فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد سنندج – سال چهارم / شماره ۹ / پاییز ۱۳۸۸

بهینه سازی مسائل چند پاسخی در بردارنده پاسخ‌های کیفی با در نظر گرفتن مکان و پراکندگی پاسخ‌ها

آرش ربانی [۱]
رسول نورالسناء [۲]

چکیده

بسیاری از آزمایشات طراحی شده نیازمند بهینه‌سازی همزمان چند پاسخ می‌باشند. پس از تعیین متغیرهای تأثیرگذار بر متغیر پاسخ و ارائه مدل‌های پیش بینی پاسخ (مدل‌های مختلف رگرسیون)، بحث بهینه‌سازی متغیر پاسخ مطرح می‌گردد، به گونه‌ای که تغییرات در متغیر پاسخ کم و مقدار آن به مقدار اسمی خود نزدیک باشد. در بسیاری از موارد، پاسخ‌های مسأله به‌صورت کیفی می باشند و بایستی در قالب واژگان زبانی تعریف گردند. در این مطالعه سعی شده تا با استفاده از مفاهیم مجموعه‌های فازی، راهکاری برای تعامل پاسخ‌های کمی با پاسخ‌های کیفی با در نظر گرفتن هر دو تأثیر مکان و پراکندگی مشاهدات (پاسخ‌ها) ارائه گردد.

واژه های کلیدی:

مسائل چند پاسخی، تابع مطلوبیت، الگوریتم ممتیک، متغیرهای پاسخ کیفی، مجموعه های فازی

---

[۱]– عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سنندج arashrabbani@yahoo.com
[۲]– استاد دانشکده مهندسی صنایع؛ دانشگاه علم و صنعت ایران rassoul@iust.ac.ir

۱. مقدمه

طراحی آزمایش‌ها (DOE[۳]) مجموعه ای از آزمایش‌هاست که با هدف ایجاد تغییرات هدفمند در متغیرهای ورودی یک فرآیند به منظور بررسی تأثیرات ناشی از آنها بر روی متغیر خروجی(پاسخ) فرآیند، صورت می گیرد. پس از شناسایی اثرات تأثیر گذار معنادار بر متغیر پاسخ و ارائه مدل‌های پیش بینی پاسخ (مدل‌های مختلف رگرسیون) بحث بهینه سازی متغیر پاسخ مطرح می‌گردد به گونه ای که تغییرات در متغیر پاسخ کم و مقدار متغیر پاسخ نزدیک به مقدار اسمی خود باشد. برای این منظور، متدولوژی سطح پاسخ (RSM[۴]) معرفی گردید که شامل مجموعه ای از تکنیک‌های ریاضی و آماری است که به آزمایشگر کمک می کند تا متغیرهای ورودی را به گونه تعیین نماید که پاسخ فرآیند، بهینه گردد. بسیاری از تلاش‌هایی که در متدولوژی سطح پاسخ انجام شده، بر مسائلی تاکید داشته اند که در آنها بهینه نمودن تنها یک پاسخ مدنظر بوده است. و معمولاً RSM هنگامی که بهینه سازی یک پاسخ مورد نظر باشد، خوب عمل می کند. هر چند این متدولوژی حتی زمانی که هدف، بهینه سازی مسأله ای با چندین متغیر پاسخ باشد، کاربرد دارد. در بسیاری از مسائل سطح پاسخ مانند فرآیندهای شیمیایی، مسأله شامل بررسی و بهینه نمودن همزمان چندین متغیر پاسخ می باشد. در این گونه مسائل هدف یافتن سطوحی از متغیرهای ورودی است که به ازای آنها، به طور همزمان تمامی پاسخ ها بهینه گردند. البته راه حل بهینه در اکثر مواقع به علت تعارضات موجود در بین اهداف وجود نخواهد داشت. بعبارت دیگر نمی توان مجموعه ای از متغیرهای ورودی را یافت به نحوی که تمامی پاسخها به ازای آنها بهینه گردند. لیکن در این گونه موارد سعی می شود متغیرهای ورودی به گونه ای تعیین شوند که حداقل پاسخ‌ها در حد قابل قبولی قرار گیرند[۱]. به طور کلی تمامی مسائل چند پاسخی[۵] شامل سه مرحله می‌باشند[۲],[۳].

- جمع آوری داده‌ها (طراحی آزمایش‌ها) شامل: بیان مسأله، انتخاب عوامل و سطوح، انتخاب متغیر پاسخ، انتخاب طرح آزمایش
- ایجاد مدل جهت بیان رابطه بین متغیر های ورودی و متغیرهای پاسخ
- بهینه سازی

علی‌رغم آنکه در مسائل واقعی نیازمند تحلیل بیش از یک متغیر پاسخ هستیم، بسیاری تلاش های صورت گرفته در متدولوژی سطح پاسخ، بر بهینه سازی مسائل تک پاسخی تاکید دارند و به نسبت، تعداد کمتری از بررسی های انجام گرفته، در زمینه حل مسائل آماری چند پاسخه می‌باشند.
بهینه سازی در فرآیند های چند پاسخی بر خلاف فرآیند های تک پاسخی[۶] مشکل است چرا که تنظیم پارامترهای ورودی به گونه ای که تمامی متغیر های پاسخ بهینه گردند، بسیار مشکل و در برخی حالات غیر ممکن است. در این گونه مسائل هدف، یافتن نقطه است که به ازای آن تمامی پاسخ ها تا حد امکان به مقدار بهینه خود نزدیک گردند. به طور کلی تلاشهایی که در زمینه مسائل چند پاسخی انجام گرفته را می توان به سه دسته تقسیم بندی نمود.
در روش اول، ابتدا برای هر کدام از متغیرهای پاسخ، مدل سطح پاسخ مناسبی ساخته می شود. آنگاه منحنی های تراز مربوط به پاسخ های مختلف روی هم قرار می گیرد و آزمایشگر با بررسی نمودار منحنی های تراز، نواحی عملیاتی مطلوب را شناسایی می کند[۲]. لیند و همکاران[۷] (۱۹۶۰) و مونتگمری و می یر[۸] (۲۰۰۲) از این رویکرد در بهینه سازی مسائل استفاده نمودند[۴],[۵]. این روش هنگامی که تعداد متغیرهای فرآیند کم باشد(حداکثر دو) ، بسیار خوب عمل می کند و با افزایش ابعاد مسأله (اکثر مسائل چند پاسخی چنین حالتی دارند) کارایی روش به شدت پایین می آید. از طرفی در این روش پس از شناسایی نواحی محدود به منحنی ترازهای تمام پاسخ ها، به ناحیه ای خواهیم رسید که در آن تمامی پاسخ ها ارضاء می شوند اما جواب بهینه را شناسایی نمی کند[۲].
در رویکرد دوم که هدف آن ساده سازی مسأله است، مهم‌ترین پاسخ شناسایی شده و از دیگر پاسخ ها صرف نظر می شود و یا به عنوان محدودیت های مدل در مسأله آورده می شوند. روش‌هایی که در این دسته قرار می گیرند، عموماً

---

[۳] -Design Of Experiments
[۴] -Response Surface Methodology
[۵] -Multi Response
[۶] -Single Response
[۷] -Lind et al
[۸] -Myers & Montgomery

منجر به راه حل های غیر واقعی می گردند. از طرفی ممکن است کران محدودیت ها به گونه ای تعریف گردد که ناحیه شدنی مسأله از بین برود. در نهایت تعیین اینکه کدام پاسخ می بایست در تابع هدف قرار گیرد نیز خود مشکل بزرگی است[۲]. کارتر و می یر[9] (۱۹۷۳) برای یک مسأله دو پاسخی با تعریف ضریب لاگرانژ برای تابع دوم و مشتق‌گیری از تابع به دست آمده، به بررسی وضعیت نقطه حاصل از لحاظ بیشینه و یا کمینه نمودن تابع اولیه پرداختند[۶]. مونتگمری و دل کاستیلو[10] (۱۹۹۳) برای حل یک مسأله دو پاسخی از روش گرادیان نزولی تعمیم یافته (GRG[11]) استفاده نمودند[۵]. کویلو کویلو[12] (۲۰۰۰) نیز رویکردی که به روش محدودیت- ε معروف است و بر کمینه نمودن یک پاسخ و قرار دادن دیگر اهداف با تعریف سطوح قابل قبول ε_i، به عنوان کران محدویت ها تاکید دارد، ارائه نمود[۷]. روش پیشنهادی بیومونت و هارتمن[13] (۱۹۶۸) و سواین و بیلز[14] (۱۹۸۰) نیز در این دسته قرار می گیرد[۸], [۲] .

در رویکرد سوم، هدف استفاده از روشی برای ترکیب پاسخ‌های مختلف و تبدیل آنها به یک پاسخ تک مقداری و سپس استفاده از یک روش عددی برای بهینه سازی تابع پاسخ ترکیبی می‌باشد.

