Ministry of Education
Islamic Republic of IRAN

ISSN: 1235-1735

Quarterly Journal of
Educational Innovations

Organization for Educational Research and Planning

Abstract

A reflection of the structure of teachers' and student-teachers' perception of qualitative proportional reasoning

- Afsāne Poorang, PhD student in Math Education at Islamic Āzād University (Central Tehran Branch), Tehran, Iran[1]
- Nasim Asghari (PhD), Islamic Āzād University (Central Tehran Branch), Tehran, Iran[2]
- Ahmad Shāhvarāni (PhD), Islamic Āzād University (Science and Research Branch), Tehran. Iran[3]
- Masoud Kabiri (PhD), Organization for Educational Research and Planning (Research Institute for Education), Data Manager of TIMSS and PIRLS of Iran, Tehran, Iran[4]

Ability to relate all the essential features of a situation in the form of zooming in or out represents thought in a relative form. The emergence of relative thinking, is the prognosis for the beginning of building a bridge to fill the gap between collective and multiplicative structures. Relative thinking is a cognitive function that describes the ability to analyze the change in relative conditions. The ability to lead and work with qualitative aspects leads to the strengthening of quantitative proportional thinking. Studying the quality of teachers' perception is a perspective of how learners create and develop conceptual structures. With the aim of determinning the qualitative characteristics of knowledge of content pedagogy of qualitative proportional reasonin g, this study examined the knowledge of related representations among the research participants. It was a descriptive study with survey design. The research sample consisted of 180 primary school teachers, first cycle high school math teachers and student-teachers. The research tool was the researcher-made test and the evaluation was done under the framework of the theories of this field through a mixed-methods analysis. Based on the results, the closeness of the performance of student-teachers and the primary school teachers could be pointed out, i.e., almost half of each of these two groups had a successful performance. The most correct interpretations were presented by high school teachers, student-teachers and primary school teachers, respectively. Paying attention to the preliminaries and necessities of the process of developing proportional reasoning by teachers, deepening its investigation by researchers and demanding it in the educational designs of teacher training centers were emphasized by the researchers of this study. Regarding the training of future teachers, developing sensitivity to the consequences of the delay in the emergence of students' proportional thinking is necessary.

Keywords Qualitative Proportional Reasoning; Relative Thinking; Knowledge of Content Pedagogy

E-mail: **1.** af_poorang@yahoo.com **2.** nas. asghari@iauctb.ac.ir **(Corresponding Author)** **3.** ahmadshahvarani.sem@yahoo.com **4.** maskabiri@yahoo.com

Serial No.85. 22(1): Spring. 2023
Quarterly Journal of Educational Innovations

Published by Tehran University of Medical Sciences

Copyright © The Authors.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

۸۳-۱۰۶

بازتابی از ساختار درک معلم و دانشجومعلمان دربارهٔ استدلال تناسبی کیفی

افسانه پورنگ* ■ نسیم اصغری** ■ احمد شاهورانی*** ■ مسعود کبیری****

چکیده:

توانایی مرتبط کردن تمام ویژگی‌های ضروری یک موقعیت، در قالب بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی، معرف یک تفکر به شکل نسبی است. ظهور تفکر نسبی پیش‌آگهی آغاز ساخت پلی برای پرکردن شکاف میان ساختارهای جمعی و ضربی است. تفکر نسبی عملکردی شناختی است که توانایی تحلیل تغییر در شرایط نسبی را توصیف می‌کند. قابلیت هدایت و کار با جنبه‌های کیفی به تقویت تفکر تناسبی کمّی منجر می‌شود. مطالعهٔ کیفیت ادراک معلمان دورنمای شیوهٔ ایجاد و توسعهٔ ساختارهای مفهومی نزد فراگیران است. این مطالعه با هدف تعیین ویژگی‌های کیفی دانش محتوا و پداگوژیکی محتوای استدلال تناسبیِ کیفی به بررسی دانش بازنمایی‌های مرتبط میان مشارکت‌کنندگان در پژوهش پرداخته است.

پژوهش حاضر توصیفی و از نوع زمینه‌یابی است. نمونه آماری این پژوهش شامل ۱۸۰ نفر از معلمان مقاطع ابتدایی، متوسطهٔ اول (ریاضی) و دانشجومعلمان است. ابزار پژوهش آزمون محقق‌ساخته و ارزیابی در چارچوب نظریه‌های این حوزه به واسطهٔ تحلیل کمّی ـ کیفی صورت گرفته است.

از نتایج ارزیابی می‌توان به نزدیکی شیوهٔ عملکرد دانشجومعلمان و معلمان دورهٔ ابتدایی اشاره کرد که تقریباً نیمی از هریک از این دو گروه عملکرد موفقی داشتند. بیشترین تعابیر صحیح به ترتیب از سوی معلمان متوسطه، دانشجومعلمان و معلمان ابتدایی مشاهده شد. توجه به پیش‌درآمدها و ضرورت‌های روند توسعهٔ استدلال تناسبی از سوی معلمان، تعمیق بررسی آن توسط پژوهشگران و مطالبه آن در طراحی‌های تعلیمی مراکز تربیت معلم مورد تأکید محققان این مطالعه است. در خصوص آموزش معلمانِ آینده ایجاد حساسیت به پیامد تأخیر ظهور تفکر تناسبی دانش‌آموزان ضروری است.

کلید واژه‌ها: استدلال نسبی کیفی، تفکر تناسبی، دانش پداگوژی محتوا

■ تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۷ ■ تاریخ شروع بررسی: ۱۴۰۲/۲/۱۹ ■ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۲/۲۶

* دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. **E-mail:** af_poorang@yahoo.com

** **(نویسندهٔ مسئول)** استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. **E-mail:** nas. asghari@iauctb.ac.ir

*** استادگروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. **E-mail:** ahmadshahvarani.sem@yahoo.com

**** استادیار پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش، تهران، ایران. **E-mail:** maskabiri@yahoo.com

مقدمه

اقتضای استدلال تناسبی فراهم‌ساختن مقایسه‌های نسبی میان کمّیت‌هاست. لامون[1] (۱۹۹۹) تفکر نسبی[2] را، که تفکر ضربی[3] نیز خوانده می‌شود، عملکردی شناختی[4] مشتمل بر توانایی تجزیه وتحلیل تغییر در شرایط نسبی معرفی می‌کند. ظهور و شکوفایی تفکر نسبی می تواند نشانه‌ای باشد از این که دانش‌آموز در حال آغاز ساخت پلی برای پرکردن شکاف میان ساختارهای جمعی و ضربی[5] است.

مفهوم تناسب پیش از آنکه از نقطه نظر کمّی ساختاربندی یا سازماندهی شود به شیوه‌ای کیفی و منطقی[6] آغاز می‌شود. به بیان دیگر جنبه‌های کیفی تفکر زودتر از موارد کمّی رخ می‌دهند (استریفلند[7]، ۱۹۸۵). اداره و احاطه بر جنبه‌های کیفی نسبت و تناسب، امکان توسعهٔ روابط کمّی این مفاهیم را برای دانش‌آموز فراهم می‌کند و مدیریت الگوریتم‌ها را نیز با مجموعه کاربردهای معنادار در وی بهبود می‌بخشد (رویز لِدسما و والدمورس آلوارز[8]، ۲۰۰۴).

کیفیت و مشکلات روند توسعه استدلال تناسبی کیفی، از سوی محققانی از جمله کلارکسون[9] (۱۹۹۰)، لامون (۱۹۹۹)، رویز لدسما و لوپیانزگمز[10] (۲۰۰۹)، رویز لدسما (۲۰۱۰)، رویز لدسما (۲۰۱۱)، رویز لدسما (۲۰۱۳) و سان[11] (۲۰۱۳) مطالعه و بررسی شده است.

پژوهش‌ها در ارتباط با دانش‌آموزان، بیشترین نقص را در این خصوص تمرکز روی یک بعد و به کارگیری استراتژی افزودنی[12] معرفی می کنند. در این میان و در پیگیری مشکلات آموزشی، در مقایسه با نقد سایر عوامل، معمولاً تمرکز کمتری معطوف بر خصوصیات معلمان بوده است. تورستون و همکارانش[13] (۲۰۰۶) خاطرنشان می‌کنند که درک نامناسب و اطلاعات ناکافی برخی معلمان در مدارسِ ابتدایی، نحوهٔ درگیرشدن دانش‌آموزان را در یادگیری محتوا تحت‌تأثیر قرار می‌دهد. از سوی دیگر، در خصوص دانشجومعلمان درک فرایندی که به منظور شرح مفاهیم در تدریس تناسب طی می‌شود پراهمیت است.

