مجله آموزش مهندسی ایران، شماره ۴، جلد ۱، ص. ۷۸-۶۵

تحلیلی در آموزش مکانیک سازه‌ها تئوری اجسام سه‌بعدی و تئوری اجسام خمشی

قدرت‌ا... کرمی

استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

و عضو وابسته گروه علوم مهندسی فرهنگستان علوم

چکیده : در این مقاله به دو دیدگاه فرمولبندی در آنالیز و طراحی سازه‌ها که در آموزش مکانیک و دینامیک سازه‌ها مورد استفاده است، اشاره می‌شود. این دو دیدگاه، یکی بر اساس مکانیک اجسام سه‌بعدی [۱] (که معمولاً در تجزیه و تحلیل اجسام سه‌بعدی یا دوبعدی تنش و کرنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد) و دیگری بر اساس مکانیک اجسام خمشی [۲] (که در آنالیز پوسته، ورق و تیرها استفاده می‌شود) استوار شده است. با توجه به تعاریف و اصطلاحات در علم مکانیک، این دو دیدگاه دارای یک منشأ هستند و در واقع، دیدگاه آنالیز اجسام خمشی از دیدگاه سه‌بعدی جدا شده است. متغیرها، پارامترها و معیارها در دیدگاه مکانیک سه‌بعدی و خمشی تا اندازه‌ای با هم متفاوتند. مثلاً در مکانیک سه‌بعدی تغییرشکلها تفکیک نمی‌شوند، در صورتی که در دیدگاه مکانیک اجسام خمشی تغییرشکل به تغییرشکلهای خمشی، غشایی [۳] و خمشی با درجه بالا [۴] تقسیم‌بندی می‌شود و متغیرهای دیگری همچون تغییر انحنا تعریف می‌شود. در واقع، دیدگاه دوم فقط به منظور تجزیه و تحلیل اجسام پوسته‌ای (مثلاً یک پوسته نازک تحت شرایط نیروی برون‌صفحه‌ای) یا اجسامی که تغییرشکلهای خمشی و غشایی آن قابل تفکیک باشد (مثلاً یک تیر بلند که

---

۱. Three-dimensional Analysis

۲. Flexural Mechanics

۳. Membrane

۴. Higher-order Bending

خمش آن قابل ملاحظه می‌باشد)، تدوین شده است و قطعاً به جهت کاربری، تقریبهایی را باید به‌کار گرفت. نامگذاری دیدگاه دوم به نام مکانیک اجسام خمشی، به دلیل آن است ۴ که معمولاً در بسیاری از موارد، خمش نقش بسیار مهمتری را ایفا می‌کند. این تقسیم‌بندی، این معنی را می‌دهد که تئوری سه‌بعدی همه جا کاربرد دارد، حال آنکه تئوری اجسام خمشی فقط برای اجسامی با هندسه مخصوص و تحت شرایط نیرویی معینی کاربری دارد. تغییر انحنا به عنوان معیاری قابل مشاهده و قابل اندازه گیری در دیدگاه نوع دوم، به عنوان پارامتری مستقل مستقیماً مورد استفاده قرار می‌گیرد و این امر سبب توسعه و پایه‌ریزی دیدگاه دوم در علم مکانیک سازه‌ها شده است. شاید تعداد زیادی از دانشجویان و مهندسان، این دو دیدگاه را با توجه به نام سازه‌ها و ابعاد کاربردی آنها متوجه نشوند (مثلاً در آنالیز تیرها یک مهندس بدون تأمل مستقیماً به سراغ تئوری اجسام خمشی می‌رود، بدون آنکه فکر کند که تئوری سه‌بعدی می‌تواند جواب بهتری داشته باشد). حال آنکه در بسیاری از موارد، هر دو دیدگاه یا ترکیبی از آنها را می‌توان در آنالیز یک سازه به کار گرفت. شناخت این تمایز، در آموزش و سرانجام در تجزیه و تحلیل و طراحی سازه‌ها و مکانیک جامدات کمک زیادی می‌کند.