هارینگتون[15] (۱۹۶۵) نخستین بار برای ادغام پاسخ‌ها، از مفهوم تابع مطلوبیت[16] استفاده نمود[۹]. از آن‌جایی که توابع پیشنهادی هارینگتون انعطاف پذیری کافی را نداشتند، سویچ و درینگر[17] (۱۹۸۰)، شکل دیگری از توابع مطلوبیت را معرفی نمودند که انعطاف پذیری بیشتری نسبت به مدل قبلی داشت[۱۰]. خوری و کونلون[18] (۱۹۸۱)، از توابع رگرسیون چند جمله ای برای بهینه سازی مسائل چند پاسخی استفاده نمودند. در این روش ایشان در مرحله نخست داده ها را جهت بررسی وجود وابستگی خطی بین پاسخ ها چک کرده، و پاسخ هایی را که از یکدیگر مستقلند را انتخاب و با تشکیل تابع فاصله ای که فاصله بردار پاسخ‌های به‌دست آمده از مدل رگرسیونی را از بردار ایده‌آل محاسبه می‌کند، سعی در بهینه سازی همزمان پاسخ‌ها با کمینه نمودن تابع فاصله ای به‌دست آمده دارند.[۱۱]. مونتگمری و دل کاستیلو (۱۹۹۶) تابع مطلوبیت اصلاح شده ای را ارائه نمودند که در تمامی نقاط مشتق پذیر بوده و می‌توان برای بهینه نمودن آن از روش‌های بر پایه گرادیان استفاده نمود[۱۲]. لئون[19] (۱۹۹۶) برای بهینه نمودن همزمان فرآیندهای چند پاسخی، از رویکرد تابع هزینه استفاده نمود[۱۳]. می یر و وینینگ[20] (۱۹۹۰) اولین بار برای مسائل تک پاسخی به بررسی توام میانگین و واریانس پاسخ‌ها، پرداختند[۱۴]. ایشان پس از برازش مدل رگرسیونی برای میانگین و واریانس هر کدام از پاسخ‌ها، هر دو تأثیر مکان و پراکندگی مشاهدات را در فاز بهینه‌سازی مورد توجه قرار دادند. کیم و لین[21] (۲۰۰۴) این رویکرد را برای مسائل چند پاسخی توسعه دادند[۱۵]. چنگ[22] (۲۰۰۴) برای تقریب روابط بین متغیر های ورودی و پاسخ ها، از یک سیستم فازی-عصبی که یک ساختار استنتاج فازی با قابلیت یادگیری شبکه های عصبی را دارا می باشد، استفاده نمود. و با استفاده از روش بیشینه سازی زیمرمن، سعی در حداکثر نمودن حداقل درجه تعلق هر کدام از پاسخ ها دارد. وی در فاز بهینه سازی از یک الگوریتم ترکیبی(ژنتیک و یک جستجوی محلی) برای حل مدل استفاده نموده است که در زمان کوتاه‌تری (نسبت به الگوریتم ژنتیک) به جواب های بهینه یا نزدیک بهینه می‌رسد[۱۶]. پیگناتیلو و همکاران[23] (۲۰۰۴) برای بهینه سازی فرآیندهای چند پاسخی از متدولوژی تابع مطلوبیت و رویکرد الگوریتم ژنتیک(GA[24]) استفاده نمودند. ایشان برای بهبود عملکرد در تعیین تابع مطلوبیت تغییر ایجاد و تابعی ارائه نمودند که سرعت بیشتری در یافتن جواب‌های شدنی دارد. سپس به تنظیم پارامترهای الگوریتم به نحوی که در برابر فاکتورهای پیچیدگی مسأله بهترین عملکرد را داشته باشند پرداختند[۱۷]. نیاکی و پسندیده (۲۰۰۶) نیز برای بهینه

9 -Mayer & Carter
10 -Montgomery & Del Castillo
11 -Generalized Reduced Gradient
12 -Coello Coello
13 -Hartmann & Beaumont
14 -Biles & Swain
15 -Harrington
16 -Desirability Function
17 -Derringer & Suich
18 -Khuri & Conlon
19 -Leon
20 -Myers& Vining
21 -Kim & Lin
22 -Cheng
23 -Pignatiello et al
24 -Genetic Algorithm

سازی فرآیندهای چند پاسخی از متدولوژی تابع مطلوبیت و رویکرد الگوریتم ژنتیک استفاده نمودند و براساس معیار کمترین خطا ایشان چهار روش برای حل مسأله و تعیین بهترین کروموزوم ها برای نسل های بعدی، ارائه دادند[۳].

در بسیاری از موارد، پاسخ‌های مسأله به‌صورت کیفی می باشند و بایستی در قالب واژگان زبانی تعریف گردند. همانطور که *Kim* و *Lin* (۲۰۰۶) نشان داده اند[۱۸] چنانچه پراکندگی پاسخ‌ها به سطوح فاکتورهای‌کنترل وابسته باشد، به کارگیری رویکردهای کلاسیک، ممکن است منجر به جواب‌های نامطلوب گردند. در این مقاله رویکردی برای تعامل پاسخ‌های کیفی با پاسخ‌های کمی مدل با در نظر گرفتن تأثیر مکان و پراکندگی پاسخ‌ها، ارائه می‌گردد. متغیر های پاسخ کیفی ممکن است به دو صورت بروز نمایند.

اول اینکه به دلیل شرایط محیطی و فنی موجود، نتوان اندازگیری دقیقی از متغیرهای پاسخ ارائه نمود و از این جهت تقریبی از مقدار واقعی را ارائه کرد.

دوم نیز به این دلیل که اصولاً متغیر پاسخ مقادیر عددی را نمی پذیرد و یک متغیر زبانی است که با واژه‌های زبانی و مفاهیم کیفی بیان می شود.

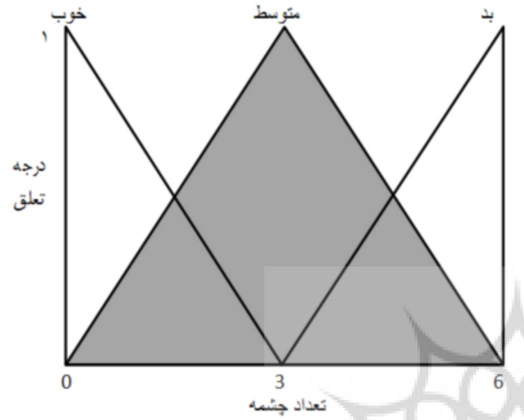
۲- تعیین متغیرهای پاسخ

در انتخاب متغیر پاسخ آزمایشگر بایستی مطمئن باشد که این پاسخ اطلاعات مفیدی را در مورد فرآیند ایجاد می کند. در این مرحله بایستی پاسخ‌ها به دو دسته کمی و کیفی(فازی) تفکیک گردند. به عبارت دیگر باید مشخص گردد که چه پاسخ‌هایی در قالب اعداد قطعی نمی‌گنجند و برای بیان آنها بایستی از واژگان زبانی استفاده کرد. برای تعیین پاسخ‌های کیفی لازم است مراحل زیر انجام شود.

- تعیین مقادیری که یک متغیر فازی در قالب واژگان زبانی می تواند اختیار کند. برای مثال بد، متوسط، زیاد و ... برای بیان کیفیت رنگ از لحاظ داشتن چشمه رنگ.
- تعریف دامنه یا مجموعه مرجع که متغیر زبانی در آن دامنه قابل تعریف است.
- تعریف مجموعه‌های فازی برای واژگان زبانی که در واقع در این مرحله به تعریف توابع عضویت برای هریک از واژگان زبانی پرداخته و آنها را در قالب یک مجموعه فازی نمایش می دهیم. برای مثال کیفیت فرآیند رنگ آمیزی یک قطعه با توجه به تعداد چشمه های مشاهده شده در سطح آن را می توان به صورت شکل ۱ بیان نمود.

لازم است در تمامی این مراحل از نظر فرد خبره بهره جست تا تعاریف دقیق و بدون نقص باشد. در این مقاله از اعداد فازی مثلثی برای تعریف پاسخ‌ها استفاده می کنیم.

شکل ۱- معرفی یک متغیر کیفی در قالب اعداد فازی



۳- اعداد فازی مثلثی *L-R*:

یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\widetilde{M}=(l,m,n)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mu_{\widetilde{M}}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-l)}{m-l} & ; \quad l<x<m\\ \dfrac{(u-x)}{(u-m)} & ; \quad m<x<u\\ 0 & ; \quad otherwise\end{cases} \qquad (۱)$$

که l و u به ترتیب کران پایین و بالای عدد فازی $\widetilde{M}$ می‌باشند.