در ایران ویژگی‌های کیفی درک آموزگاران از مفهوم نسبت و تناسب، به رغم تأثیر بسیاری که در یادگیری کودکان دارد، حوزه‌ای است که مورد بحث واقع نشده است. درحالی‌که مانند سایر حوزه‌ها معلمان علاوه‌بر داشتن دانش محتوای این حوزه و ضرورت حفظ روند انسجام در مفهوم‌پردازیِ آن نیازمند اطلاع از دشواری‌های فراگیران، خطاها و بدفهمی‌ها، دانش بازنمایی‌ها و مداخلهٔ دست‌ورزی‌ها هستند. این آگاهی نیازمند شناخت نسبت به مفاهیم و پیش‌مفاهیمی است که در روند توسعهٔ تفکر تناسبی نقش دارند. در این پژوهش، اشتیاق محقق در بازتاب بخشی از شناخت مشارکت کنندگان از پیش مفاهیم مربوطه و اطلاع رسانی وضعیت جاری، با این تاکید همراه است که هدف بررسی، افزودن موردی به مجموعه پژوهش‌های مستند در مورد ضعف کلی عملکرد معلمان نیست.

مبتنی برتعریفی که فیگوراس[14] و همکاران (۱۹۸۷) درباره طرح تعلیمی ارائه کرده و آن را گردایهٔ استراتژی‌های تدریس، شامل معانی (زبان رایج و درعین‌حال تکنیکی)، رفتارهای تعلیمی و سبک‌های

خاص بازنمایی و ارتباط درونی این موارد برمی‌شمارند؛ سعی محققان این مطالعه ارائه چارچوب یک طرح توسعه حرفه‌ای برای معلمان و نیز طرحی تعلیمی برای دانشجومعلمان در خصوص روند توسعه استدلال تناسبی نزد دانش‌آموزان است.

به این منظور متناظر چارچوب مفهومی ترسیم شده از سوی گروسمن[15] (۱۹۹۰) در مشخصه پردازی مولفه‌های دانش پداگوژی محتوا، محققانِ این مطالعه با برگزاری شش آزمون قلم ـ کاغذی به ترتیب به بررسی دانش محتوا و میزان آگاهی مشارکت‌کنندگان از مراتب نخست توسعهٔ استدلال تناسبی، ویژگی‌های کیفی طراحی مسائل نسبت و تناسب، کیفیت به کارگیری اصطلاحات نشانه‌ـ شناختی[16]، نوع استراتژی‌های مورداشاعه در فعالیت تدریس حل مسائل تناسبی از سوی آنان، میزان شناخت خطاها و درنهایت شیوهٔ تعامل با فراگیران در خصوص بدفهمی‌های حادث در این حوزه پرداختند. این ارزیابی‌ها سبب تبیین کیفیت توسعهٔ این استدلال نزد فراگیران و پیشبرد تدوین طرح تعلیمیِ پژوهشگران می‌شود. از مبانی نظری این مطالعه می‌توان به سازهٔ «دانش ریاضی برای تدریس» هیل[17] و همکارانش (۲۰۰۸) اشاره کرد.

در این مقاله، نتایج آزمون نخست این مجموعه ارزیابی ارائه می‌شود که در آن به بازتاب ساختار درک معلم و دانشجومعلمان در خصوص تکالیف مرتبط با استدلال تناسبی کیفی پرداخته شده است. در این آزمون زمینهٔ بررسی ابعادی از دانش محتوا و دانش پداگوژی محتوای استدلال تناسبی معلم و دانشجومعلمان، با پردازش مدل‌های ذهنی آن‌ها دربارهٔ ارزیابی استدلال تناسبی کیفی فراگیران، فراهم شد. این بررسی شامل شناخت بازنمایی‌های حوزهٔ استدلال تناسبی کیفی است.

■ مبانی نظری

● استدلال تناسبی، استلزامات توسعه

استدلال تناسبی هر نوع استدلالی را توصیف می‌کند که بر رابطهٔ میان دو نسبت متمرکز است (ورگ‌ناد[18]، ۱۹۸۳). استدلال با نسبت‌ها با یادگیری پرداختن به دو کمّیت به‌طور هم‌زمان آغاز می‌شود (شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا[19] [NCTM]، ۲۰۱۳). تامپسون[20] (۱۹۹۴ به نقل از لاچانس و کانفری[21]، ۲۰۰۱) نسبت را مقایسهٔ ضربی دو کمّیت در نظر می‌گیرد. دراین‌باره می‌توان به مثال مقایسهٔ دو قطعه طناب به طول‌های ۱۰ و ۲۵ سانتی‌متر اشاره و دو پرسش مطرح کرد: طول طناب دوم چقدر بلندتر از طول طناب اولی است و این پرسش که طناب دوم چند برابر (چند بار) بلندتر از طناب اولی است. راه اولِ مقایسهٔ طول‌ها مقایسه جمعی[22] و راه دوم، یک مقایسه ضربی است. لامون (۱۹۹۴) شکل دیگر خلق یک نسبت را ترکیب دو کمیّت برای ایجاد یک واحد جدید به نام واحد ترکیبی[23] برمی‌شمارد. مثال کلاسی را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر سه دانش‌آموز دختر دو دانش‌آموز پسر وجود دارد. در این مثال واحدِ ترکیبی واحدِ

۳:۲ خواهد بود که می‌تواند برای خلق و ایجاد دیگر نسبت‌های برابر تکرار[۲۴] (تجدید) و تفکیک[۲۵] (شکسته) شود. برای مثال، شما می‌توانید استدلال کنید این کلاس می‌تواند شش دختر و چهار پسرداشته یا نُه دختر و شش پسر داشته باشد که همگی نسبت‌هایی برابرند.

دانش‌آموز در سطوح پایه، به‌منظور تخصیص درک و معنا به مفهوم تناسب، نیازمند توسعهٔ تفکر تناسبی خویش است و توسعهٔ تفکر تناسبی مستلزم توانمندی فرد در ساخت مفهوم تناسب است. بنابراین یک رابطه دو طرفه میان مفهوم ریاضیاتی تناسب و تفکر تناسبی وجود دارد (رویز لدسما و والدمورس آلوارز، ۲۰۰۴).

از مؤلفه‌های مهم و ضروری توسعهٔ تفکر تناسبی ایجاد یک درک ضمنی به معنای تثبیت فهم و تصور فرد از همگنی است؛ تشخیص این که رابطه‌ای وجود دارد که نیازمند حفظ شدن است (لو و واتانابه[۲۶]، ۱۹۹۷). اقتضای این توسعهٔ شناختی دقت به تفسیر و درک زبان رایج نسبت است.

اسمیت[۲۷] (۲۰۰۲) متذکر می‌شود که اقدام شکل‌دادن به یک نسبت و انجام استدلال تناسبی، در درجهٔ نخست و مهم‌تر از همه، یک تکلیف شناختی است و یک الگوریتم یا یک رویه نیست. در این راستا، کانفری (۱۹۹۴) به یک سازهٔ ضربی[۲۸] به نام تقسیم‌بندی[۲۹] اشاره می‌کند و اقدامات را دراین سازه شامل موارد تسهیم[۳۰]، تازدن[۳۱] و بزرگ‌نمایی[۳۲] برمی‌شمارد. به باور وی این اقدامات ناشی از مفاهیم مقدماتی است که به صورت شهودی در کودکان رخ می‌دهد و از آنجا که این مفاهیم می‌توانند مستقیم به ضرب و به طورهم‌زمان به تقسیم و نسبت منجر شوند، به‌منظور پشتیبانی از اِعمال تقسیم‌کردن شهودی، کودکان باید با سازه‌های ضرب، تقسیم و نسبت به عنوان یک مجموعه سه‌تایی از مفاهیم در اوایل دوران مدرسهٔ خود آشنا شوند. وی مدعی شده است که دانش‌آموزان تابع و دنباله‌رو یک مسیر از میان حوزهٔ نسبت‌ها و بعد از آن کسرها در رسیدن به درک خود از اعداد اعشار و درصد هستند. کانفری استفاده از این سازه را برای توسعهٔ درک مفهوم نسبت از سوی دانش‌آموزان ضروری می‌خواند (لاچانس و کانفری، ۲۰۰۱).

مراتب توسعهٔ استدلال تناسبی

پیاژه و اینهلدر[۳۴] (۱۹۷۸ به نقل از آرتوت و پلین[۳۵]، ۲۰۱۵) اظهار می‌کنند که نسبت‌ها روابط میان دو کمّیت‌اند و مقایسهٔ آن‌ها نیازمند ملاحظهٔ روابط بین روابط خواهد بود.

