی بزرگتر می‌توان یافت، فقط این نتیجه حاصل می‌شود که مکان بی‌حد است یعنی حد مشخصی ندارد نه اینکه نامتناهی است. بیکرانی و بی‌حَدی با متناهی بودن قابل جمع است. هندسه بیضوی نمونه ریاضی یک عالم متناهی است. امروزه هندسهٔ اقلیدسی از طریق تحقیقات صرف نظری ریاضی یا فلسفی کنارنهاده نشده، بلکه تحقیقاتی که اساساً هیچ ربطی با سؤال متناهی بودن عالم ندارد ما را به این امر رسانده است. انیشتین بخوبی نشان داد که هندسه اقلیدسی باید کنار گذارده شود.[۳۷]

هیلبرت از این مباحث می‌خواهد نتیجه بگیرد که اولاً در ساختار ریاضیات عناصر غیر منطق وجود دارد، ثانیاً بی‌نهایت را فقط می‌توان به عنوان امور حدّی نظیر آنچه کانت مد نظر داشته، پنداشت که برای تمامیت تجربه، عقل بدان توسل می‌جوید:

قبلاً دیده‌ایم که نامتناهی مطلقاً در عالم واقع یافت نمی‌شود... آیا این امر نشانگر آن نیست که وقتی انسان با ابعاد بسیار بزرگ و بسیار کوچک مواجه می‌شود در اندیشه خود، با مفهومی نامتناهی درگیر می‌گردد؟ آیا استنتاج منطقی وقتی بر امور واقعی اعمال می‌گردد، باعث سردرگمی و اشتباه می‌شود؟ البته اینطور نیست. استنتاج منطقی همیشه ضروری است فقط زمانی که تعاریفی مجرد و دلخواه را در آن مدخلیت می‌دهیم، باعث اشتباه می‌شود. مخصوصاً وقتی که تعاریف مورد نظر، حاوی بی‌نهایت موضوعات مختلف باشد. در چنین مواقعی از قیاس منطقی به نحو غیر مشروعی بهره برده‌ایم.(دقیقاً این موضوع کانت است در بحث قضایای جدلی الطرفین) یعنی به پیشینه شرطهای لازم برای نحوه استفاده صحیح از آنها توجه نشده است.

دراینکه چنین پیشینه‌ای برای شرطهای مورد استفاده وجود دارد و باید محل اعتنا در به کار بردن قیاسها باشد، با فیلسوفان دیگر موافق هستم. مخصوصاً باکانت. به نظر کانت، ریاضیات، علمی است که موضوعات آن ذهنی‌اند و ریاضیات مستقل از منطق است و این امر جزءلاینفک نظریهٔ کانت است. بنابراین ریاضیات نمی‌تواند فقط بر منطق ابتناء داشته باشد نتیجتاً تلاشهای فرگه و ددکیند در این موضع، محکوم به شکست بود.[۳۸]

در آخر این رساله می‌گوید:

37- Hilbert, *On the Infinite philosophy of Mathematics,* Selected Readings: by. P. Benacerraland H. Putnam & Hilbert, D. And W. Ackermann. *Grundug Der Theoretischen Logik*
Trans. as: Principles of Mathematical al. New York, 1950. by L.M. Hammond et

۳۸. هیلبرت، رساله‌ای در باب نامتناهی.

بی‌نهایت ریاضی نمی‌تواند یک امر منطقی صرف باشد. حداقل این است که اصل وجودِ بی‌نهایت، بداهت منطقی ندارد.
بنابراین برای داشتن چنین اصلی باید از امری فرامنطقی مدد گرفت.

اجمالاً به هدف اصلی خود که تأملاتی درباب نامتناهی بود، بازگردیم. نتیجهٔ اصولی مباحث فوق این است که نامتناهی در واقعیت وجود ندارد. نه در طبیعت یافت می‌شود و نه می‌تواند یک اصل مورد اتفاق برای تأملات نظری عقلانی باشد. در ارتباط با آثار اولیه فرگه و ددکیند، پذیرفتیم که برخی مفاهیم شهودیِ بینش‌هایِ غیرمنطقی، شروط لازم برای معرفت علمی‌اند و تنها منطق برای این منظور کافی نیست و عملیات با نامتناهی فقط از راه و روشهای متناهی باعث یقین می‌گردد. تنها نقشی که برای نامتناهی باقی مانده است آن است که در حکم "تصور"[۳۹] باشد. و مقصودمان از تصوّر هماهنگ با اصطلاح کانت است که آن را امری منبعث از تعقّل صرف می‌داند که برتر از هر تجربه‌ای است تا باعث تمامیت پژوهش‌های تجربی گردد.

بنابراین می‌توان فهمید که بی‌نهایت ریاضی نمی‌تواند یک امر منطق صرف باشد. حداقل این است که اصل وجود بی‌نهایت، بداهت منطق ندارد. بنابراین برای داشتن چنین اصلی باید از امری فرامنطق مدد گرفت.