چنانچه $\widetilde{A},\widetilde{B}$ دو عدد مثلثی باشند بطوریکه $\widetilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\widetilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ روابط زیر برقرار هستند:

$$\widetilde{A}+\widetilde{B}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \qquad (۲)$$

$$\widetilde{A}-\widetilde{B}=(a_1-b_3,a_2-b_2,a_3-b_1)$$

$$k\in R^{+}: k.\widetilde{A}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

$$k\in R^{-}: k.\widetilde{A}=(ka_3,ka_2,ka_3)$$

$$Max(\widetilde{A},\widetilde{B})=(\vee(a_1,b_1),\vee(a_2,b_2),\vee(a_3,b_3))$$

$$Max(\widetilde{A},\widetilde{B})=(\wedge(a_1,b_1),\wedge(a_2,b_2),\wedge(a_3,b_3))$$

برای محاسبه میانگین پاسخ‌های کمی و کیفی (فازی)، میانگین ساده ($\frac{\widetilde{A}_1+\widetilde{A}_2...+\widetilde{A}_n}{n}$) و برای پراکندگی پاسخ

های کیفی، از رابطه $R=\widetilde{Y}_{Max}-\widetilde{Y}_{Min}$، استفاده شده است. برای کنترل پراکندگی پاسخ‌های کمی از واریانس پاسخ‌ها استفاده می شود.

۴- تخمین روابط بین متغیرهای پاسخ کیفی

برای بیان رابطه بین فاکتورهای کنترل و پاسخ‌های کمی (قطعی) از چند جمله‌ای های مرتبه پایین برای این مسأله استفاده می شود و اگر پاسخ به خوبی به وسیله یک تابع خطی از متغیرهای مستقل مدل بندی شده باشد، آنگاه تابع تقریب زننده، مدل مرتبه اول زیر خواهد بود.

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_kx_k+\varepsilon \qquad (۳)$$

در صورتی‌که در سیستم انحنا وجود داشته باشد، آنگاه بایستی از چند جمله ای های مرتبه بالاتر مانند (۴)

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_ix_i+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i}\sum_{j}\beta_{ij}x_ix_j+\varepsilon$$

استفاده کنیم. برای برآورد پارامترها در تقریب کردن چند جمله ای‌ها، از روش کمترین مربعات استفاده می شود. که در این تحقیق نیز به این گونه عمل می شود.

برای تخمین روابط بین فاکتورهای کنترل و پاسخ‌های فازی از رگرسیون استفاده شده است. بطورکلی مدل‌های رگرسیون فازی به دو دسته تقسیم بندی می شوند. اولین دسته بر اساس تئوری امکان و دومین دسته بر اساس رویکرد حداقل مربعات، می باشند. در هر دو روش هدف بهینه سازی تابعی مشخص با تاکید بر بهترین انطباق می باشد. در این مقاله از رویکرد دوم برای تقریب روابط (حداقل مربعات)، استفاده می شود. چرا که بر اساس این روش می توان پارامترهای مدل را مورد آزمون قرار داد تا معنادار بودن آنها مشخص شود. از طرفی بر اساس رویکرد اول با افزایش مجموعه داده‌های مسأله، تعداد محدودیت های مدل برنامه ریزی نیز افزایش پیدا می کند که این خود محاسبات مسأله را مشکل‌تر می‌نماید[۱۹].

فرض کنید $X_i;\ i=1,2,\ldots,k$ فاکتورهای کنترل مسأله و $Y\equiv(c,p,q)$ (c مرکز، p گسترش چپ و q گسترش راست می‌باشد) یکی از پاسخ‌های کیفی مدل باشد. شکل ماتریسی مدل رگرسیون فازی به‌صورت زیر می باشد.

$$\mathbf{c}=\mathbf{c}^*+\varepsilon \quad , \quad \mathbf{c}^*=\mathbf{Xa}$$
$$\mathbf{p}=\mathbf{p}^*+\lambda \quad , \quad \mathbf{p}^*=\mathbf{c}^*b+\mathbf{1}d$$
$$\mathbf{q}=\mathbf{q}^*+\rho \quad , \quad \mathbf{q}^*=\mathbf{c}^*g+\mathbf{1}h$$

(۵)

هدف کمینه نمودن اختلاف مرکز و گسترش‌های راست و چپ داده‌های مشاهده شده از مقادیر تخمین زده شده برای آنها می‌باشد. بنابراین مسأله زیر بایستی حل شود:

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & \Delta(\mathbf{a},b,d,g,h)\\ &=(\mathbf{c}-\mathbf{c}^*)'(\mathbf{c}-\mathbf{c}^*)\pi_c+(\mathbf{p}-\mathbf{p}^*)'(\mathbf{p}-\mathbf{p}^*)\pi_p+\\ &(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)'(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)\pi_q\\ &=(\mathbf{c}'\mathbf{c}-2\mathbf{c}'\mathbf{Xa}+\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{Xa})\pi_c\\ &+(\mathbf{p}'\mathbf{p}-2\mathbf{p}'(\mathbf{Xa}b+\mathbf{1}d)+\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{Xa}b^2+\\ &2\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{1}bd+nd^2)\pi_p\\ &+(\mathbf{q}'\mathbf{q}-2\mathbf{q}'(\mathbf{Xa}g+\mathbf{1}h)+\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{Xa}g^2+\\ &2\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{1}gh+nh^2)\pi_q\end{aligned}$$

(۶)

بر اساس آنچه که گفته شد، معادله رگرسیون فازی به‌صورت معادله ۷ خواهند بود.

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}&=\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_1x_1+\widetilde{A}_2x_2+\ldots+\widetilde{A}_{ij}x_ix_j+\ldots\widetilde{A}_{ii}x_i^2+\ldots\\ &=(a_0\times b+d,a_0,a_0\times g+h)+(a_1\times b,a_1,a_1\times g)x_1+\\ &(a_2\times b,a_2,a_2\times g)x_2+\ldots\end{aligned}$$

(۷)

معادله بالا هم اثرات اصلی و هم اثرات متقابل را شامل می‌شود. از آنجا که مقدار گسترش‌های راست و چپ، با اندازه مرکزها مرتبط می‌باشد، فرض صفر برابری ضریب مرکز یک جمله با صفر، برابری ضرایب گسترش های راست و چپ آن جمله با صفر را نتیجه می‌دهد و می‌توان جمله مذکور را از معادله رگرسیون حذف نمود. از این‌رو پس از شناسایی عوامل مؤثر بر مرکز پاسخ‌ها بر اساس دو کمیت R^2 و R_a^2 تخمین پارامترهای رگرسیون بر اساس فاکتورهای مؤثر شناسایی شده انجام می شود.

۵- تابع مطلوبیت

رویکرد تابع مطلوبیت یکی از پر کاربردترین روش‌هایی است که در صنعت جهت بهینه سازی مسائل چند پاسخی مورد استفاده قرار می گیرد. این روش اولین بار توسط هارینگتون (۱۹۶۵) ارائه گردید. ایده این روش بر ترکیب پاسخ‌ها در قالب یک مسأله تک پاسخی و بهینه نمودن تابع به‌دست آمده استوار است[۹]. به عبارت دیگر کیفیت یک محصول

که دارای مشخصه های کیفیتی متعددی است، کاملاً غیر قابل قبول است اگر یکی از مشخصه ها خارج از محدوده های مطلوب و مورد نظر باشد. این روش به هر مجموعه از پاسخ‌ها امتیازی می دهد و فاکتورهای ورودی را به گونه ای تنظیم می کند که امتیاز کل را بیشینه نماید[۳]. برای تعریف رویکرد تابع مطلوبیت، فرض کنید هر کدام از kمتغیر پاسخ به p متغیر مستقل از طریق رابطه (8) وابسته باشند.

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,k \tag{۸}$$

که y_i، i امین پاسخ و f_i رابطه بین i امین پاسخ و متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_p$ را نشان می دهد. و ε_i جمله خطا با $E(\varepsilon_i) = 0$ و $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ می باشد. تابع مطلوبیت، $d_i(y_i)$، مقداری بین ۰ و ۱ به هر مقدار متغیر پاسخ y_i نسبت می دهد. مقدار $d_i(y_i)$ با افزایش پاسخ مربوطه افزایش می یابد. بسته به این که هدف بیشینه نمودن، کمینه نمودن و یا رسیدن به یک مقدار مشخص باشد، توابع مطلوبیت مختلفی را می توان تعریف نمود. دو نوع تبدیل یک طرفه و دو طرفه برای تبدیل y_i به $d_i(y_i)$ وجود دارد. چنانچه y_i می بایست بیشینه یا کمینه گردد از تبدیل یک طرفه و هنگامی که بخواهیم مقدار y_i به یک مقدار مشخص نزدیک باشد از تبدیل دو طرفه استفاده می شود. سویچ و درینگر (۱۹۸۰) توابع زیر را برای تعیین مطلوبیت های منفرد ارائه نمودند. ایشان، معادله (9) را برای تبدیل یک طرفه و معادله (10) را برای مسأله دو طرفه تعریف نمودند.[۱۰]

$$d_i(y_i) = \begin{cases} 0 & if \quad y_i(x) \le l_i \\ \left(\dfrac{y_i - l_i}{u_i - l_i}\right)^r & if \quad l_i \le y_i(x) \le u_i \\ 1 & if \quad y_i(x) \ge u_i \end{cases} \tag{۹}$$

$$d_i(y_i) = \begin{cases} \left(\dfrac{y_i - l_i}{t_i - l_i}\right)^s & if \quad l_i \le y_i(x) \le t_i \\ \left(\dfrac{y_i - u_i}{t_i - u_i}\right)^t & if \quad t_i \le y_i(x) \le u_i \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{۱۰}$$