استریفلند (۱۹۸۵) معتقد است نقطهٔ عزیمت آموزش مقدماتی نسبت و تناسب بایستی به رسمیت شناختن سطوح کیفی نسبت و تناسب باشد. وی با اشاره به اظهارنظر پیاژه (۱۹۷۸)، بر تظاهر استدلال کیفی پیش از استدلال کمّی تأکید دارد و آن را شامل کلیهٔ جنبه‌های کیفی تفکر تناسبی می‌شمارد. وی به رغم پیاژه این بحث را وارد حوزهٔ عمل می‌کند و با تأکید بر تدریس مقدماتی نسبت و تناسب مبتنی بر مراتب تشخیص کیفی، بر به کارگیری ابتکارات تعلیمی[۳۶]

اشاره دارد که توسعهٔ الگوهای ادراکی[۳۷] را به منظور پشتیبانی از روند کمّی‌سازی متناظر، حمایت و ترغیب کند. استدلال تناسبی با یک درک کیفی از کمیّت (نظیر کمتر و بیشتر) شروع می‌شود و به درکی کامل از تناسب به‌منزلهٔ رابطه‌ای ثابت میان زوج کمّیت‌های متغیر منتهی می‌شود. در اینجا برانگیختگی زبان نسبت و به‌کاربردن بیان‌های شفاهی (بازنمایی‌های کلامی)، که معمولاً با نسبت‌ها رابطه دارند، حاصل ویژگی‌های استدلال تناسبی کیفی است.

در روند توسعهٔ استدلالِ کیفی، کودک با پیشروی در تفکر نسبی می‌تواند پارامترهای بیشتری را در تحلیلی که ملاحظهٔ عوامل مختلف را مقدور می‌سازد، بگنجاند. استریفلند (۱۹۸۵) در طرح تعلیمی خویش، به استفاده از داستان برای ایجاد مقایسه‌های جهان غول و انسان در تنظیم روابطی که منجر مفهوم نسبت می‌شود، اشاره کرده است. تورنیر و پالوس[۳۸] (۱۹۸۵) تأکید دارند که استدلال تناسبی کیفی شروع سلسله مراتب استدلال تناسبی و دربردارندهٔ ویژگی‌هایی اعم از به‌کارگیری نسبت به عنوان یک واحد، به‌کارگیری تفکر نسبی و تا حدی درک روابط عددی است.

کرامر[۳۹] و همکاران (۱۹۹۳) تکالیف تناسبیِ (نوع مستقیم) را در سه دسته بازشناسی کرده‌اند؛ مسائل مقدار مجهول تناسبی، مسائل تناسبی مقایسه‌ای کمّی و مسائل مقایسه و پیش‌بینی کیفی[۴۰]، که نیازمند مقایسه‌های غیروابسته به مقادیر عددی خاص می باشند(باید مورد پیش‌بینی و مقایسهٔ کیفی قرار گیرند)، مسائلی که دانش‌آموز را ملزم به ارزیابی تأثیر نسبتی از یک تغییر کیفی روی یک یا هر دو کمیّت مرتبط می‌کند (سان، ۲۰۱۳).

● استدلال تناسبی کیفی

توماس[۴۱] (۲۰۰۲) در توصیف شیوه‌هایی که در بنا و آزمودن طرح‌واره‌ها (ازجمله طرح‌واره نسبت) دخیل هستند، به ارائهٔ ایدهٔ دو سبک فعالیت ذهنی شهودی و تأملی می‌پردازد. ازنظر وی سازهٔ مفاهیم در یک طرح‌واره، در تجرید به واسطهٔ تجربهٔ مستقیم حسی از واقعیت (مفاهیم مقدماتی) با استفاده از یک سیستم از نوع حسی ـ حرکتی شکل می‌گیرد. این سازه، اطلاعاتی را دریافت کرده با وضعیت هدف مقایسه می کند و با کمک نقشه‌ای از طرح‌واره‌های در دسترس، عملوندی از وضعیت فعلی آن به وضعیت هدف اتخاذ می کند. مرتبط با این امر، تفکر تناسبیِ کیفی یک درک شهودی مبتنی بر تجربهٔ عملی شخصی است که توسط حواس، بازشناسی‌های زبانی[۴۲] و دسته‌بندی مقایسه‌ای کلامی نظیر بزرگ‌ترـ کوچک‌تر پشتیبانی می‌شود. این تفکر به فعالیت‌هایی اشاره می‌کند که دانش‌آموز را قادر به شمردن، اندازه‌گیری و به کارگیری کمّیت‌ها در این روند می‌سازد. چنانچه فرودنتال[۴۳] (۱۹۸۳ به نقل از رویز لدسما و لوپیانزگمز، ۲۰۰۹) ایجاد و بنای درک نسبت به شکل شهودی[۴۴] را معادل تفکر تناسبی کیفی و به شکل صریح[۴۵] را همان تفکر تناسبی کمّی می‌شمارد که هر یک سبک مقایسهٔ مستقیم و غیرمستقیم را شامل

می‌شوند. در مقایسهٔ مستقیم، شی روی دیگری قرار می‌گیرد و در سبک غیرمستقیم، مقایسه با شـــمردن یا با استفاده از یک خط‌کش صورت می‌گیرد. آن‌ها ابراز می‌کنند درک نسبت می‌تواند به‌کارگیری تجســـم[۴۶] مورد کاوش و هدایت واقع شود و سپس با استفاده از ساختارهای حاوی جزئیات در قالب تصاویر، نمودار و جداول نمایش داده شود. این تجسم‌ها می‌تواند توسط سازه‌هایی با جزئیات نمایش داده شود که در آن‌ها ترسیم‌ها تفاوت‌هایی دارند. ازاین‌رو پیشنهاد می‌کنند که در هنگام کار روی نسبتِ طول‌ها، شکل‌های تخت (مسطح) به عنوان یک ابزار بازنمایی استفاده شـــوند تا درک کیفی ـ کمّی دانش‌آموز به واسطه درک بصری تسهیل شود. قراردادن یک شکل روی دیگری به سبکی عینی ـ شهودی فرد را قادر به تشخیص روابط تشابه میان اشکال می‌کند و اقدام به مقایســـهٔ اشکال، هرچند بدون استفاده از ابزار، آغاز اندازه‌گیری است. مثال را می‌توان در دو تصویر مجاور هم که در آن‌ها بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی[۴۷] صورت گرفته اســـت با نسبت خطی یکسان در هر قسمت از شکل ایجاد کرد. در این صورت برای دانش‌آموز درک کیفی و کمّی مقادیر با استفاده از ادراک بصری تسهیل می‌شود (رویز لدسما و لوپیانزگمز، ۲۰۰۹).

پیاژه (۱۹۵۷ به نقل از رویز لدســـما و لوپیانزگمز، ۲۰۰۹) به واســـطه دریافته است کودک شناسایی و تشـــخیص کیفی[۴۸] را قبل از حفاظت کمّی[۴۹] (بقای کمّی) کسب و تحصیل می‌کند و میان مقایســـه‌های کیفی و کمّی‌سازی واقعی تمایز ایجاد می کند. در توصیف این روند، پیاژه و اینهلدر (۱۹۷۸aبه نقل از رویز لدســـما و لوپیانزگمز، ۲۰۰۹) معتقدند کودکان در آغاز، مسئله را درک نمی‌کنند یا تنها بر مبنای بخشـــی از اطلاعات پاســـخ می‌دهنـــد. در وهلهٔ بعد، عوامل مداخله‌گر[۵۰] را به شـــیوه‌ای کیفی مرتبط می‌سازند. به بیان دیگر، درک فرد در استدلال تناسبی کیفی روی تصورات و فهم وی از کمّیت‌های قابل اندازه‌گیری بدون دخالت مستقیم اعداد استوار اســـت. رویز لدسما (۲۰۱۳) تأکید می‌کند که برای توسعهٔ تفکر تناسبی کیفیِ دانش‌آموز، شروع از مفاهیم بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایی ضروری اســـت که پیرو آن ایده کپی کردن یا ترســـیم به مقیاس[۵۱] پیش می‌آید. فرض وی بر آن است که دانش‌آموز در سنین پایین تشخیص تناسب را با دریافت ادراکی[۵۲] و مشاهده[۵۳] مدیریت می‌کند. یک شیوه برای ابراز و اظهار تفکر تناسب کیفی، به‌کارگیری بیان‌های کلامی[۵۴] اســـت؛ زمانی که دانش‌آموز عباراتی نظیر «بزرگ‌تر از/ کوچک‌تر از....» را به‌کار می‌گیرد. این ترتیب‌گذاری، دســـته‌بندی کلامی[۵۵] خوانده می‌شـــود (رویز لدسما، ۲۰۱۳). پس از اینکه دانش‌آموز بخش ادراکی ـ دریافتی، یعنی تفکر تناسبی کیفی را توسعه می دهد، یک ترتیب‌دهی[۵۶] از انجام مقایســـه‌ها اتفاق می‌افتد که درانتقال از تفکر تناسبی کیفی به کمّی واقع اســـت. این مطلب می‌تواند زمانی که وی اشکال را با قراردادن آن‌ها روی هم و لحاظ کردن شکل اصلی به‌عنوان شاخص، مقایسه می‌کند تصدیق و تایید گردد. ازنظر پیاژه و اینهلدر (۱۹۷۸a) در رونـــد انتقال تفکر کیفی بـــه کمّی، مفهوم ترتیب پدید می‌آید؛ دانش‌آموز می‌تواند