۱. مقدمه

از زمان شروع آموزش و سیستم‌بندی علوم فنی و مهندسی و تقسیم‌بندی آن به شاخه‌های متفاوت، دروسی تخصصی در زمینه‌های اندازه گیری تغییرشکل، تنش و مقاومت اجسام برای دوره‌های مهندسی مکانیک، سازه، عمران، مواد و ... تدوین شده است. دروسی همچون مقاومت مصالح، الاستیسیته، ورقها و پوسته‌ها، دینامیک سازه‌ها، پایداری سازه‌ها و ... که هر کدام به نحوی از دو دیدگاه مکانیک سه‌بعدی یا مکانیک خمشی، برای معرفی متغیرها و معیارها و اندازه گیری آنها کمک می‌گیرند. متأسفانه در اغلب کتابها به جهت ساده‌سازی در آموزشهای ابتدایی، تمایز این دو دیدگاه را یادآور نمی‌شوند، حال آنکه یک مهندس طراح و محاسب در بسیاری از موارد در فرایند طراحی و آنالیز سازه به این مشکل برخورد می‌کند که از کدام یک از این دو دیدگاه می‌توان حل مسأله را سریعتر، دقیقتر، اقتصادی‌تر و ... پی گیری کرد. این مسأله در سالهای جدید با به کارگیری بسته‌های نرم‌افزاری آنالیز با کمک اجزای محدود و به خصوص در سازه‌ها بسیار حادتر شده است. اغلب در کتابخانه این بسته‌های نرم‌افزاری المانهای وسیعی بر اساس هر دو دیدگاه فرمولبندی شده است. مثلاً از متداولترین المانها می‌توان به انواع المانهای مکعبی یا منشوری

توپر[۱]، المانهای دوبعدی آنالیز تنش و کرنش صفحه‌ای[۲]، انواع المانهای پوسته[۳]، المانهای ورق[۴]، المانهای تیر[۵] و ... اشاره کرد. المانهای توپر و صفحه‌ای بر اساس دیدگاه اول و المانهای پوسته، ورق و تیر معمولاً بر اساس دیدگاه دوم پایه‌ریزی می‌شوند. در بسیاری از موارد، یک سازه را می‌توان با چند نوع المان مختلف مدلسازی کرد و این سؤال مطرح می‌شود که باکدام نوع المان و چرا؟ علاوه بر این سؤالها همیشه ابهاماتی در خصوص سهولت مدلسازی وجود دارد که جواب کدام‌یک صحیحتر می‌باشد و چرا. در بسیاری از مواقع، دانشجویان و مهندسان این سؤال را مطرح می‌کنند که المان پوسته که دارای شش درجه آزادی حرکت سینماتیکی است (سه حرکت انتقالی و سه حرکت چرخشی - رجوع شود به شکلهای (۱) و (۲) نسبت به المان سه‌بعدی توپر که فقط دارای سه درجه آزادی است (سه حرکت انتقالی - رجوع شود به شکل‌های (۳) و (۴)، چه مزیتی دارد؟ یا اینکه المان سه‌بعدی حرکت چرخشی ندارد؟ این مسأله زمانی حادتر می‌شود که ممکن است در سازه‌ها ترکیبی از هر دو نوع المان استفاده شود و در سطوحی یا نقاطی این المانها باید با هم ترکیب شوند و در آن صورت اختلاف درجات آزادی چه می‌شود؟ شاید تئوری ورقها و پوسته‌ها اولین درسی باشد که دانشجویان کارشناسی مکانیک و سازه به اختلاف این دو دیدگاه و این نکته پی می‌برند. زمانی که تدوین معادلات سینماتیک یک ورق آغاز می‌شود، بسیاری در جواب اینکه چرا تئوری ورقها و پوسته‌ها به صورت مطلبی جداگانه تدوین شده است، در ذهنشان به علت کثرت سازه‌های پوسته‌ای، ورقی یا تیری‌شکل، بر می‌خورند. سؤالی که قبل و بعد از آموزش درس ورقها و پوسته مطرح نمی‌شود این است که آیا حل مسائل پوسته‌ها با دانسته‌های صحیح در مطالب تدوین شده قبلی در دروس مقاومت مصالح یا تئوری الاستیسیته قابل حل نیست؟

جدا شدن و تدوین تئوری اجسام خمشی و پوسته‌ای از تئوری سه‌بعدی به گذشته‌ای دور بر می‌گردد. شاید یکی از زمینه‌هایی که در علم مکانیک بیشترین زمان و تأمل فکری را از دانشمندان طراز اول این علم گرفته باشد و زمینه مجادله و بحث‌برانگیزترین موضع علمی بوده است، تدوین