به ترتیب حدود پایین و بالا و t_i مقدار هدف پاسخ y_i مـی باشندکه $l_i \le t_i \le u_i$ و ضرایب s,t,r توسـط کـاربر تعیـین می‌شوند و رفتار تابع مطلوبیت را تعیین می‌کنند. برای مسـائل دوطرفه چنانچه $s = t = 1$ باشد آنگاه تابع مطلوبیت به‌صـورت خطی افـزایش مـی یابـد. بـرای $s<1$, $t<1$ تـابع مطلوبیـت محدب و بـرای $s>1$, $t>1$ مقعـر خواهـد بـود. پیگنـاتیلو و همکاران برای بهبود عملکرد الگـوریتم ژنتیـک تـابع زیـر را پیشنهاد نمودند.

$$D^*(x) = D_{DS}(x) - P(x) \tag{۱۱}$$

که D_{DS} تابع مطلوبیت ارائه شده توسط سویچ و درینگر (۱۹۸۰) بوده و P(x) که شدت نشدنی بودن را نشان می دهد، به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$P(x) = [(p_1(\hat{y}_1)p_2(\hat{y}_2)\dots p_m(\hat{y}_m))^{1/m} - c]^2 \tag{۱۲}$$

که هر کدام از جرایم $p_i(\hat{y}_i)$ به‌صورت معادله ۱۳ می باشد.

$$p_i(\hat{y}_i) = \begin{cases} c + \left|\dfrac{\hat{y}_i - L_i}{T_i - L_i}\right|, & -\infty \le \hat{y}_i \le L_i \\ c, & L_i \le \hat{y}_i \le H_i \\ c + \left|\dfrac{\hat{y}_i - H_i}{T_i - H_i}\right|, & H_i \le \hat{y}_i \le +\infty \end{cases} \tag{۱۳}$$

ثابت c مقدار کوچکی است که برای برقراری شرط $p_i(\hat{y}_i) > 0$ مورد استفاده قرار می گیرد. تا این اطمینان حاصل شود که جریمه کلی، P(x)، غیر صفر برای هر جواب نشدنی ارزیابی گردد. بنابراین تابع مطلوبیت کلی پیشنهاد شده توسط پیگناتیلو و همکاران به‌صورت زیر خواهد بود.

$$D^*(x) = [d_1(Y_1(x))d_2(Y_2(x))\dots d_m(Y_m(x))]^{\frac{1}{m}} - [(p_1(\hat{y}_1)p_2(\hat{y}_2)\dots p_m(\hat{y}_m))^{1/m} - c]^2 \tag{۱۴}$$

۵-۱- تعریف توابع مطلوبیت منفرد برای پاسخ‌های کیفی

رتبه بندی و مقایسه اعداد فازی برای تعیین مطلوبیت پاسخ‌های فازی بر اساس یک یا چند ویژگی مختلف از اعداد فازی صورت می گیرد. این ویژگی می تواند مرکز ثقل، ناحیه زیر تابع عضویت و ... پاسخ‌های فازی باشد. باید توجه

داشت که ممکن است نتایج روش‌های مختلف با هم یکسان نباشند. به طور کلی برای مقایسه اعداد فازی جهت تعیین مطلوبیت آنها دو رویکرد را می توان به‌کار گرفت.

۱. روش‌هایی که با استفاده از یک تابع نگاشت F ، اعداد فازی را به اعداد غیر فازی تبدیل می کند. سپس با مقایسه اعداد غیر فازی، اعدا فازی مربوطه مقایسه می شوند.

۲- روش‌هایی که بدون نافازی کردن، از اطلاعات خود اعداد فازی برای مقایسه و رتبه بندی آنها استفاده می کند و نتایج را با واژه‌های زبانی بیان می کنند.
برای تعامل با پاسخ‌های کمی در این مطالعه از رویکرد اول برای تعیین مطلوبیت اعداد به‌دست آمده از رگرسیون فازی برای پاسخ‌های کیفی استفاده می شود. در این مقاله دو رویکرد برای محاسبه مطلوبیت پاسخ‌های کیفی ارائه می گردد که در زیر به آنها اشاره می شود.

۵-۱-۱- نافازی کردن پاسخ‌های کیفی و تعیین توابع مطلوبیت هر کدام از آنها

مراحل زیر جهت به‌کارگیری این رویکرد پیشنهاد می شود:
۱. تعیین مجموعه مطلوب توسط فرد خبره یا مهندس فرآیند و محاسبه مرکز ثقل آن با استفاده از رابطه زیر که $\mu(y_d)$ تابع عضویت مجموعه مطلوب می باشد.

$$\bar{y}_d = \frac{\int y_d \mu(y_d) dy_d}{\int \mu(y_d) dy_d}$$

(۱۵)

۲. تعیین مجموعه (های) نامطلوب توسط فرد خبره یا مهندس فرآیند و نافازی سازی آن با استفاده از رابطه ۱۵ ($\bar{y}_{ud}$)
۳. تعیین تابع مطلوبیت برای هر کدام از پاسخ های کیفی به‌صورت زیر.

$$d_j(\hat{y}_j) = \begin{cases} \left(\dfrac{\bar{y}_j - y_{ud1}}{\bar{y}_d - y_{ud1}}\right)^s & if \;\; \bar{y}_{un1} \le \hat{y}_j \le \bar{y}_d \\ \left(\dfrac{\bar{y}_j - y_{ud2}}{\bar{y}_d - y_{ud2}}\right)^t & if \;\; \bar{y}_d \le \hat{y}_j(x) \le \bar{y}_{un2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

(۱۶)

$\bar{y}_j$، j امین پاسخ کیفی نافازی شده توسط معادله ۱۵ می باشد. میزان جریمه (طرح شده توسط در مدل *Pignatiello* (۲۰۰۴) برای تمامی پاسخ‌های کیفی در رویکرد اول به‌صورت زیر محاسبه می شود:

$$p_j(\bar{y}_j) = \begin{cases} c + \left|\dfrac{\bar{y}_j - \bar{y}_{ud1}}{\bar{y}_d - \bar{y}_{ud1}}\right|, & -\infty \le \bar{y}_j \le \bar{y}_{ud1} \\ c, & \bar{y}_{ud1} \le \bar{y}_j \le \bar{y}_{ud2} \\ c + \left|\dfrac{\bar{y}_j - \bar{y}_{ud2}}{\bar{y}_d - \bar{y}_{ud2}}\right|, & \bar{y}_{ud2} \le \bar{y}_j \le +\infty \end{cases}$$

(۱۷)

۵-۱-۲- تعیین توابع مطلوبیت هر کدام از پاسخ‌های فازی با محاسبه مساحت ناحیه اشتراک مجموعه‌ها

در این رویکرد بدون نافازی نمودن پاسخ ها، مطلوبیت آنها با توجه به مساحت ناحیه اشتراک تابع عضویت عدد مطلوب با پاسخ i ام و مجموع مساحت های توابع عضویت دو عدد اندازگیری می شود. مراحل زیر جهت به‌کارگیری این رویکرد استفاده می شود.

۱. تعیین مجموعه مطلوب.
۲. تعیین مجموعه(های) نامطلوب.
۳. محاسبه مطلوبیت هر پاسخ بر اساس نسبت مساحت ناحیه به وجود آمده از اشتراک تابع عضویت آن پاسخ با عدد فازی مطلوب به کل مساحت تابع عضویت دو عدد.

برای مسائل یک طرفه فرمول ۱۸ و برای مسائل دو طرفه فرمول ۱۹ برای تعیین مطلوبیت پاسخ فازی پیشنهاد می شود. جملات دوم و سوم حالت دومی هرکدام از معادلات زیر، تأثیر مجموعه های نامطلوب را نشان می دهند در صورتیکه تأثیر اعداد نامطلوب مدنظر نباشند، می‌توان جملات مربوط به آنها را حذف نمود.