شکلی را بســـازد که در حال بزرگ یا کوچک‌شدن اســـت و ازاین‌رو شاخص‌های بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایـــی را به‌وجود آورد. به بیان دیگر، قبل از پدیدآمدن موجودیت کمّی، رویدادی پیش می‌آید که آن‌ها آن را کمّی‌سازی‌های فشرده[۵۷] می‌خوانند. پس از این مرحله در انجام مقایسه‌ها اندازه‌گیری[۵۸] را به‌کار می‌گیرد. زمان استفاده از اندازه‌ها به منظور انجام مقایسه، در گام نخست بخش‌هایی از اشـــیا را مقابله[۵۹] می‌کند و شکل را روی دیگری قرار می‌دهد. در گام بعد ابزارهای اندازه‌گیری مرسوم یا غیرمرسوم را به‌کار می‌گیرد (به نقل از رویز لدسما، ۲۰۱۰). در ادامه، پیاژه صحبت از شاخص دیگری می‌کند که با تخصیص معنا به استفاده از قانون سه[۶۰] و مدیریت توسعهٔ تفکر تناسبی کیفی از سوی دانش‌آموز اشاره می‌کند (رویز لدسما، ۲۰۱۳).

رویز لدسما و والدمورس آلوارز (۲۰۰۴)، مبتنی بر اظهارنظر پیاژه (۱۹۷۸)، فرودنتال (۱۹۸۳) و نیز ایده اســـتریفلند (۱۹۹۳) در رابطه با آموزش واقع‌گرایانـــهٔ ریاضیات[۶۱] بیان می‌کنند تفکر تناســـبی کیفی ابتدا به‌واســـطهٔ ادراک مبتنی بر تجربه ایجاد می‌شود؛ این در حالی است که در فعالیت‌های آموزشی ترجیح استفاده از الگوریتم وجود دارد. ازاین‌رو دانش‌آموزان تفکر تناسبی کمّی را به شـــیوه‌ای مکانیکی، زمانی که در بسیاری از وضعیت‌ها تفکر تناسبی کیفی را توسعه نداده‌اند، توسعه می‌دهند و بنابراین توالی کیفی ـ کمّی همواره نزد آنان وجود ندارد.

دانش‌آموز با واحدپردازی درگیر در اســـتدلال تناســـبی کیفی می‌شود؛ زمانی که نسبت را به‌منزلهٔ یک واحد اختیار کرده، بنا بر ضرورت آن را برای اندازه‌گیری نسبت دیگر به‌کار می‌گیرد. این نسبت‌ها تبدیل به عناصری می‌شوند که وی با آن‌ها شروع به اندازه‌گیری کرده و با عملیات فیزیکی، حســـاب واحدهای جدید را مدلســـازی می‌کند (لامون، ۱۹۹۳). بنابراین اســـتفاده و به‌کارگیری نســـبت به‌منزلهٔ یک واحد، پیش‌درآمد تفکر نســـبی و نشانهٔ آن است که فرد قادر به استدلال تناسبی کیفی است. به‌بیان‌دیگر، استدلال تناسبی کیفی نخستین سطحی است که در آن نسبت به‌منزلهٔ یک واحد به‌کار گرفته می‌شود.

مقایسه از نوع کیفی، زمانی که هیچ موردی از اندازه‌گیری با هرگونه ابزاری صورت نمی‌پذیرد، متکی بر قوهٔ بصری و شـــهود است. در استدلال تناسبی کیفی آنچه موردانتظار است اِعمال یک قوهٔ تشخیص و تمییز بصری[۶۲] در مورد رابطهٔ میان ابعاد و به‌کارگیری عملگر[۶۳] مربوطه بر مبنای این سنجش می‌باشد. بدان معنا که الگوی به‌کاررفته در کوچک‌سازی یا بزرگ‌نمایی شکل‌هایی که یک سری متوالی از این دست را تشکیل می‌دهند تشخیص داده شود و مبتنی بر این عملگر، ترسیم تکمیل می‌شود. استریفلند (۱۹۸۵) باور دارد استدلال کیفی زمانی تکامل می‌یابد که تفکر کودک قادر به الحاق و مشـــارکت‌دادن اِلمان (عناصر) بیشتری برای یک تحلیل می‌شود، یعنی آنچه به وی اجازه می‌دهد به شکل هم‌زمان عوامل مختلفی را مدنظر داشته باشد.

توسعهٔ استدلال تناسبی کیفی نزد دانش‌آموزان

دانش‌آموزان به‌ویژه در ایجاد مفهوم نسبت‌ها به شیوه‌های شهودی و صریح در اشکال هندسی سردرگم می‌شوند (رویز لدسما ۲۰۱۰). رویز لدسما (۲۰۱۳) معتقد است تفکر کیفی دانش‌آموزان مدارس ابتدایی به سختی توسعه می‌یابد. توسعه نیافتن تفکر تناسبی کیفی تأخیر در ظهور تفکر تناسبی کمّی را به دنبال دارد. پژوهش‌های مورداشاره دربارهٔ دانش‌آموزان بیشترین نقص را در این خصوص، تمرکز روی یک بعد و به‌کارگیری استراتژی افزودنی، معرفی می‌کنند. نداشتن تشخیص‌های صریح و شفاف از نسبت‌های موجود میان اندازه‌ها در انجام استدلال تناسبی کیفی یک مانع روان‌شناختی[۶۴] محسوب می‌شود که منجر به ناتوانی در ایجاد روابط نسبت در حوزهٔ کمّی می گردد. بدین سبب زمان کار در حوزهٔ کمّی، دانش‌آموز قادر به ایجاد روابطی که تحت عنوان نسبت‌ها مورد اشاره واقع می شوند نخواهد بود. مانع روان‌شناختی فرایند تمرکز[۶۵] که از عوامل شکست در تفکر تناسبی کیفی است و دانش‌آموزان را از تشخیص درست موقعیت‌های نسبت و تناسب بازمی‌دارد، به شکلی نیرومند ریشه در تفکر آنان دارد. در این فرایند دانش‌آموز روی یکی از ابعاد متمرکز می‌شود. نداشتن یک تصور شفاف از تناسب از نقطه‌نظر ترسیم به مقیاس[۶۶] در اظهارات کلامی نظیر «بزرگ‌ترساختن آن» و «آن‌ها بایستی کوچک‌تر شوند» آشکار می‌شود. در مورد برخی دانش‌آموزان نیز درک ناکافی و مختصر کیفی[۶۷] بر درک کمّی سبقت می‌گیرد. دسته‌بندی‌های زبان‌شناختی این افراد شامل جملاتی از قبیل «این کوچک‌تر از....» و «این بزرگ‌تر از...» انعکاس یک درک تکامل نیافتهٔ تناسب است. به‌طور عام این افراد در زمان ایجاد روابط میان اندازه‌ها سردرگم می‌شوند. در این شرایط به‌کارگیری زمینهٔ شبکه‌ای، صرف‌نظر از اینکه آیا کمّیت افزایش ـ کاهش‌یافته صحیح باشد، یک ابزار و شیوه‌ای حمایتی برای شمارش معرفی می‌شود (رویز لدسما و لوپیانزگمز، ۲۰۰۹).

دانش‌آموزانی که تفکر تناسبی کیفی را توسعه نداده‌اند قادر به شناسایی بصری ـ تجسمی شکل صحیح نیستند و نیازمند متوسل‌شدن به مقایسه‌های مستقیم و غیرمستقیم هستند. در مقایسهٔ مستقیم آن‌ها از اقدام تعلیمی روی‌هم قراردادن اشکال استفاده می‌کنند، درحالی‌که در مقایسهٔ غیرمستقیم اقدام تعلیمی، به‌کارگیری یک ابزار اندازه‌گیری است (رویز لدسما، ۲۰۱۳).