---

۱. Solid Elements

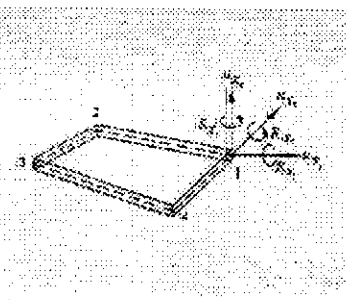
۲. Plane Stress/Strain Elements

۳. Shell Elements

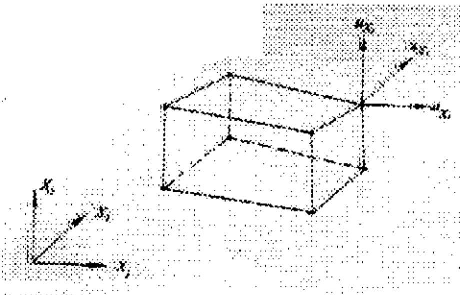
۴. Plate Elements

۵. Beam Elements

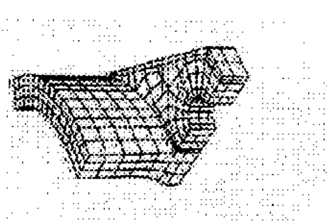
مکانیک اجسام پوسته‌ای و خمشی باشد. به عنوان نمونه، فرمهای بسیار مختلفی از روابط کرنش خمشی - جابه‌جایی ارائه شده است. بحثهای زیادی در چهارچوب فرمولبندیهای مورد توافق بر روی مثلاً نگهداری یا حذف یک جمله در فرمولبندیها، معادلات یا روابط هنوز هم ادامه دارد. از جمله افراد بارز و پیشروان این علم، با توجه به اهمیت کارهای باارزش آنها در این زمینه، می‌توان به نامهای آشنایی چون لاو [۱]، کوتیر [۲]، دانل [۳]، ریسنر [۴]، فلوگه [۵]، نقدی [۶]، نوازیلو [۷]، ساندرز [۸] و ولاسو [۹] اشاره کرد.



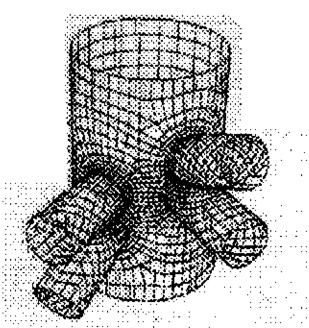
شکل ۱ یک المان پوسته‌ای با چهارگرهی
با شش درجه آزادی در هر گره



شکل ۲ یک المان جامد توپر چهارگرهی
با سه درجه آزادی در هر گره



شکل ۳ مدلسازی قسمتی از یک پوسته
جایاتاقان به وسیله المانهای توپر



شکل ۴ مدلسازی لوله و اتصالات لوله‌ای
با استفاده از المانهای پوسته

۲. مراحل تدوین معادلات حاکم

برای اندازه‌گیری تغییر فرم یا حرکت، نیاز به محاسبه جابه‌جایی تمام نقاط یک جسم است، لذا تدوین معادلات حرکت با توجه به عوامل آن در چهارچوب قوانین و تعاریف علم پایه‌ای مکانیک محیطهای پیوسته انجام می‌گیرد. این روابط بر اساس تعاریف ریاضی معیارها (همچون کرنش) و قوانین ترمودینامیکی (همچون تعادل انرژی و بالانس مومنتم) پایه‌گذاری شده است. قوانین ترمودینامیکی معمولاً یک شکل ثابت دارند، لیکن شکل تعاریف ریاضی معیارها و پارامترهای سینماتیکی و سینتیکی می‌توانند متعدد باشند. معیارهایی همچون کرنش[۱]، تنش[۲] و ...، گرچه امروزه برای ما معنی و مفهومی قابل لمس دارند، لیکن بعضی از این معیارها می‌توانستند طور دیگری تعریف شوند، همچون تعاریف مختلف کرنش که در ذیل آمده است. این تعاریف هم در مقدار و اندازه و هم از منظر مختصاتی که در آن حرکت یا تغییرشکل اندازه‌گیری می‌شود، از همدیگر متمایز می‌شوند. برای اندازه‌گیری کرنش تعاریفی به صورت ذیل پیشنهاد و به کارگرفته شده است [۱۰ و ۱۱].

- معیار کوشی[۳]: $e^C = \left(\frac{ds - dS}{dS}\right)$
- معیار سواینگر[۴]: $e^S = \left(\frac{ds - dS}{dS}\right)$
- معیار هنکی[۵]: $e^H = \ln\left(\frac{ds}{dS}\right)$
- معیار آلمانسی[۶]: $e^A = \frac{۱}{۲}\left[۱ - \left(\frac{dS}{ds}\right)^{۲}\right]$
- معیار گرین[۷]: $E^G = \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{dS}{ds}\right)^{۲} - ۱\right]$

---

۱. Strain
۲. Stress
۳. Cauchy
۴. Swainger
۵. Hencky
۶. Almansi
۷. Green

در تعاریف فوق dS و ds به ترتیب طول المانی بسیار کوچک در حالتهای قبل و بعد از تغییرشکل هستند و مقدار کرنش، با توجه به این تعاریف، در یک نقطه محاسبه می‌شود. از تعاریف فوق، دو تعریف کرنش کوشی و سواینگر، معیار اندازه گیری کرنشهای خطی در تئوری الاستیسیته هستند. معیار کرنش هنکی، برای کاربری در تئوری پلاستیسیته مناسب است. معیارهای آلمانسی و گرین، هر دو از معیارهای غیرخطی کرنش هستند که در تئوری غیرخطی الاستیسیته و تغییرشکلهای کلی کاربرد دارند.