(۱۸)

$$
d_i(\tilde{y}_i)=\begin{cases}
1 & \text{if}\quad S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})=S(\mu_{\tilde{A}})=S(\mu_{\tilde{B}})\\[2ex]
\left(\dfrac{S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})}{S(\mu_{\tilde{A}})+S(\mu_{\tilde{B}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})}\right)\ldots\times & \\[2ex]
\ldots\times\left(1-\dfrac{S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{C}})}{S(\mu_{\tilde{A}})+S(\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{C}})}\right) & \text{if}\quad S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})\neq S(\mu_{\tilde{A}})\neq S(\mu_{\tilde{B}})\\[2ex]
o & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

(۱۹)

$$
d_i(\tilde{y}_i)=\begin{cases}
1 & \text{if}\quad S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})=S(\mu_{\tilde{A}})=S(\mu_{\tilde{B}})\\[2ex]
\left(\dfrac{S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})}{S(\mu_{\tilde{A}})+S(\mu_{\tilde{B}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})}\right)\ldots\times & \\[2ex]
\ldots\times\left(1-\dfrac{S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{C}})}{S(\mu_{\tilde{A}})+S(\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{C}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{C}})}\right)\ldots\times & \text{if}\quad S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}})\neq S(\mu_{\tilde{A}})\neq S(\mu_{\tilde{B}})\\[2ex]
\ldots\times\left(1-\dfrac{S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{D}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{D}})}{S(\mu_{\tilde{A}})+S(\mu_{\tilde{D}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{D}})-S(\mu_{\tilde{A}}\cap\mu_{\tilde{B}}\cap\mu_{\tilde{D}})}\right)) & \\[2ex]
o & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

$\tilde{B}$ عدد مطلوب، $\tilde{D},\tilde{C}$ اعداد نامطلوب و $\tilde{A}$ عدد فازی مثلثی حاصل از جواب رگرسیون فازی است. در معادلات بالا، جمله اول میزان نزدیکی و شباهت پاسخ حاصله با عدد مطلوب را نشان می دهد. که مقداری بین صفر و یک دارد. هر چه فضای اشتراک بین متغیر پاسخ و عدد مطلوب بیشتر شود، مطلوبیت پاسخ به ازای آن جواب بیشتر می شود.

از طرفی جملات دیگر در روابط بالا عدم شباهت پاسخ به‌دست آمده را با اعداد نامطلوب کنترل می کنند. هر چه میزان اشتراک متغیر پاسخ با عدد یا اعداد نامطلوب بیشتر شود، مطلوبیت آن پاسخ کاهش می‌یابد. به این ترتیب پاسخی مطلوبیت بیشتری خواهد داشت که میزان اشتراک آن با عدد مطلوب (هدف) بیشتر و اشتراک آن با عدد (اعداد) نامطلوب کمتر باشد. از آنجایی که اعداد مطلوب و نامطلوب در تعدادی نقاط اشتراکاتی نیز دارند لذا نواحی مشترک آنها را در محاسبه مطلوبیت‌های منفرد در نظر نگرفته ایم. میزان جریمه (طرح شده در مدل *Pignatiello* (۲۰۰۴) برای تمامی پاسخ‌های کیفی در رویکرد دوم به‌صورت معادله ۲۰ پیشنهاد می‌شود:

در معادله ۲۰ Q_{dj},P_{dj} به ترتیب نقاط سمت راست، مرکز و چپ عدد فازی مثلثی مطلوب و Q_j,P_j به ترتیب نقاط راست و چپ عدد مثلثی به‌دست آمده از معادله رگرسیونی می باشند. در پایان با توجه به توانایی بالای الگوریتم ممتیک پیشنهادی در یافتن جواب‌های بهینه و یا بسیار

نزدیک به بهینه در چارچوب تابع مطلوبیت، از این الگوریتم در فاز بهینه سازی تابع مطلوبیت کلی استفاده می شود.

(۲۰)

$$p_j(\bar{y}_j)=\begin{cases} c+\left|\dfrac{P_j-Q_{dj}}{P_{dj}-Q_{dj}}\right|, & P_j \geq Q_{dj} \\ c+\left|\dfrac{Q_j-P_{dj}}{P_{dj}-Q_{dj}}\right|, & Q_j \leq P_{dj} \\ c, & otherwise \end{cases}$$

۶- بهینه سازی : الگوریتم ترکیبی ژنتیک (ممتیک) برای حل مسائل چند پاسخی

پیگناتیلو و همکاران چهار عامل تعداد فاکتورهای کنترل، تعداد پاسخ‌ها، بازه محدودیت‌ها و درصد غیر خطی بودن پاسخ‌های مدل زیر را در میزان پیچیدگی مسائل چند پاسخی دخیل دانسته‌اند.[۱۷]

علاوه بر موارد ذکر شده در مقاله مذکور، میزان تناقض بین پاسخ‌ها نیز بر پیچیدگی‌های مسأله تأثیرگذار می باشد. در رویکرد تابع مطلوبیت چنانچه سطح پاسخ مربوط به تابع مطلوبیت کلی، خوش رفتار باشد، روش‌های معمول در بهینه سازی مسائل غیر خطی را می توان در فاز بهینه سازی به‌کار گرفت. با بزرگ شدن ابعاد مسأله، سطح پاسخ تابع مطلوبیت کلی به شدت غیر خطی می گردد[۱۷] و از این‌رو رویکردهای معمول و حتی فرا ابتکاری در یافتن جواب‌های بهینه یا نزدیک بهینه در زمان قابل قبول عاجز خواهند بود. ترکیب قابلیت های الگوریتم‌های جستجو می تواند عملکرد آنها را به طرز چشمگیری بهبود دهد. از این‌رو در فاز بهینه سازی رویکردی ترکیبی برای حل و بهینه سازی مسائل چند پاسخی در چارچوب تابع مطلوبیت ارائه می‌گردد، به طوری‌که برای حل مسائل با سطح پیچیدگی های متفاوت، عملکرد بالایی داشته باشد.

استفاده از جستجوگرهای محلی در داخل الگوریتم ژنتیک منجر به ایجاد الگوریتم هایی با نام الگوریتم‌های ممتیک[۲۵] (الگوریتم‌های ترکیبی ژنتیک) خواهند شد. مسائل زیادی با این روش در ادبیات حل شده و نشان داده شده که الگوریتم‌های ممتیک در پیدا کردن جواب بهینه سریع‌تر بوده و در به‌دست آوردن جواب بسیاری از مسایل بهینه‌سازی دقیق‌تر می‌باشند[۲۰] و [۲۱]. از آن‌جایی‌که اغلب مواقع، میزان عملکرد الگوریتم‌های مختلف براساس زمان اجرای آنها سنجیده می‌شود. در انجام و اعمال جستجوی محلی در داخل الگوریتم ژنتیک بایستی این مسأله لحاظ گردد. در این روش جستجوگر محلی هوک و جیو برای یافتن جواب‌های اولیه مناسب (بهینه های محلی) برای تشکیل جمعیت اولیه الگوریتم ژنتیک، مورد استفاده قرار می گیرد. در ادامه به کمک الگوریتم ژنتیک، فرآیند بهینه سازی ادامه می یابد. در هر نسل نیز، جهت صرفه جویی در زمان اجرای الگوریتم، بر روی درصدی از بهترین فرزند تولید شده، الگوریتم هوک و جیو اجرا می گردد. فرآیند بهینه سازی توسط الگوریتم ژنتیک تا رسیدن به معیار توقف ادامه می یابد. (برای مطالعه بیشتر به [۲۲] مراجعه شود.)

۷- مثال عددی

تزریق فوم یکی از فرآیندهایی است که در تولید یخچال به منظور عایق نمودن بدنه یخچال برای جلوگیری از اتلاف برودت تولید شده، انجام می‌شود. این فرآیند یکی از حساس ترین مراحل تولید یخچال به شمار می آید و کیفیت نهایی محصول به کیفیت این مرحله بسیار وابسته می باشد. در این فرآیند ابتدا بدنه تولید شده تحت دمای مشخصی برای مرحله اصلی تزریق حرارت داده می‌شوند. سپس بدنه روی فیکسچری که قالب‌های خاص آن بدنه روی آن بسته شده قرار می‌گیرد. پس از تنظیم مکان بدنه، فیکسچر مربوطه پایین آمده تا قالب کاملاً روی بدنه قرار گیرد، در این مرحله مواد ایزو–پولیول (موادی که برای عایق بندی بدنه از آنها استفاده می شود) با نسبتی مشخص از طریق ابزار خاصی که هد یا کلگی خوانده می‌شود با فشار معین و مقدار مشخص به داخل بدنه تزریق می‌گردد. بدنه پس از تزریق بایستی مدت زمانی خاصی (زمان پخت) در این وضعیت باقی بماند تا فوم کاملاً پف کرده و فضای داخلی بدنه را پر نماید. پس از سپری شدن زمان پخت، فیکسچر، قالب را بالا آورده و بدنه برای ادامه فرآیند تولید آماده می گردد.

۷-۱- جمع آوری داده‌ها (طراحی آزمایش‌ها)

۷-۱-۱- شناسایی متغیرهای پاسخ

به کمک مهندس فرآیند، متغیرهای پاسخ در این فرآیند شناسایی شده که به شرح زیر می باشد.