در خصوص ادراک شهودی دانش‌آموزان از نسبت، یافته‌های لامون (۱۹۹۳) اشاره به لزوم توجه و آغاز تلاش در خصوص توسعه تفکر تناسبی کیفی در پایه‌های مقدماتی دارد. آموزش‌ها باید توسعهٔ ادراک شهودی را مهیا، مقدور، نظام‌مند و سازمان‌دهی کند.

دانش‌آموزانی با درک اندک یا بدون درک از مسائل نسبت در برخورد با تشابهات فضایی (نظیر بزرگ‌نمایی‌ها در اشکال) به قضاوت‌های بصری یا صرفاً حدس متوسل می‌شوند؛ هرچند این حدس‌ها ممکن است تابع منطق باشند (پریش[۶۸]، ۲۰۱۰). در پیشروی توسعه، توأم با

شـــروع تشخیص اهمیت اعداد، آن‌ها ابتدا ســـعی در افزودن مقادیر مساوی به هریک از ارزش‌ها (کمّیت‌ها) و حفظ توازن می‌کنند. این تلاش‌های اولیهٔ کمّی‌سازی با به‌کارگیری استراتژی جمعی ثابت صورت می‌گیرد. ازنظر رویز لدسما (۲۰۱۰) در رابطه با فعالیت‌های تعلیمی مرتبط با تفکر تناسبی کیفی می‌توان به ایجاد تناسب به شیوه‌های کیفی، توسعهٔ تفکر پیش‌تناسبی و درنهایت کمک به انتقال از تفکر تناســـبی کیفی به کمّی اشـــاره کرد؛ مواردی شـــاملِ روی هم قراردادن اشکال (مقایسهٔ مستقیم)، استفاده از ابزار اندازه‌گیری (مقایسهٔ غیرمستقیم)، شکل‌های کوچک یا بزرگ‌شده‌ی شکل مفروض و نیز به‌کارگیری اشکال به مقیاس. وی در مطالعات خود، این انتقال را با استفاده از پس‌زمینهٔ شبکه‌ای[۶۹] (کاغذ شطرنجی) که در آن شمارش حسب واحد اندازه‌گیری معین صورت می‌گیرد و با درخواســـت از دانش‌آموز برای ترسیم روی آن، دنبال می‌کند. حاصل فرایند شـــمارش ضلع مربع‌ها در این شبکه به‌منظور ایجاد روابط خارج قسمتی استفاده می‌شود و نتیجهٔ به‌دست‌آمده همان «نسبت» است. با هدف توسعهٔ استدلال تناسبی، باکستر و جونکر[۷۰] (۲۰۰۱) مدلـــی طـــرح کرده‌اند که با درک کیفی از کمّیت آغاز و طی پنج مرحله به درک کامل تناسب به عنوان یک رابطهٔ ثابت میان زوج کمّیت‌های تغییرکننده تقریب می‌یابد.

پیشینهٔ پژوهش

اســـتدلال تناسبی ذهن بسیاری از متخصصان حوزهٔ آموزش ریاضی را به خود اختصاص داده و آثار بسیاری به رشتهٔ تحریر درآمده است. تلاش محقق در استناد به پژوهش‌های داخلی مرتبط با ماهیت و مراتب توسعهٔ استدلال تناسبی نتیجه‌بخش نبود. ایدهٔ مطالعهٔ ساختار درک معلم و دانشجومعلمان کشور در خصوص مراتب توسعه تفکرتناسبی، بدیع و مستلزم گسترش و تعمیقِ توسط سایر پویندگان است.

مطالعهٔ روند و کیفیت توســـعهٔ استدلال تناســـبی نزد دانش‌آموزان، تبیین و تحلیل شناختی موانع پیش روی توسعهٔ تفکر تناسبی فراگیران از سوی محققانی ازجمله هارت[۷۱] (۱۹۸۴ و ۱۹۸۸)، کلارکسون (۱۹۹۰)، کارپلـــوس[۷۲] و همکاران (۱۹۸۳)، تورنیر(۱۹۸۴)، تورنیر و پالوس (۱۹۸۵)، لامون (۱۹۹۳)، لو و واتانابه (۱۹۹۷)، رویز لدســـما و والدمورس آلوارز (۲۰۰۲)، لاچانس و کانفری (۲۰۰۱) منبع ایده‌های پژوهشی بسیاری بوده‌اند.

در قیاس با حجم مطالعات در حوزهٔ یادگیری، سهمی هرچند کوچک به کیفیت دانش این حوزه نزد معلمان و شیوهٔ کارکرد آن‌ها اختصاص دارد که به‌منظور توسعهٔ تفکر تناسبی نزد فراگیران، در پی فراهم آوردن رهنمودهایی برای نظام آموزشی می‌باشند. ازجمله این دسته می‌توان به پژوهش‌های پیتاپانتازی و کریســـتو[۷۳] (۲۰۱۱)، ریلای[۷۴] (۲۰۱۰)، ســـان (۲۰۱۰ و ۲۰۱۳)، رویز لدسما و لوپیانزگمز (۲۰۰۹)، لوباتو[۷۵] و همکاران (۲۰۱۰) و اسپانودی و میسایلیدو[۷۶] (۲۰۱۶) اشاره کرد.

برخی مطالعات نظیر باکســـتر و جونکر (۲۰۰۱)، بن‌چایم[۷۷] و همکاران (۲۰۱۲) و هاو[۷۸] و همکاران

(۲۰۱۱) به تدوین ابتکارات تعلیمی در جهت بهبود کیفیت توسعه یا به ارائهٔ مدل طرح توسعهٔ استدلال تناسبی پرداخته‌اند.

رویز لدسما در پژوهشی مشترک با لوپیانزگمز (۲۰۰۹) بیان می‌کند مشاهدهٔ دانش‌آموزانی که تنها بر روی یک بُعد از شـــکلی که خواسته‌شده بزرگ‌تر یا کوچک‌تر شود تمرکز می‌کنند بدان معناست که آموزش مدرسه‌ای[۷۹] به شـــکل کامل از تفکر کیفی دانش‌آموز در حوزهٔ تناسب بهره‌برداری نکرده است. رویز لدسما با تمرکز بر دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبستان و با هدف توسعهٔ تفکر تناسبی کیفی و بهره‌گیری از فعالیت‌های تعلیمی، به‌واســـطهٔ فناوری الکترونیکی، در محیط بازی‌های کامپیوتری، در پژوهش‌های ۲۰۰۴، ۲۰۱۰ و ۲۰۱۳ با طراحی فعالیت‌های تعاملی[۸۰] سعی در بهبود روند توسعهٔ تفکر تناسبی دارد.

دانش پداگوژیک محتوای استدلال تناسبی

دانش پداگوژیک محتوا دانشـــی عملی مبتنی بر دانش موضوعی معلمان است. این دانش در همراهی با دانش پداگوژی معلمان برای به‌ثمررساندن اقداماتشان در کلاس درس مبتنی بر زمینهٔ پرداخته شده می‌باشد. تلفیقی که منحصراً در قلمرو معلمان است و شکل خاصی از درک حرفه‌ای آن‌ها را شامل می‌شود (شولمن[۸۱]، ۱۹۸۶). با توجه به ابهامات در این تعریف، طرح این مسئله که معلمان چه چیزی را لازم اســـت بدانند تا قادر باشند ریاضی را به‌طور مؤثر تدریس کنند شکل می‌گیرد. ضرورت دانســـتن محتوای ریاضی برای معلمانی که در دورهٔ ابتدایی تدریس می‌کنند مفروض اســـت. اما به شـــکل ویژه تمرکز بر اینکه معلمان چگونه آن محتوا را می‌دانند گرایش پژوهشی جدیدی در حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی است (هیل و همکاران، ۲۰۰۷).

بـــال[۸۲] و همـــکاران (۲۰۰۸) باور دارنـــد در پژوهش‌های موجود در حـــوزهٔ آموزش معلمان ریاضی تلاش‌های اندکی، به‌منظور توسعهٔ معیارها و استفاده از آن‌ها در سنجش دانش پداگوژی محتواهای خاص درســـی ، صورت گرفته است. در پژوهش‌های مرتبط با حوزهٔ آموزشِ معلمانِ ریاضی دانش پداگوژی محتوا معمولاً واقعیتی مسلم در نظر گرفته شده است و شواهدی که بتواند راهنمای عمل قرار گیرد موجود نیســـت. ازاین‌رو در شـــکل‌گیری سیاست غنی‌سازی دوره‌های توســـعهٔ حرفه‌ای به‌منظور ایجـــاد درکی عمیق‌تر از روابط میان دانـــش معلمان، تدریس آنان و یادگیری دانش‌آموزان، نقش ایده‌های ارائه شده محدود بوده است.