چنانچه از اثر نیروهای حرارتی صرف‌نظر شود، به کارگیری معادلات تعادل دینامیکی به جای قوانین ترمودینامیک بسنده می‌نماید. معادلات حاکمه در این موارد، روابط سینماتیک، روابط مشخصه و معادلات تعادل را شامل می‌شود. در ذیل، به طور مختصر از نگاه مختصات لاگرانژی یا مختصات تعبیه شده در نقطه در حالت تغییرشکل نیافته یا به عبارتی دیگر، مختصات مادی و بر اساس دو دیدگاه آنالیز سه‌بعدی و مکانیک اجسام خمشی گزارش می‌شود. به منظور مختصر کردن کل نوشته، فقط روابط سینماتیک آورده می‌شود.

۳. روابط سینماتیک

از دیدگاه مکانیک سه‌بعدی با توجه به شکل (۵) چنانچه نقطه P تحت تأثیر نیروی خارجی از محل X به حل X+U حرکت کند، مقدار کرنش گرین (E_{IJ}) به صورت ذیل محاسبه می‌شود [۱۰، ۱۱]:

$$E_{IJ} = \frac{۱}{۲}\,(C_{IJ} - G_{IJ})$$

در معادله فوق C_{IJ} و G_{IJ} به ترتیب مؤلفه‌های تنسور تغییرشکل و تنسور متریک (مربوط به مختصات لاگرانژ واقع در نقطه P) هستند. این ماتریسها با توجه به شکل (۵) به صورت ذیل محاسبه می‌شوند.

$$G_{IJ} = G_I.G_J = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X^I} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X^J}$$

$$C_{IJ} = C_I.C_J = \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{U})}{\partial X^I} \cdot \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{U})}{\partial X^J}$$

C_I ،G_I و U به ترتیب بردارهای پایه مختصات، تغییرشکل و جابه‌جایی است. مقدار کرنش گرین بر حسب تغییرات جابه‌جایی در نقطه P به شکل ذیل به دست می‌آید [۱۰، ۱۱].

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (U_{I|J} + U_{J|I} + U_{M|I} + U_{M|J})$$

در معادله فوق | نمایشگر مشتقات هم‌وردا[1] است، یعنی:

$$U_{I|J} = U_{I,J} + U_N \Gamma_{IJ}^{N}$$

که Γ_{IJ}^{N} علامت کریستوفل از نوع دوم می‌باشد [۱۰، ۱۱]. اندیس , نمایشگر مشتقات معمولی است. در واقع در دیدگاه سه‌بعدی، تغییرات یا گرادیان حرکت در نقطه P با تغییرات سه بردار که همان بردارهای پایه مختصات در حالت تغییرشکل نیافته در نقطه P را می‌سازند، اندازه‌گیری می‌شوند. از اندازه گرادیان حرکت در نهایت مقدار کرنش در نقطه مورد نظر نسبت به مختصات در حالت تغییرشکل نیافته مشخص می‌شود. گرچه این مختصات می‌تواند یک مختصات کلی منحنی‌الخط باشد، لیکن برای ساده‌تر کردن حل می‌توان از مختصات کارتزین استفاده کرد. در این صورت مشتقات هم‌وردا به مشتقات عادی تبدیل می‌شود (| به , تبدیل می‌شود). در آنالیزهای خطی از اثرهای مشتقات درجه دوم نیز صرف‌نظر می‌شود و در این صورت مقدار کرنش از رابطه ساده شده ذیل که به عنوان تعریف کرنش خطی آورده شده است، محاسبه می‌گردد.