[25] -Memretic Algorithms

جدول۳- متغیرهای پاسخ مسأله

نام متغیر	شرح	نوع پاسخ	واحد
y_1	خاصیت انبساطی و انقباضی فوم[۲۶]	کمی	cm
y_2	انتقال حرارتی فوم	کمی	$Watt/cm.k$
y_3	کیفیت فوم از نظر یکنواختی سلول بندی، رگه‌ها و ناهمواری‌های آن	کیفی	----
y_4	حجم فوم در داخل بدنه	کیفی	Cm^3

پاسخ های اول و دوم کمی و پاسخ‌های سوم و چهارم کیفی می باشند. با نظر مهندس فرآیند پاسخ سوم با سه واژه زبانی خوب، متوسط و بد و پاسخ چهارم با سه واژه زبانی کم، متوسط و زیاد تعریف شده‌اند. تابع تعلق واژگان زبانی متغیرهای فازی Y_3 و Y_4 در قالب اعداد مثلثی و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد. (۲۱)

$$\mu_{bad}(Y_3) = (10,20,20)$$
$$\mu_{medium}(Y_3) = (0,10,20)$$
$$\mu_{good}(Y_3) = (0,0,10)$$
$$\mu_{low}(Y_4) = (260,260,270)$$
$$\mu_{adequate}(Y_4) = (260,270,280)$$
$$\mu_{high}(Y_4) = (270,280,280)$$

۷-۲-۲- تعیین فاکتورهای کنترل و سطوح هر کدام از آنها

مطابق با نظر مهندس فرآیند متغیرهای مستقل زیر به عنوان فاکتورهای کنترل شناسایی شده‌اند. فاکتورهای کنترل، مشخصات آنها و سطوح بالا و پایین هر یک از آنها در آزمایش طراحی شده در جدول زیر آمده است.

جدول ۴- فاکتورهای کنترل و سطوح آنها

نام فاکتور	شرح	سطح پایین (۱-)	سطح بالا (۱+)	واحد
x_1	دمای فیکسچرو قالب	۳۵	۴۵	سانتی گراد
x_2	فشار سر هد (فشار تزریق مواد ایزو- پولیول)	۱۴۵	۱۶۵	دقیقه
x_3	نسبت I/P (نسبت ترکیب ایزو- پولیول)	۱	۱.۵	بار (Bar)
x_4	مدت زمان پخت	۹	۱۳	------
x_5	دمای مواد ایزو- پولیول	۱۸	۲۴	سانتی گراد

۷-۲-۴- انتخاب طرح آزمایش و ثبت داده‌ها

برای بررسی مسأله از یک طرح *Central Composite* با ۶ نقطه مرکزی استفاده شده است. در هر اجرا برای تعیین پاسخ‌های کمی از دستگاه‌های اندازه‌گیری مربوطه و برای پاسخ‌های کیفی (فازی) از نظر فرد خبره استفاده می کنیم. نتایج اجراها و سطوح فاکتورهای مربوط به هر اجرا در جدول ۵ نشان داده شده است.

---

[۲۶]- پس از تزریق چنانچه فاکتورهای مرتبط به درستی تنظیم نشده باشند پس از اتمام زمان پخت فوم، فعل و انفعال فوم ادامه داشته که سبب انبساط یا انقباض فوم در داخل بدنه می شود. و این موجب ترک بدنه می گردد.

جدول ۵- نتایج انجام آزمایشات

		فاکتورهای کنترل					پاسخ ها							
							y_1		y_2		y_3		y_4	
							تکرار							
شماره آزمایش		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	2	1	2	1	2	1	2
18	45	-1	-1	-1	-1	1	-1.18	8.20	0.23	1.43	B	B	H	H
54	55	1	-1	-1	-1	-1	-3.99	-6.59	0.06	0.08	M	M	H	H
8	11	-1	1	-1	-1	-1	0.96	-7.94	0.02	0.04	M	M	L	A
14	41	1	1	-1	-1	1	3.99	14.63	0.54	1.04	G	B	H	H
19	20	-1	-1	1	-1	-1	1.85	-4.71	0.01	0.02	B	B	A	A
37	49	1	-1	1	-1	1	4.58	4.16	0.3	0.5	G	G	A	A
1	13	-1	1	1	-1	1	2.05	4.69	0.01	0.19	G	B	A	A
24	61	1	1	1	-1	-1	-0.93	-9.93	0.24	0.14	M	B	H	H
35	51	-1	-1	-1	1	-1	3.63	-16.77	0.02	0.03	G	G	H	H
4	6	1	-1	-1	1	1	-3.61	-7.13	0.01	0.01	G	B	H	H
36	47	-1	1	-1	1	1	-2.55	-24.59	0.01	0.05	B	G	L	H
56	58	1	1	-1	1	-1	-4.55	3.01	0.67	1.07	G	M	H	H
9	38	-1	-1	1	1	1	-4.68	3.66	0.02	0.36	B	B	A	A
29	57	1	-1	1	1	-1	-3.36	27.94	0.10	0.15	B	M	L	H
2	27	-1	1	1	1	-1	-2.80	6.60	0.13	0.53	B	B	A	H
25	42	1	1	1	1	1	-4.83	9.81	0.01	0.29	B	G	H	H
43	48	-2	0	0	0	0	-2.15	1.55	0.02	0.12	M	B	H	H
32	46	2	0	0	0	0	-1.57	8.97	0.51	0.75	B	G	H	H
10	26	0	-2	0	0	0	7.74	-9.14	0.03	0.02	B	B	H	A
17	53	0	2	0	0	0	-1.43	9.63	0.02	0.01	M	M	A	H
5	16	0	0	-2	0	0	-1.28	-16.24	0.22	0.48	M	B	H	H
28	31	0	0	2	0	0	-1.44	-10.24	0.02	0.01	B	M	H	A
39	59	0	0	0	-2	0	4.10	9.46	0.15	0.03	B	B	H	A
21	30	0	0	0	2	0	-0.34	9.58	0.28	0.01	G	B	H	A
23	33	0	0	0	0	-2	-0.74	4.14	0.26	0.16	M	G	A	L
12	62	0	0	0	0	2	-1.96	1.20	0.18	0.84	G	B	A	L
3	22	0	0	0	0	0	4.76		0.59		G		H	
34	40	0	0	0	0	0	3.07		0.18		G		A	
15	63	0	0	0	0	0	4.91		0.01		G		H	
44	52	0	0	0	0	0	-2.44		0.15		G		H	
7	53	0	0	0	0	0	4.52		0.07		B		H	
60	64	0	0	0	0	0	-4.47		0.03		G		A	

میانگین، واریانس (برای پاسخ‌های کمی) و دامنه (برای پاسخ‌های فازی) در هر تکرار در جدول زیر نشان داده شده است. P, C, Q به ترتیب نقاط چپ، مرکز و راست اعداد مثلثی می باشند.

جدول ۶- میانگین و پراکندگی پاسخ‌ها در هر تکرار

y_1		y_2		y_3						y_4					
Mean	*Var*	*Mean*	*Var*	*Mean*			*R*			*Mean*			*R*		
				P	*C*	*Q*	*P*	*C*	*Q*	*P*	*C*	*Q*	*P*	*C*	*Q*
3.51	6.63	0.83	0.85	10	20	20	-10	0	10	270	280	280	-10	0	10
-5.29	1.83	0.07	0.01	0	10	20	-20	0	20	270	280	280	-10	0	10
-3.49	6.30	0.03	0.02	0	10	20	-20	0	20	260	265	275	-10	10	20
9.31	7.52	0.79	0.35	5	10	15	0	20	20	270	280	280	-10	0	10
-1.43	4.63	0.01	0.00	10	20	20	-10	0	10	260	270	280	-20	0	20
4.37	0.30	0.4	0.14	0	0	10	-10	0	10	260	270	280	-20	0	20
3.37	1.87	0.10	0.13	0	10	20	-20	0	20	260	270	280	-20	0	20
-5.43	6.37	0.19	0.08	5	15	20	-10	10	20	270	280	280	-10	0	10
-6.57	14.43	0.02	0.01	0	0	10	-10	0	10	270	280	280	-10	0	10
-5.37	2.48	0.01	0.00	5	10	15	0	20	20	270	280	280	-10	0	10
-13.57	15.59	0.03	0.02	5	10	15	0	20	20	265	270	275	0	20	20
-0.77	5.34	0.87	0.28	0	5	15	-10	10	20	270	280	280	-10	0	10
-0.51	5.89	0.19	0.24	10	20	20	-10	0	10	260	270	280	-20	0	20
12.29	22.13	0.12	0.03	5	15	20	-10	10	20	265	270	275	0	20	20
1.90	6.65	0.33	0.28	10	20	20	-10	0	10	265	275	280	-10	10	20
2.49	10.35	0.15	0.20	5	10	15	0	20	20	270	280	280	-10	0	10
-0.30	2.62	0.07	0.07	5	15	20	-10	10	20	270	280	280	-10	0	10
3.70	7.45	0.63	0.18	5	15	20	-10	10	20	270	280	280	-10	0	10
-0.70	11.93	0.03	0.01	10	20	20	-10	0	10	265	275	280	-10	10	20
4.10	7.82	0.02	0.01	0	10	20	-20	0	20	265	275	280	-10	10	20
-8.76	10.58	0.35	0.18	5	15	20	-10	10	20	270	280	280	-10	0	10
-5.84	6.22	0.02	0.01	5	15	20	-10	10	20	265	275	280	-10	10	20
6.78	3.79	0.09	0.08	10	20	20	-10	0	10	265	275	280	-10	10	20
4.62	7.01	0.14	0.19	5	15	20	-10	10	20	265	275	280	-10	10	20
1.70	3.45	0.21	0.06	0	5	15	-10	10	20	260	265	275	-10	10	20
-0.38	2.24	0.51	0.46	5	10	15	0	20	20	260	265	275	-10	10	20
1.73	4.11	0.17	0.21	8.3	16.7	18.3	0	20	20	266.7	276.7	280	-10	10	20