مرتاضی (۱۳۹۵) در نقل گزارش فراتحلیل (NCTM) (۲۰۱۰) از نتایج پژوهش‌های ســـه دهه در خصوص دانش ریاضی موردنیاز معلمان برای تدریس و چگونگی توسعهٔ آن اشاره می‌کند که اهداف پژوهشی پیش رو باید متضمن مواردی ازجمله تولید دانش ریاضی موردنیاز معلمان و ایجاد ظرفیت برای استفاده از آن در عمل تدریس ریاضی باشند.

مســـتقل از مدل‌های ارائه‌شـــده در رابطه با استدلال تناســـبی دانش‌آموزان و بدون تکیه بر

چالش‌های رایج، مطالعات اندکی با هدف بررسی موانع شناختی ساختار درک معلمان از مراتب اســـتدلال تناسبی و سهم آنان در میزان توسعهٔ آن صورت گرفته است. در این رابطه می‌توان به مطالعات هینـــز و مک ماهون[۸۳] (۲۰۰۵)، لیم[۸۴] و همکاران (۲۰۰۷) و ســـان (۲۰۱۰ و ۲۰۱۳) ریلای (۲۰۱۰) اشاره کرد که حاکی از وجود مشکلاتی در این خصوص است.

گروســـمن (۱۹۹۰) در مفهوم‌پـــردازی دانش پداگوژیک محتوا آن را داشـــتن تصور کلی از آموزش یک مفهوم، دانش به‌کارگیری ابزارها، بازنمایی‌ها و اســـتراتژی‌های آموزشـــی، شناخت نســـبت به ادراک دانش‌آموزان، تفکر و یادگیری یک موضوع و شـــناخت نسبت به برنامهٔ درسی معرفی می‌کند. یکی از این معیارهایِ مورد توجه، دانش و شناخت بازنمایی‌ها است.

استفاده از این معیارها در بررسی شیوهٔ یاددهی ـ یادگیری، به‌منزلهٔ ابزاری برای سنجش میزان درک معلمان از روند توسعهٔ اســـتدلال تناسبی در میان فراگیران در ایران صورت نگرفته است.

این امر دســـتاویزی اســـت بر این باور که ابزارهای تشخیصی خوب طراحی‌شده می‌تواند به تعلیم معلمان در دو گام کمک کند. آنان با آگاهشـــدن از ســـطح دانش پداگوژی محتوای خود و ارتقای آن می‌توانند به ارزیابی پیش‌بینی‌های خود در رفع بدفهمی‌ها و تشخیص درک سطحی و کم‌مایهٔ دانش‌آموزان بپردازند.

روش پژوهش

رویکرد این پژوهش توصیفی از نوع زمینه‌یابی اســـت و نیز هدف رویکرد کیفی ضمیمه، بررســـی دیدگاه‌ها در خصوص ارزیابی و نیز افزوده‌ها در مصاحبهٔ نیمه‌ساختاریافته است. محقق در طراحی آزمون قلم ـ کاغذی و نیز هدایت مصاحبهٔ نیمه ســـاختاریافته از دانش و تجربهٔ اســـتادانی از آموزش ریاضی، روان‌ســـنجی و آزمون‌ســـازی بهره گرفته اســـت. در بخش تحلیلِ کیفی، نکات و جملات کلیدی متن مکتوب‌شدهٔ مصاحبه‌ها با استفاده از کدگذاری باز استخراج شد.

جامعهٔ آماری شامل سه گروه مستقل از معلمان دورهٔ دوم ابتدایی و معلمان ریاضیات متوسطهٔ اول سه منطقهٔ آموزشی شهر تهران و دانشجومعلمان آمادهٔ خدمت (رشته‌های آموزش ابتدایی و آموزش ریاضی) از سه مرکز تربیت‌معلم این شهر بود. اجرای پژوهش مستلزم پیگیری تدوین و تقبل اجرای یک دورهٔ توسعهٔ حرفه‌ای در این مناطق بود. حجم نمونهٔ در دسترس شامل ۱۱۲ معلم حین خدمت شد؛ داوطلبانی که طی روند رسمی فراخوان اداره‌های آموزش و پرورش برای شرکت در دورهٔ توسعهٔ حرفه‌ای مذکور، ویژهٔ معلمان پایه‌های چهارم، پنجم، ششم و ریاضی هفتم، در آن شرکت کردند. معلمان آمادهٔ خدمت (دانشجومعلمان ترم آخر) نیز از میان نمونه‌های در دسترس دو مرکز دخترانه و یک مرکز پسرانهٔ تربیت‌معلم انتخاب شدند.

۶۲/۲ ٪ شرکت‌کنندگان، معلمان حین خدمت (شامل ۷۵ معلم مقطع ابتدایی با سابقهٔ ۹-۲۷ سال و ۳۷ معلم ریاضی متوسطهٔ اول بود. رشتهٔ تحصیلی ۶۹ ٪ معلمان دبستان آموزش ابتدایی نبود. تجربهٔ

کاری همهٔ معلمان ریاضی متوسطه اول بیش از هفت سال بود. ۳۷/۸ ٪ نمونهٔ آماری، معلمان آمادهٔ خدمت (۶۸ دانشجومعلم) بود (جزئیات بیشتر مندرج در جدول یک).

جدول ۱. فراوانی نمونهٔ آماری به تفکیک مناطق و دورهٔ تدریس

گروه‌های مشارکت‌کننده / دوره‌ها	دورهٔ ابتدایی	دورهٔ متوسطهٔ اول	کل
معلمان منطقهٔ ۱۳	۳۴	۷	۴۱
معلمان منطقهٔ ۱۹	۱۳	۲۱	۳۴
معلمان منطقهٔ ۳	۲۸	۹	۳۷
دانشجومعلمان	۲۷	۴۱	۶۸
کل	۱۰۲ (٪۵۷)	۷۸ (٪۴۳)	۱۸۰(٪۱۰۰)

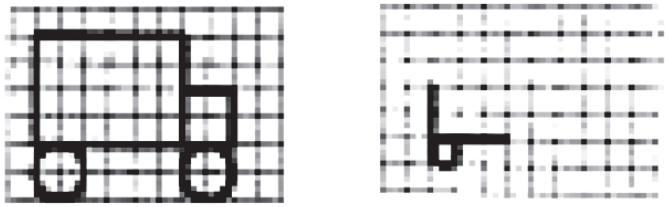
ابزار پژوهش

در دو جلسهٔ نخست اجرای دورهٔ توسعهٔ حرفه‌ای مذکور، درخواست از مشارکت‌کنندگان برای شرکت در شش آزمون قلم ـ کاغذی به ترتیب برای بررسی میزان آگاهی از مراتب نخست توسعهٔ استدلال تناسبی، بررسی ویژگی‌های کیفی طراحی مسائل تناسبی، بررسی کیفیت به‌کارگیری اصطلاحات نشانه ـ شناختی، مطالعهٔ نوع استراتژی‌های انتخابی در فعالیت تدریس حل مسئله تناسبی، بررسی میزان شناخت خطاها درحل مساله توسط فراگیران و نیز شیوهٔ تعامل با فراگیران در خصوص بدفهمی‌های حادث در این حوزه صورت گرفت. لازم به ذکر است پیش از برگزاری آزمون نخست، به منظور بررسی توانمندی تشخیص محتوای تکالیف ارائه شده، اطلاع‌رسانی از محتوای مورد بررسی (استدلال تناسبی) انجام نشد. آزمون‌های دانشجومعلمان در مرکز تحصیلی آن‌ها و با هماهنگی‌های مقتضی انجام شد. محتوای آزمون نخست شامل درخواست تکمیل سه تکلیف ترسیم بود. ایده‌هایی از بزرگ‌نمایی، کوچک‌نمایی و ترسیم به مقیاس با حمایت شبکهٔ ترسیمی که در آن از شرکت‌کنندگان درخواست برای ادامهٔ ترسیم (مسئلهٔ یک و سه) و اِعمال ضریب مقیاس (مسئلهٔ دوم) صورت گرفته بود. تکالیف مذکور از بین ابزار مطالعات پژوهشی معتبر انتخاب شده و اعتبار محتوا[۸۵] مورد تایید اساتید بود. مشارکت‌کنندگان طی پرسشی کتبی در انتهای آزمون در خصوص تشخیص محتوا، عنوان، ماهیت و هدف آموزشی سه ترسیم درخواست شده ارزیابی شدند. ویژگی‌های کیفی پاسخ‌ها ازطرف محقق مورد بررسی و نتایج در قالب اطلاعات کمّی مورد تحلیل توصیفی قرار گرفت.