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (U_{I,J} + U_{J,I})$$

از منظر دیدگاه مکانیک اجسام پوسته‌ای، تغییرات در نقطه P در لایه‌ای از پوسته نسبت به نقطه‌ای دیگر مانند O (نقطه O معمولاً در لایه میانی پوسته و در زیر پای عمودی که از نقطه P به این صفحه صاطع می‌شود قرار دارد) همان طوری که در شکل (۶) به نمایش در آمده است،

---

۱. Covariiant

اندازه‌گیری می‌شود. لزوم به‌کارگیری نقطه O برای آن است که بتوان مقدار انحنا (که تنسوری دوبعدی می‌باشد) را به عنوان معیاری قابل محاسبه و مشاهده در مکانیک اجسام خمشی تعریف کرد. علاوه بر آن، گرچه مکان نقطه O می‌تواند جایی غیر لایه میانی باشد، ولی معمولاً روی این لایه انتخاب می‌شود. برای آنکه در پوسته‌های نازک بتوان با تقریب خوبی حرکت P را با حرکت O مرتبط کرد و همین طور نیروها و ممانهای منتجه را (که بر روی ضخامت پوسته انتگرال‌گیری شده است) را در این نقطه گذاشت.

در این برخورد ماتریسهای متریک و تغییرشکل که در حالت آنالیز سه‌بعدی ماتریسهای ۳×۳ بوده‌اند، به یک سری ماتریسهای ۲×۲ (مربوط به مختصات دوبعدی در جهات تشکیل‌دهنده صفحه میانی) و عضوهای باقیمانده تجزیه می‌شود. بنابراین ماتریس C_{IJ} به ماتریسهای $C_{\alpha\beta}$، $C_{۳\alpha}$ و $C_{۳۳}$ تبدیل می‌شود و به همین ترتیب ماتریس G_{IJ} به ماتریسهای $G_{\alpha\beta}$، $G_{۳\alpha}$ و $G_{۳۳}$. بر طبق تعریف کرنش گرین، همان طوری که در معادله اول آمد، تنسور کرنش به کرنشهای $E_{\alpha\beta}$، $E_{۳\alpha}$ و $E_{۳۳}$ که به ترتیب کرنشهای در مختصات صفحه میانی، کرنشهای جانبی و کرنش در ضخامت هستند تبدیل می‌شود [۱۰، ۱۱].

$$\overset{P}{E}_{\alpha\beta} = \frac{۱}{۲} (C_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})$$

$$E_{۳\alpha} = \frac{۱}{۲} (C_{I\alpha} - G_{\alpha J})$$

$$E_{۳۳} = \frac{۱}{۲} (C_{۳۳} - G_{۳۳})$$

$C_{\alpha\beta}$ و $G_{\alpha\beta}$ باید بر اساس بردارهای پایه مختصات دوبعدی تغییرشکل نیافته مستقر در نقطه P محاسبه شوند، چنانچه این دو ماتریس بر اساس بردارهای پایه همجهت و مستقر در نقطه O نوشته شوند، تنسور دوبعدی انحنا و همین‌طور تنسور دوبعدی انحنای درجه بالا تعریف می‌شوند. بدین‌ترتیب این ماتریسها به صورت ذیل نوشته می‌شوند.

$$C_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta} - ۲ZK'_{\alpha\beta} + Z^۲H'_{\alpha\beta}$$

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - ۲ZK_{\alpha\beta} + Z^{۲}H_{\alpha\beta}$$

ماتریسهای $A'_{\alpha\beta}$ و $A_{\alpha\beta}$ ماتریسهای تغییرشکل و متریک دوبعدی مختصات مستقر در نقطه O هستند. $K'_{\alpha\beta}$ و $K_{\alpha\beta}$ ماتریسهای انحنا به ترتیب در حالتهای تغییرشکل یافته و نیافته جسم در نقطه مورد نظر می‌باشند. همین‌طور هم $H'_{\alpha\beta}$ و $H_{\alpha\beta}$ ماتریسهای انحنای درجه بالا. ماتریسهای $A_{\alpha\beta}$، $K_{\alpha\beta}$ و $H_{\alpha\beta}$ به ترتیب ماتریسهای اساسی[۱] اول، دوم و سوم نیز نامیده شده‌اند. در معادلات فوق فاصله نقطه P از O به Z نمایش داده شده است.