۷-۳- تقریب روابط و تشکیل سطوح پاسخ

۷-۳-۱- پاسخ‌های کمی

همانطور که پیشتر گفته شد از مدل رگرسیونی بر اساس کمترین مربعات خطا در ساختن یک مدل کمی که عوامل مهم را به پاسخ‌ها مربوط می‌سازد استفاده می شود. همچنین فاکتورهای کنترل به‌صورت کد شده در بازه [*-1,1*] برای تشکیل تمامی

معادلات سطوح پاسخ (کمی-کیفی) استفاده شده‌اند. داوری و تعیین مدل رگرسیونی مناسب برای پاسخ‌های کمی با استفاده از کمیت‌های R^2 و R_a^2 انجام می گیرد.

جدول ۷- سطوح پاسخ برای میانگین و انحراف معیار پاسخ‌های کمی

	سطوح پاسخ برای میانگین و انحراف معیار پاسخ‌های یک و دو	R^2	R_a^2
پاسخ اول	$y_{1\mu}=1.13+1.52x_1+1.88x_3-0.806x_4+1.65x_1x_4-1.10x_2x_3$ $-.774x_2x_4+2.85x_3x_4-3.75x_4x_5-2.23x_3^2+1.02x_4^2$	٪92.5	٪۸۷
	$y_{1\sigma}=4.66+2.24x_4-0.811x_5+2.87x_1x_3-0.812x_1x_5-1.07x_2x_3$ $-0.979x_2x_4+2.4x_2x_5+1.02x_3x_4-1.61x_3x_5+1.43x_2^2+1.06x_3^2$	٪87.0	٪77.4
پاسخ دوم	$y_{2\mu}=0.163+0.094x_1+0.03x_2-0.079x_3+0.057x_5+0.128x_1x_2$ $-0.032x_1x_3-0.035x_1x_5-0.052x_2x_3+0.083x_2x_4$ $-0.103x_2x_5+0.060x_3x_4-0.0358x_3x_5-0.168x_4x_5$ $+0.053x_1^2-0.029x_2^2+0.055x_5^2$	٪95.9	٪89.3
	$y_{2\sigma}=0.142-0.038x_3+0.079x_5+0.094x_1x_2$ $+0.0156x_1x_4-0.032x_1x_5+0.022x_2x_3+0.066x_2x_4$ $-0.079x_2x_5+0.091x_3x_4-0.044x_3x_5$ $-0.086x_4x_5-0.028x_2^2+0.034x_5^2$	٪94.7	٪89.3

۷-۳-۲- پاسخ‌های فازی

پاسخ‌های سوم و چهارم به‌صورت فازی می‌باشند. برای تشکیل معادلات رگرسیونی برای میانگین و پراکندگی هر کدام از پاسخ‌ها، از معادله ۶ و داده های جدول ۶ استفاده می شود.

از آنجا که مقدار گسترش‌های راست و چپ، با اندازه مرکزها مرتبط می‌باشد، فرض صفر برابری ضریب مرکز یک جمله با صفر، برابری ضرایب گسترش های راست و چپ آن جمله با صفر را نتیجه می دهد و می‌توان جمله مذکور را از معادله رگرسیون حذف نمود. پس از شناسایی عوامل مؤثر بر مرکز پاسخ‌ها بر اساس دو کمیت R^2 و R_a^2 تخمین پارامترهای رگرسیون بر اساس فاکتورهای مؤثر شناسایی شده انجام می‌شود. پارامترهای به‌دست آمده و مقدار SSE برای میانگین و پراکندگی هر کدام از پاسخ‌های فازی در جداول ۸، ۹،۱۰ و۱۱ آورده شده است.

جدول ۸- پارامترها و ضرایب عوامل مؤثر بر میانگین پاسخ سوم

عوامل مؤثر	constant	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_5	x_2x_4	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_4x_5	x_5^2
a	۱۳.۸۲	-۱۰.۴۹	-۱.۴۷	۱۰.۴۹	۱.۵۷	-.۹۴۲	-.۹۳۳	.۹۴۲	-۱.۵۶	۳.۴۴	-۴۰.۸	۲۰.۱۸۷	-۲۰.۲۳

$b=$ ۰.۰۴۸۴۹	$d=$ ۱.۵۸	$g=$ -۰.۰۵۰۵	$h=$ ۱۱.۴۲

$SSE=$۳۸۴

جدول ۹- پارامترها و ضرایب عوامل مؤثر بر دامنه پاسخ سوم

عوامل مؤثر	constant	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_5	x_3x_5	x_4x_5	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2
a	۸.۶۹	۲.۸۳	۱.۹۶	-۱.۱۸	۲.۹۰	۳.۰۶	۱.۸۸	-۳.۱۸	۱.۷۷	-۱.۵۹	-۴.۱۰	-۱.۵۹	-۲.۷۶

$b=$ ۰.۴۳	$d=$ ۱۳.۲۸	$g=$ -۰.۵۷	$h=$ ۱۳.۳۵

$SSE=$ ۵۷۲

جدول ۱۰- پارامترها و ضرایب عوامل مؤثر بر میانگین پاسخ چهارم

عوامل مؤثر	constant	x_1	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_5	x_4x_5	x_1^2	x_3^2	x_5^2
a	۲۷۳۰۹۲	۱۰۸۶	-۱۰۹۹	۲۰۶	-۰۰۴۲	-۰۰۶۲	۳۰۳۲	۰۰۶۲	-۰۰۸۲	-۰۰۶۲	۱۰۵۲	۰۰۷۹	-۲۰۴۳

$b=$ ۰۰۱۵۵	$d=$ -۳۳۰۵۴	$g=$ -۰۰۵۹	$h=$ ۱۶۷۰۱۲

$SSE=$ ۱۹۱

جدول ۱۱- پارامترها و ضرایب عوامل مؤثر بر دامنه پاسخ چهارم

عوامل مؤثر	constant	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_5	x_2x_3	x_2x_5	x_3x_4	x_3x_5	x_1^2	x_3^2
a	۸۰۹۷	-۰۰۸۹	۱۰۶۲	-۰۰۸۱	-۳۰۷۶	۲۰۴۳	-۱۰۲۱	-۲۰۵۵	۱۰۲۱	۱۰۲۱	-۲۰۴۳	-۲۰۷۶	-۱۰۴۸

$b=$ ۰۰۵۴	$d=$ ۱۳۰۱۲	$g=$ -۰۰۴۷	$h=$ ۱۳۰۲۰

$SSE=$ ۴۴۳

۷-۴- تشکیل توابع مطلوبیت و بهینه سازی

در جدول۱۲ مقدار مطلوبیت های موجود برای هر یک از ۴ متغیر پاسخ، شامل حدود بالا، پایین و مقدار هدف نشان داده شده است.

جدول ۱۲- مقدار مطلوبیت های موجود برای هر یک از ۴ متغیر پاسخ

<table>
<tr><th colspan="2">پاسخ</th><th>هدف</th><th colspan="3">Y_{min}</th><th colspan="3">Y_T</th><th colspan="3">Y_{max}</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_1</td><td>mean</td><td>target</td><td colspan="3">5-</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">5</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_2</td><td>mean</td><td>minimizing</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0.05</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0.02</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_3</td><td>mean</td><td>maximizing</td><td>0</td><td>5</td><td>15</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>20-</td><td>0</td><td>20</td><td>20-</td><td>0</td><td>20</td><td>10-</td><td>10</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_4</td><td>mean</td><td>target</td><td>230</td><td>240</td><td>260</td><td>240</td><td>250</td><td>260</td><td>240</td><td>260</td><td>270</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>40-</td><td>0</td><td>40</td><td>-40</td><td>0</td><td>40</td><td>-20</td><td>20</td><td>40</td></tr>
</table>

در جدول ۱۳ نتایج نافازی سازی مقادیر مطلوبیت پاسخ های کیفی آمده است.