یافته‌های پژوهش

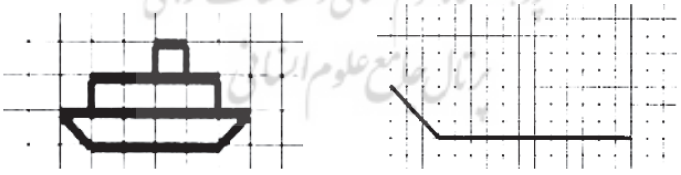
صورت درخواست‌های مطرح‌شده در آزمون

د) ۱. لطفاً از راهنمای تصویری استفاده کنید و ترسیم تصویرمرتبط با آن را تکمیل کنید.



د) ۲. تصویر یک جلیقه ترسیم شده است. لطفاً اندازهٔ آن را دو بار بزرگ‌تر ترسیم کنید.

د) ۳. لطفاً ترسیم زیر را مطابق با روال آنچه بخشی از آن ترسیم شده ادامه دهید.



د) ۴. سؤالات یک تا سه دربارهٔ کدام محتوای کتب درسی طرح و بررسی می‌شوند؟ هدف از ارائه و طرح این نوع ترسیم‌ها و ماهیت آموزشی محتوای آن‌ها در پایه‌های مقتضی چیست؟

تکالیف اول و ســـوم در آزمون برگزار شده، فعالیت‌های مقایسه‌ای[۸۶] هستند که به فرد اجازه می‌دهد روابط تشـــابه[۸۷] میان شکل‌ها را تشـــخیص دهد. فراوانی پاسخ صحیح شرکت‌کنندگان، به تفکیک گروه‌ها، به ســـه درخواست نخســـت آزمون در جدول ۲ ارائه شده است. در خصوص درخواست برای ترسیم‌ها هیچ برگهٔ پاسخنامه‌ای بدون پاسخ ارجاع نشد.

جدول ۲. فراوانی پاسخ مشارکت‌کنندگان به سه مورد درخواست ترسیم در آزمون

داده‌های آماری مربوط به انجام سه ترسیم					
		تعداد ترسیم صحیح			کل
		۰	۱	۲	۳	
معلمان مقطع ابتدایی	تعداد	۲۱	۲۰	۱۹	۱۵	۷۵
	درصد در گروه	٪۲۸/۰	٪۲۶/۷	٪۲۵/۳	٪۲۰/۰	٪۱۰۰/۰
معلمان ریاضی متوسطهٔ اول	تعداد	۲	۵	۱۳	۱۷	۳۷
	درصد در گروه	٪۵/۴	٪۱۳/۵	٪۳۵/۱	٪۴۵/۹	٪۱۰۰/۰
دانشجومعلمان	تعداد	۱۶	۱۶	۲۳	۱۳	۶۸
	درصد در گروه	٪۲۳/۵	٪۲۳/۵	٪۳۳/۸	٪۱۹/۱	٪۱۰۰/۰
کل	تعداد	**۳۹**	**۴۱**	**۵۵**	**۴۵**	**۱۸۰**
	درصد از کل	**٪۲۱/۷**	**٪۲۲/۸**	**٪۳۰/۶**	**٪۲۵/۰**	**٪۱۰۰/۰**

۴۵/۳٪ معلمـــان دورهٔ ابتدایی، ۸۱٪ معلمان ریاضی مقطع متوســـطهٔ اول و ۵۲/۹٪ دانشـــجومعلمان دســـت‌کم دو ترسیم را به شکل صحیح انجام دادند. ۲۶/۷٪ معلمان ابتدایی، ۱۳/۵٪ معلمان متوسطهٔ اول و ۲۳/۵٪ دانشـــجومعلمان از سه ترسیم درخواست شده، تنها یک ترسیم را به شکل صحیح انجام دادند. از سوی دیگر ۲۱/۷٪ شرکت‌کنندگان هیچ یک از سه ترسیم را به شکل قابل قبول انجام ندادند. کیفیت عملکرد دانشـــجومعلمان در این آزمون، مشابهت بیشتری به نتایج اقدام معلمان دورهٔ ابتدایی داشت. این گروه متشکل از ۴۱ دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی و ۲۷ دانشجوی کارشناسی آموزش ابتدایی بودند.

تحلیل کیفی پاسخ شرکت‌کنندگان به درخواست نهایی آزمون، منجر به تدوین و معرفی شش مقوله به شرح مندرج در جدول ۳ گردید.

جدول ۳. معرفی کد مقوله‌ها در بررسی ویژگی‌های کیفی پاسخ‌ها به پرسش چهارم آزمون

کد	مقوله‌های شناسایی‌شده
۹	عدم اظهارنظر و یا اشاره به مواردی که ارتباطی به محتوای نسبت و تناسب ندارد.
۱	اشارهٔ مستقیم به کلمات «استدلال تناسبی، نسبت، تناسب یا تجانس» و توصیف ماهیت آموزشی و ارائهٔ اهداف
۲	توصیف‌های صحیح در خصوص ماهیت آموزشی بدون اشارهٔ مستقیم به کلمات «نسبت، تناسب یا تجانس»
۷	اشاره به کلمهٔ «تشابه»، همراه با توصیف‌های صحیح، ناقص یا اشتباه
۸	اشاره به کلمهٔ مقیاس همراه با توصیف‌های صحیح، ناقص یا اشتباه
۵	اشاره به کلمات بزرگ‌نمایی، کوچک‌نمایی

به‌منظور تحلیل کمّی مقوله‌های استخراج‌شـــده، فراوانی پاسخ‌ها در قالب تفکیک‌های صورت‌گرفته فوق در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴. فراوانی نوع پاسخ شرکت‌کنندگان به پرسش چهارم آزمون

فراوانی کد مقوله‌ها در پاسخ به سؤال چهارم (مبتنی بر اطلاعات جدول ۳)							
		۹	۱	۲	۷	۸	۵	کل
معلمان مقطع ابتدایی	تعداد	۴۳	۸	۵	۰	۱۶	۳	۷۵
	درصد	٪۵۷/۳	٪۱۰/۷	٪۶/۷	٪۰/۰	٪۲۱/۳	٪۴	٪۱۰۰/۰
معلمان ریاضی متوسطهٔ اول	تعداد	۸	۱۶	۳	۶	۲	۲	۳۷
	درصد	٪۲۱/۶	٪۴۳/۲	٪۸/۱	٪۱۶/۲	٪۵/۴	٪۵/۴	٪۱۰۰/۰
دانشجومعلمان	تعداد	۱۱	۲۶	۶	۸	۶	۱۱	۶۸
	درصد	٪۱۶/۲	٪۳۸/۲	٪۸/۸	٪۱۱/۸	٪۸/۸	٪۱۶/۲	٪۱۰۰/۰
کل	تعداد	۶۲	۵۰	۱۴	۱۴	۲۴	۱۶	۱۸۰
	درصد	٪۳۴/۴	٪۲۷/۸	٪۷/۸	٪۷/۸	٪۱۳/۳	٪۸/۹	٪۱۰۰/۰

همهٔ مشـــارکت‌کنندگان در جلسه آزمون نخست، حاضر بودند و پاســـخ‌برگ خود را تحویل دادند. احتساب فراوانی عدم اظهارنظرها در رابطه با پرسش چهارم، در دسته فراوانی موارد پاسخ اشتباه صورت گرفته است. ٪۵۷/۳ معلمان مقطع ابتدایی، ٪۲۱/۶ معلمان ریاضی و ٪۱۶/۲ دانشجویان و به عبارت دیگر ٪۳۴/۴ مشارکت‌کنندگان قادر به تشخیص صحیح محتوای درسی مرتبط نبودند و یا اظهارنظری نکردند. بالغ بر ٪۱۰ معلمان مدارس ابتدایی، ٪۴۳ معلمان متوســـطهٔ اول و ٪۳۸ دانشـــجومعلمان با تشخیص صحیح و طرح واژه‌های «نســـبت و تناســـب» به مواردی در خصوص ماهیت آموزشـــی آن پرداختند. تشخیص‌ها با ذکر عنوان «تجانس» نیز در این مقوله گردآمده است.

یادآوری می‌شود در هندسهٔ اقلیدسی، تجانس یکنواخت یا تجانس همسانگرد[۸۸] تبدیلی خطی است که اشـــکال را در تمام جهات به یک مقیاس بزرگ یا کوچک می‌کند. در حالت کلی‌تر، ضریب تجانس در جهات گوناگون می‌تواند متفاوت باشـــد. در این صورت به آن تجانس غیریکنواخت یا ناهمســـانگرد می‌گویند.

از سوی دیگر ٪۷/۸ شرکت‌کنندگان علی‌رغم ارائهٔ توضیح و توصیف قابل قبولی از ماهیت آموزشی این محتوا و طرح مواردی دربارهٔ اهداف این تکالیف، اشاره‌ای به هر یک از کلید واژه‌های نسبت، تناسب، مقیاس و یا تجانس نداشتند.