کرنش دوبعدی ($\overset{P}{E}_{\alpha\beta}$) به کرنشهای غشایی $\overset{M}{E}_{\alpha\beta}$، کرنش خمشی $\overset{B}{E}_{\alpha\beta}$ و کرنش خمشی درجه بالا $\overset{HB}{E}_{\alpha\beta}$ تفکیک می‌شود.

$$\overset{P}{E}_{\alpha\beta} = \overset{M}{E}_{\alpha\beta} + Z\overset{B}{E}_{\alpha\beta} + Z^{۲}\overset{HB}{E}_{\alpha\beta}$$

این کرنشها طبق تعریف به شکل زیر نوشته می‌شوند [۱۰].

$$\overset{P}{E}_{\alpha\beta} = \frac{۱}{۲}(A'_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta})$$

$$\overset{B}{E}_{\alpha\beta} = \frac{۱}{۲}(K'_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta})$$

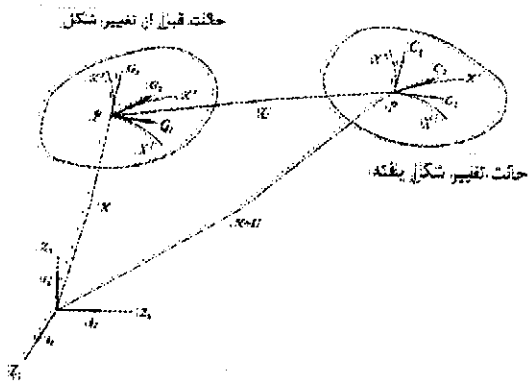
$$\overset{HB}{E}_{\alpha\beta} = \frac{۱}{۲}(H'_{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta})$$

در تجزیه ماتریسهای متریک و تغییرشکل، در واقع مختصات سه‌بعدی در نقطه P در حالت آنالیز سه‌بعدی به یک مختصات دوبعدی که صفحه میانی را می‌سازد و جهت سوم که در جهت بردار اتصال نقطه O به P تجزیه می‌شود. تغییرشکل در راستای مختصات دوبعدی درون صفحه‌ای و از نوع غشایی است، حال آنکه تغییرات بعد سوم نسبت به جهات صفحه میانی تغییر انحنا یا

---

۱. Fundamental

خمش را تولید می‌کند و تغییرات بعد سوم در راستای محور سوم تغییر ضخامت پوسته را شامل می‌شود. تجزیه ماتریس تغییرشکل یا متریک به تنسورهای دوبعدی حل ریاضی مسأله را ساده‌تر نمی‌کند، بلکه بسیار هم پیچیده‌تر می‌شود، لیکن این عمل امکان تفکیک تغییرشکلها به نوعهای تغییرشکل غشایی، خمشی و تغییر در ضخامت پوسته را امکان‌پذیر می‌سازد. این عمل علاوه بر امکان تفکیک تغییرشکلها، معیارهای دیگری از جمله تغییر انحنا را عملی می‌سازد. با توجه به انواع مختلف سازه و در نظرگیری نیروگذاری یا شکل سازه می‌توان روی یک نوع از این تغییرشکلها متمرکز شد و بنابراین، شروع جدایی فرمولاسیونهای پوسته‌ای یا خمشی را از آنالیزهای سه‌بعدی امکان‌پذیر می‌سازد.

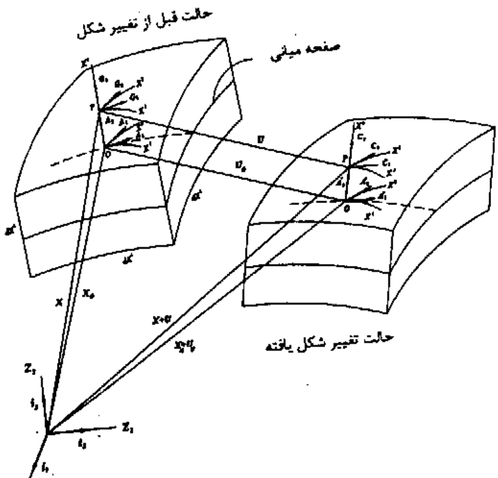


شکل ۵ محاسبه کرنش در نقطه P از یک جسم سه‌بعدی قبل و بعد از تغییرشکل

در پوسته‌های نازک با توجه به ضخامت بسیار کم پوسته، تغییرات در راستای محورهای صفحه مربوط به نقطه P همان تغییرات نقطه O می‌شود و تنشها و ممانی که این تنشها ایجاد می‌کنند، در ضخامت پوسته انتگرال‌گیری و در نقطه O منظور می‌گردند. حاصل این انتگرال تنش و ممان مربوط به آن به نام تنش منتجه و ممان منتجه نامگذاری می‌شود. معادلات تعادل که در حالت آنالیز سه بعدی فقط سه معادله با اعمال تقریبهایی از قبیل فرضیه کیرشوف و صرف‌نظر کردن از یک سری مشتقات درجه بالاتر از آنچه در معادله ذیل آمده است، مشاهده می‌شود که مثلاً کرنش خمشی (E) در نقطه‌ای از یک پوسته بر طبق تعریف به فرم ذیل تدوین می‌گردد [۱۱].