ج: در بحث‌های وجودی در نظام منطق نیازمند مفروضات فرامنطق هستیم، مثلاً اینکه به ازای هر a که عضوی از مجموعه A باشد، عضوی مثل b وجود دارد که متعلق به A باشد و این رابطه در مورد آنها برقرار باشد.

$$\forall a, a \in A : \exists b, b \in A \rightarrow a.b = b.a$$

وجود چنین عضوی مثل b، یک ضرورت منطق نیست. لذا اگر ریاضیات را بخشی از منطق به حساب آوریم کلیهٔ اصول متعارف و اصول موضوعهٔ آن باید جزء منطق به حساب آیند. و ملاحظه می‌شود که چنین امری در مورد ریاضیات امکان‌پذیر نیست و قضایای وجودی که به عنوان اصل پذیرفته‌ایم اموری صرفاً منطق محسوب نمی‌گردند.

د: بداهت در اصول متعارف ریاضیات همیشه نوعی بداهت منطق محسوب نمی‌گردد. اگر ریاضیات را جزء منطق محسوب کنیم، باید اصول متعارف ریاضیات بداهتی منطق داشته باشند. در حالی که همیشه این‌گونه نیست. به عنوان مثال $\sim\sim k \rightarrow k$ (یعنی نفی نفی یک چیز معادل خود آن است) و یا (یک چیز، نفی نفی خود را نتیجه می‌دهد) $k \rightarrow \sim\sim k$ در همه نظام‌ها یک امر ضروری نیست، نظیر نظام‌های منطق چند ارزشی. اگر اصول متعارف ریاضی، بداهت منطق داشته باشد، همان اشکالی را که به کانت در زمینهٔ ریاضیات وارد است به نظریهٔ منطق‌گرایان از بُعدی دیگر، می‌توان طرح نمود. وجود هندسه‌های مختلف که مطابق نظر منطق‌گرایان، اصول متعارف آنها بداهت منطق دارد، چگونه قابل توجیه است؟ ممکن است گفته شود، اصول متعارف دو نوع ریاضی می‌تواند بداهت منطق نداشته باشد وقابل جمع

39- idea

باشد. البته این حرف درستی است، لکن در مورد اصول متعارف دو بخش از ریاضیات که متناقض هم هستند قابل پذیرش نیست، مثلاً هندسه‌های نااقلیدسی و هندسه اقلیدسی در یک اصل (حدّاقل) متناقض هم هستند، یعنی در هندسه اقلیدسی اصل توازی درست فرض می‌شود و در هندسه‌های دیگر ضد آن، درست فرض می‌شود. بنابراین این اشکال مهمّی است که اگر در شعب مختلف ریاضیات، اصول متعارف بداهت منطق داشته باشند دچار تناقض می‌شویم. در مورد نظریه کانت هم می‌توان شبیه به این مطلب را طرح کرد. کانت معتقد است که هندسه علمی است که بر شهود محض مکان مبتنی است. اگر این نظریهٔ شهودی را در مورد هندسه بپذیریم، آنگاه باید هم هندسهٔ اقلیدسی و هم هندسه‌های نا اقلیدسی منطبق برصورت حساسیت باشد که امری متناقض است. البته هم ریاضیدانان و هم فلاسفه انتقادات دیگری بر مشرب منطق‌گرایی وارد کرده‌اند که چون مقصود ما در این وجیزه بحث مستوفی در این امر نیست از طرح آنها صرف نظر می‌کنیم.

ه: شاید بتوان گفت مهمترین اشکال بر نظریه راسل مربوط به اصل تحویل یا انحلال می‌شود. همان گونه که قبلاً متذکر شدیم، راسل بعد از طراحی تئوری "مشبک تایپ" و تعریف طبقات، مجبور شد برای جلوگیری از تعاریف غیراخباری در داخل هر طبقه، سطوح مختلف را تعریف کند. با این اسلوب، امکان ساختن آنالیز معمولی دچار مشکل شد، زیرا آنالیز دارای تعاریف غیر اخباری می‌باشد. براین اساس، راسل اصل تحویل یا انحلال را مطرح نمود. لیکن مشکل در همین جا ظهور می‌کند، زیرا

اصل انحلال، هیچ گونه بداهت مورد نیاز را برای اینکه یک اصل منطق به حساب بیاید، ندارد. و از سایر اصول منطق هم به دست نمی‌آید. در واقع این امر، به نحوی آغاز "ختم" پروژه "منطق‌گرایی" باید محسوب گردد. در این مورد هرمان وایل می‌گوید:

در سیستم ارائه شده در کتاب اصول ریاضیات *(principa mathematica)* ریاضیات بر مبنای منطق ساخته نشده، بلکه در یک بهشت خیالی منطق‌دان قرار گرفته، و هر که آمادگی پذیرش این سیستم ماورایی را داشته باشد، می‌تواند ضمناً و بلکه با راحتی بیشتر، سیستم اصول موضوعی مجموعه (مانند فرانکل - زرملو و غیره) را نیز بپذیرد که حداقل از سادگی و آسانی بالائی برخوردار است!