جدول ۱۳- نتایج نافازی سازی مقادیر مطلوبیت پاسخ های کیفی

<table>
<tr><th colspan="2">پاسخ</th><th>هدف</th><th>Y_{min}</th><th>Y_T</th><th>Y_{max}</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_1</td><td>mean</td><td>target</td><td>5-</td><td>0</td><td>5</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_2</td><td>mean</td><td>minimizing</td><td>0</td><td>0</td><td>0.05</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>0</td><td>0</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_3</td><td>mean</td><td>maximizing</td><td>۶۶۷</td><td>۰</td><td>۰</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۶۶۷</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Y_4</td><td>mean</td><td>target</td><td>۲۴۳.۳</td><td>۲۵۰</td><td>۲۵۶۶۷</td></tr>
<tr><td>dispersion</td><td>minimizing</td><td>۰</td><td>۰</td><td>۱۳.۳</td></tr>
</table>

فرآیند بهینه سازی به کمک الگوریتم ممتیک پیشنهادی انجام شده و نتایج حل مدل بر اساس هر دو رویکرد معرفی شده در جداول ۱۴ و ۱۵ خلاصه شده است.

جدول ۱۴– نتایج تئوری و عملی بهینه سازی بر اساس رویکرد اول

فاکتورهای کنترل	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$															
مقدار بهینه فاکتورهای کنترل (رویکرد اول)	(-۰.۶۹, ۰.۸۲, ۰.۹۵, -۰.۸۹, ۰.۹۳)															
پاسخ‌ها	$y_{1\mu}$	$y_{1\sigma}$	$y_{2\mu}$	$y_{2\sigma}$	$y_{3\mu}$			y_{3R}			$y_{4\mu}$			y_{4R}		
مقدار پاسخ‌های بهینه بدست آمده از مدل	۳.۲۹	۱.۶۴	۰	۰.۰۲۲	-۰.۵	۱.۹	۱۲.۴	-۱۲.۲	۱.۳	۱۴.۲	۲۶۲	۲۷۰.۳	۲۷۷.۸	-۱۶.۱	۰	۱۶.۳
مقدار پاسخ بدست آمده بهینه در آزمایشات عملی	۳.۱۷	۱.۸۶	۰	۰.۰۲۸	۰	۰	۱۰	-۱۰	۰	۱۰	۲۶۰	۲۷۰	۲۸۰	-۲۰	۰	۲۰

جدول ۱۵– نتایج تئوری و عملی بهینه سازی بر اساس رویکرد دوم

فاکتورهای کنترل	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$															
مقدار بهینه فاکتورهای کنترل (رویکرد دوم)	(-۰.۴۹, ۰.۹۰, ۰.۹۷, -۰.۸۹, ۱.۰۰)															
پاسخ‌ها	$y_{1\mu}$	$y_{1\sigma}$	$y_{2\mu}$	$y_{2\sigma}$	$y_{3\mu}$			y_{3R}			$y_{4\mu}$			y_{4R}		
مقدار پاسخ‌های بهینه بدست آمده از مدل	۳.۴۰	۲.۳۸	۰	۰.۰۱۷	۰	۰.۴۳	۱۱.۶	-۱۱.۸	۱.۱	۱۲.۲	۲۶۱.۴	۲۷۰	۲۷۹	-۱۸.۲	۰	۱۷.۵
مقدار پاسخ بدست آمده بهینه در آزمایشات عملی	۳.۳۳	۱.۷۲	۰.۰۱	۰.۰۱۹	۰	۰	۱۰	-۱۰	۰	۱۰	۲۶۰	۲۷۰	۲۸۰	-۲۰	۰	۲۰

۸- نتیجه گیری و اعتبار سنجی مدل

در این مقاله از یک الگوریتم ترکیبی در حل مسائل چند پاسخی استفاده گردید. این الگوریتم، یک الگوریتم ممتیک می باشد که ترکیبی از یک الگوریتم جستجوی محلی و الگوریتم ژنتیک است. الگوریتم جستجوی محلی استفاده شده روش هوک و جیو با استفاده از حرکات گسسته می باشد که بهینه محلی مسائل را در حالت پیوسته به‌دست می‌آورد.

در این مقاله رویکردی برای تعامل پاسخ های کیفی با پاسخ‌های کمی در بهینه سازی مسائل چند پاسخی ارائه گردید. برای بررسی روش پیشنهادی برای پاسخ‌های فازی با در نظر گرفتن تأثیر مکان و پراکندگی آنها، داده های از فرآیند تزریق فوم در تولید یخچال‌های خانگی، جمع‌آوری گردید پس از تشکیل سطوح پاسخ برای پاسخ‌های کمی و کیفی، دو رویکرد برای محاسبه مطلوبیت پاسخ‌های کیفی پیشنهاد گردید که جواب‌های بهینه با استفاده از الگوریتم ممتیک پیشنهادی و در چارچوب تابع مطلوبیت برای هر دو رویکرد به‌دست آمد. نتایج به‌دست آمده از آزمایشات عملی، عملکرد روش پیشنهادی را تائید می کند. همان‌طور که انتظار هم می رفت، جواب‌های به‌دست آمده از رویکرد دوم به مقادیر واقعی (به‌دست آمده از آزمایشات واقعی) نزدیک‌تر است. اما نتایج هر دو رویکرد در بازه قابل قبول می باشد.

منابع :

[1]اصغرپور, م.ج., تصمیم گیری‌های چندمعیاره. ۱۳۸۱.

[2] Montgomery, D.C., Design and Analysis of Experiments. 5 ed. 1997, New York: John Wiley & Sons.

[3] Pasandideh S. H. R and A.N.S. T, Multi-response simulation optimization using genetic algorithm within desirability function framework. Applied Mathematics and Computation, 2006. **175**: p. 366-382.

[4] Lind, E., J. Goldin, and J. Hichman, Fitting yield and cost response surface. Chemical Engineering Progress, 1960. **56**: p. 62-68.

[5] Del Castillo, E. and D.C. Montgomery, A Nonlinear Programming Solution to the Dual Response Problem. Journal of Quality Technology, 1993. **25**: p. 199-204.

[6] Myers, R.H. and W.H. Carter, Response surface techniques for dual response systems. Technometrics, 1973. **15**: p. 301-317.

[7] C.A.Coello Coello, An updated survey of GA-based multi-objective optimization techniques. ACM Computing Surveys, 2000. **32**: p. 109.143.

[8] N.E. Hartmann and R.A. Beaumont, Optimum compounding computer. Journal of the Institute of the Rubber Industry, 1968. **2**: p. 272–275.

[9] Harrington, E.C., The Desirability Function. Industrial Quality Control, 1965: p. 494-498.

[10] Derringer, G. and R. Suich, Simultaneous Optimization of Several Response Variables. Journal of Quality Technology, 1980. **12**: p. 214-219.

[11] Khuri, A.I. and M. Conlon, Simultaneous Optimization of Several Responses Represented by Polynomial Regression Functions. Technometrics, 1981. **23**: p. 363-375.

[12] Del Castillo, E., D.C. Montgomery, and D.R. McCarville, Modified Desirability Functions for Multiple Response Optimization. Journal of Quality Technology, 1996. **28**(3): p. 337-345.

[13] Leon, N.A., A Pragmatic Approach to Multiple-response Problem Using Loss Function. Quality Engineering, 1996-97. **9(2)**: p. 213-220.

[14] Vining, G.G. and R.H. Myers, combining Taguchi and Response surface philosophies: A dual Response Approach. Jornal of Quality Technology, 1990. **22**: p. 38-45.

[15] Kim, K.J., Lin, D. K. J., Optimization of Multiple Responses Considering both Location and Dispersion Effects. European Journal of Operation Research, 2004. **169**: p. 133-145.

[16] Cheng, C.-B., Process Optimization by Soft Computing and Its Application to a Wire Bonding Problem. International Journal of Applied Science and Engineering, 2004. **1**: p. 59-71.

[17] Ortiz, F., J.R. Simpson, and J.J. Pignatiello, A Genetic Algorithm Approach to Multiple-
Response Optimization. journal of Quality Technology, 2004. **36**(4).

[18] Kim, K.J., Lin, D. K. J., Optimization of Multiple Responses Considering both Location and Dispersion Effects. European Journal of Operation Research, 2006. **169**: p. 133-145.

[19] D'Urso, p., Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp out put data. computational statistics & data analysis, 2003. **42**: p. 47-72.

[20] Digalskis.J and K.Margarities, Meta-heuristics Algorithms. 2001.

[21] Areibi, S., M. Moussa, and H. Abdullah, A Comparison of Genetic/Memetic algorithms and other heuristic serach techniques. ۲۰۰۰, ontario: University of Guelph.