$$\overset{B}{E}_{\alpha\beta} = -(U^{3}{}_{,\alpha} + U^{\lambda}K_{\alpha\lambda})|_{\beta} - (U^{\lambda}|_{\lambda} - K^{\lambda}{}_{\lambda}U^{3})K_{\alpha\beta}$$
$$+ (U_{\mu}|_{\alpha} - U^{3}K_{\mu\alpha}\big[(U^{3}{}_{\lambda}A^{\lambda\mu} - U^{\mu}K^{\lambda}{}_{\lambda})|_{\beta} - (U^{\lambda}{}_{\lambda} - K^{\lambda}{}_{\lambda}U^{3}K^{\lambda}{}_{\beta})\big]$$
$$+ (U^{3}{}_{,\alpha} + U^{\mu}K_{\alpha\mu})\big[U^{\lambda}|_{\lambda} - K^{\lambda}{}_{\lambda}U^{3})_{\beta} - (U^{3}{}_{\lambda}A^{\lambda\gamma}$$
$$- U^{\gamma}K^{\lambda}{}_{\lambda})K_{\beta\gamma}\big] - K^{\mu}{}_{\beta}(U_{\mu}|_{\alpha} - U^{3}K_{\mu\alpha})$$

که تازه این خود بسیار پیچیده و جهت به کارگیری در فرمولبندی برای حل مسأله (مثلاً به روش اجزای محدود) تاکنون اجرا نشده و بلکه با اعمال تقریبها (معمولاً با صرف‌نظرکردن تعداد زیادی از ترمها به سبب قابل اغماض بودن در بسیاری موارد) به جواب مسأله منتج شده است.



شکل ۶ محاسبه کرنش در نقطه P از یک المان پوسته‌ای قبل و بعد از تغییرشکل

از معادله فوق، تنها اولین ترم آن در آنالیز خطی خمشی ورقها مورد استفاده قرار می‌گیرد و بقیه ترمها با فرض کوچک بودن اندازه آنها به فراموشی سپرده می‌شود. یعنی،

$$\overset{B}{E}_{\alpha\beta} = -U^{3}{}_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^{2}\omega}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}$$

ω منتجه جابه‌جایی در جهت عمود بر صفحه است.

معادلات تعادل با استفاده از اصل بقا مومنتم در حالت سه‌بعدی به صورت سه معادله در هر نقطه و بر اساس تغییرات مؤلفه‌های تنشها نوشته می‌شود. حال آنکه در تئوری پوسته‌ها درست است که این مطلب در هر نقطه P صادق است، لیکن در عمل معادلات تعادل در نقطه O نوشته می‌شود بدین‌ترتیب علاوه بر انتگرال‌گیری روی تعادل نیروها در طول ضخامت پوسته، تعادل ممان حاصل از آنها نیز در روی صفحه میانی منظور و محاسبه می‌شود و بنابراین، شش معادله تعادل بر اساس منتج نیرو[۱] و منتج ممان[۲] به‌دست می‌آید. روابط تنش و کرنش در حالت سه بعدی به صورت روابطی بی تنشها و کرنشها (شش رابطه) نوشته می‌شود. در حالی که در مورد اجسام پوسته‌ای این روابط به روابطی میان منتج تنشها و ممانها و کرنشهای غشایی و خمشی تبدیل می‌شود که تعداد بیشتر روابط، پیچیدگی بیشتر آنها را شامل می‌گردد. به‌دست آوردن روابط سازگاری کرنشها[۳]، یکی از پیچیده‌ترین روابطی است که تاکنون هم در حالتی کلی استخراج نشده است، حال آنکه این روابط به صورتی سیستماتیک در آنالیزهای سه‌بعدی استفاده می‌شود. در یک بررسی کلی می‌توان به نتایج ذیل دست یافت.

- تئوری سه‌بعدی دقیقتر است و کاربرد همگانی‌تری در تغییرشکل سازه‌ها دارد.
- تئوری پوسته‌ها در آنالیز اجسام پوسته‌ای شکل (ضخامت کم) یا اجسام بلند (تیرها) که در طول آنها تغییرشکل یکنواخت نباشد، کاربرد دارد.
- معیارهای تغییرشکل در دو دیدگاه با هم متفاوتند. در دیدگاه سه‌بعدی تغییر انحنا تعریف نمی‌شود و کرنش به صورت کلی تعریف می‌شود، حال آنکه در تئوری خمشی کرنش به کرنشهای خمشی، غشایی و خمش درجه بالا تفکیک می‌شود.
- کرنشهای از نوع خمش درجه بالا بسیار کوچک هستند و معمولاً همیشه صرف‌نظر می‌شوند.
- درجات آزادی در نقطه‌ای در صفحه میانی پوسته با توجه به تفکیک کرنشهای غشایی و خمشی و همین‌طور با توجه به جایگذاری تنش توزیع شده در روی مقطع به نیرو و ممان منتج (انتگرال روی تنشها در طول ضخامت پوسته و جایگذاری به وسیله نیروی منتج و ممان منتج) از سه درجه

---

۱. Force Resultant

۲. Momment Resultant

۳. Compatibility Relations

به شش درجه آزادی (۳ حرکت انتقالی و ۳ چرخشی) تبدیل شده است.
- در آنالیزهای اجزای محدود، برای فرمولبندی المانهای پوسته و المانهای توپر از دو تئوری جداگانه تبعیت شده است. بنابراین، ترکیب این المانها بدون تمهیدات صحیح نیست، مگر آنکه المانهای حدفاصل یا المانهای اتصال که بتوان با تقریبات عددی شرایط تعادل و پیوستگی را اعمال نمود، ایجاد شود.
- عدم اعمال تقریب در تئوری خمشی پوسته‌ها غیرممکن است. تئوریهای متفاوت و نیز انواع تقریبها و فرمولبندیهای تقریبی بسیار زیادی در طول یکصدساله اخیر معرفی شده است. بسیاری از این تقریبها معمولاً زیر عنوان اسامی بزرگی، که در مقدمه یادی از آنها شد، معمولاً آورده می‌شود. لزوم درک صحیح از مقادیر تقریبها و به‌کارگیری تئوری در شرایط مقبول ضروری است.

۵. نتیجه گیری

شناخت تمایز دو دیدگاه کلی فرمولبندی تغییرشکل اجسام برای مهندسان طراح در رشته‌های مکانیک و سازه‌ها لازم است. به استادان محترم در سطوح کارشناسی ارشد و دکترا در مکانیک جامدات و سازه‌ها توصیه می‌شود که پیش از شکل فرمولبندی معادلات استاتیکی، دینامیکی و پایداری سازه‌ها، اساس و دیدگاه فرمولبندی را یادآوری کنند. در هر فرمولبندی، علاوه بر تقریبهای موضعی در فرمولها، تقریبهای ریشه‌ای راکه اساس آن بر دیدگاه مکانیک اجسام خمشی استوار می‌شود، نیز به دانشجو یادآور شوند. به مهندسان طراح و محاسب که از نرم‌افزارهای المان محدود استفاده می‌کنند، توصیه می‌شود که پیش از به‌کارگیری یک یا چند نوع المان، به تمایز فرمولاسیون پایه‌ای و تقریبهای ریشه‌ای واقف باشند و باید به بینش عملی مقدار تقریبها در جواب ناشی از فرمولبندی المان مجهز شوند. البته همیشه تقریبهای دیگری در جوابها ناشی از فرمولبندی عددی و نحوه کدنویسی ایجاد می‌شود، لیکن فرمولبندی پایه‌ای المان مورد استفاده را می‌توانند با مراجعه به کتابهای راهنما به‌دست آورند.

مراجع

1. Love, A.E.H., The Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, London, 1934.

2. Koiter, W.T., A Consistant first approximation in the general theory of thin elastic shells, Proc. Symp. Theory of Thin Elastic Shells, pp. 12-33, North-Holland, Amesterdam, 1957.

3. Donnel, L.H., Stability of Thin Walled Tubes Under Torsion, NACA Rep. no. 479, 1934.

4. Reissner, E.A., New Derivation of the Equation for the Deformation of Elastic Shells, Amer. J. Math., 63, pp. 177-184, 1941.

5. Flugge, W., Stresses in Shells, Springer, Berlin, 1960.

6. Naghdi, P.M., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shell of revolution, J. Appl. Math., 15, pp. 41-52, 1957.

7. Novozhilov, V.V., The Theory of Thin Shells, Noordhoff, Gronigen, The Netherlands, 1959.

8. Saunder, J.L., An Improved First Approximation Theory of Thin Shells, NASA-TR-R24, 1959.

9. Vlasov, V.Z., General Theory of Shells and its Application in Engineering, Gosudarstvennoye Izdatel'stvo Techniko-Teoreticheskoy Literatury, Moscow-Leningra, NASA Tech. TT F-99, 1964.

10. Karami, Principles of Linear and Nonlinear Continuum Mechanics, 1999. (to be published)

11. Chung, T.J., Introduction fo Continuum Mechanics, Prentice-Hall, NewYork, 1988.

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۷۸/۷/۷)