نکتهٔ قابل‌توجه اســـتفاده نکردن از واژه تشابه توسط معلمان دوره ابتدایی است. هیچ‌یک از معلمان دبستان به این واژه اشاره نکرده است. درحالی‌که ٪۱۶/۲ معلمان متوسطهٔ اول و ٪۱۱/۸ دانشجومعلمان

با اشاره به این واژه به اظهارنظرهایی قابل‌قبول یا ناقص در خصوص ارائه و طرح این ترسیم‌ها و ماهیت آموزشی آن پرداختند.

کد مقولهٔ هشت به تشخیص‌های صحیح فرد از محتوای نسبت و نیز اشاره به واژهٔ مقیاس توأم با اشاره به مواردی خارج از محتوای معرف در کتب درسی (خلط چند مبحث منفک از هم) دارد که محقق را در برداشت متقن و بازتاب صریح برآیند تفکر پاسخ‌دهنده با مشکلاتی مواجه کرد. این امر مانع از تجمیع فراوانی این دسته افراد در بین کد مقوله‌های شماره‌های یک یا نه شد.

در توصیف نتایج کد مقولهٔ شمارهٔ پنج، بر اساس فراوانی‌ها ۴٪ معلمان دبستان، ۵/۴٪ معلمان متوسطهٔ اول و ۱۶/۲٪ دانشجومعلمان از دو واژهٔ بزرگ‌نمایی ـ کوچک‌نمایی برای اشاره به محتوای مورد مطالبه استفاده کرده‌اند. این افراد مشتمل بر ۸/۹٪ شرکت‌کنندگان هستند که در تشریح ماهیت و اهداف آموزشی نیز کمترین اظهارنظرها را ارائه کرده‌اند.

مطالبه‌های کیفی استدلال تناسبی در این آزمون به ساخت مفهوم‌مدار ساختارهای ضربی اشاره دارد از این رو با توجه به در دسترس نبودن ابزار اندازه‌گیری در شرایط محیطی اجرای آزمون، توصیه برای استفاده نکردن از هرگونه ابزار اندازه‌گیری اعلام نشد تا اشاره و حساسیتی ایجاد نشود. درعین‌حال درخواست شفاهی بر تقریب نسبتاً دقیق در ترسیم‌ها ارائه شد به‌گونه‌ای که خط‌مشی‌ها در ترسیم و در ارتباط با پرسش پایانی آزمون تحت‌الشعاع قرار نگیرد. تحلیل داده‌های حاصل از ارزیابی، سطح عملکرد مناسبی را از سوی معلمان مقطع ابتدایی شرکت‌کننده در آزمون نشان نمی‌دهد.

در پاسخ به سه درخواستِ نخست ارزیابی، ترسیم‌هایی مبتنی بر تمرکز بر یکی از ابعاد مشاهده می‌شود. در این روندِ پاسخ‌گویی، به علت استفاده‌نکردن از ابزار اندازه‌گیری، تشخیص رابطهٔ (نسبت) میان ابعاد بر مشاهدهٔ بصری متکی است. وقتی مقادیر صریح عددی در فعالیت گنجانده نمی‌شود و استفاده از ابزار در عمل اتفاق نمی‌افتد تکلیف در حوزهٔ کیفی قرار می‌گیرد. شبکهٔ ترسیم‌شده در هر سه تکلیف آزمون، وسیله‌ای حمایتی در ترسیم محسوب می‌شود که در پژوهش‌ها برای دانش‌آموزان به‌کار گرفته می‌شود. به‌منظور ترسیم، شرکت‌کننده رابطهٔ میان ابعاد را ملاحظه و با توجه به راهنمایی‌های مصوّر تکلیف را تکمیل می‌کند.

در میان این مطالبه‌های کیفی، یک ساختار ضربی دو بار بزرگ‌ترکردن وجود داشت (تکلیف شمارهٔ دو). به رغم نقش حمایتی شبکهٔ شمارشی در پس‌زمینهٔ این درخواست برای تشخیص ماهیت تناسبی ترسیم، بخشی از مشارکت‌کنندگان بزرگ‌نمایی را به شکلی صحیح اجرا نکردند.

در بررسی پاسخ به درخواست چهارم، تعبیر مشارکت‌کنندگان از ماهیت آموزشی سه تکلیف فوق می‌تواند مکمل این ارزیابی باشد. پاسخ‌ها به این پرسش با به‌کارگیری تحلیل کیفی و تدوین مقوله‌ها دسته‌بندی شد و نتایج کمّی آن در جدول شمارهٔ ۴ ارائه شد. برداشت و تلقی مشارکت‌کنندگان در پاسخ به این پرسش، در تکمیل بازتاب برآیند تفکر آنان در خصوص مقتضیات توسعهٔ تفکر تناسبی کیفی

فراگیران مؤثر است.

پاسخ ۳۸/۲٪ دانشجومعلمان و ۴۳/۲٪ معلمان متوسطهٔ اول و ۱۰/۷٪ معلمان دبستان به سؤال چهار دقیق بود. بنابراین این شرکت‌کنندگان از جریان مفهوم ارزیابی سؤال‌های اول تا سوم آزمون آگاه بوده‌اند. ۵۷/۳٪ معلمان دبستان در خصوص پیوند بازنمایی‌های ارائه‌شده (بزرگ‌نمایی ـ کوچک‌نمایی و استفاده از صفحهٔ شـــبکه) به محتوای نسبت، تناسب ایده‌ای نداشتند. ملاحظهٔ یافته‌ها توجه به قوت‌های درک معلمان مورد مطالعه را دربارهٔ ارتباط مفاهیم مورد تأکید قرار می‌دهد؛ چرا که برخی از مشارکت‌کنندگان با وجود مشـــاهده و اجرای تقریباً صحیح ســـه تکلیف مذکور، قادر به استنباط و تشخیص ارتباط ابتکار مفهومی موردنظر با محتوای نســـبت و تناســـب نشـــدند. دراین‌باره بالغ بر یک سوم مشارکت‌کنندگان (۳۴/۴٪) پاسخ نداده و یا تکالیف مذکور را در ارتباط با مواردی نظیر آشنایی با عمل ضرب، اندازه‌گیری و تخمین، انتقال، برانگیختن خلاقیت، آموزش تقارن، تصویرســـازی و تجسم، نقشه‌خوانی، الگوبرداری و غیره در نظر گرفتند. تعابیری نظیر «برای ریزشدن در اجزا»، «برای رشد عقلی و درک کودک» و غیره که با مفاهیم نسبت، تناسب و استدلال تناسبی کیفی فاصله دارد.

در ارائهٔ این آمار محقق با وســـواس بیشـــتر، فراوانی اشـــاره‌ها پیرامون ارجاع به کلمات «تشابه» و «مقیاس» از ســـوی هر ســـه گروه، بدون ارائه هیچ توضیح را بازتاب اشـــاره به مفاهیم نسبت، تناسب و استدلال تناسبی احتساب نکرده است و معتقد است این اظهارات به‌ویژه از سوی معلمان دبستان نیازمند بررسی بیشتر است.

مشابه این مطلب ۸/۹٪ مشارکت‌کنندگان نیز دو واژه بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایی را مورد اشاره قرار دادند. لیکن به‌رغم آنکه این دو، زمینه‌سازهای مفهوم تناسب هستند، بدون شرح فرایند ترسیم به مقیاس از سوی آنان، این اشاره تصویری شفاف از مفاهیم نسبت و تناسب ارائه نمی‌کند.

در انجام تکالیف ترسیم کشتی و کامیون، اشاره مکتوبی به نسبت‌های مشمول، نمایش کسری آن‌ها و یا عباراتی که می‌توانســـت به رابطهٔ میان کمّیت طول‌ها در هر یک از این شـــکل‌ها اشاره داشته باشد مشاهده نشد.

به دلیل فقدان پژوهش در ارتباط با بازتاب تفکر پداگوژی معلمان در حوزه اســـتدلال تناســـبی در کشور و به منظوراحراز تأیید یا توجیه برخی عملکردهای شرکت‌کنندگان در پژوهش و نیز بررسی تأثیر این ارزیابی بر نگرش آنان، پس از اتمام اجرای مجموع شش آزمون مطالعه، با انتخاب تعداد محدودی از مشارکت‌کنندگان برای انجام مصاحبه‌ای نیمه‌ساختاریافته از آن‌ها دعوت به عمل آمد. از میان داوطلبان، با پنج معلم از هریک از دو دوره و چهار نفر از دانشجومعلمان مصاحبه انجام شد. با توجه به ابعاد مطالعه، بحث در خصوص اســـتدلال تناسبی کیفی بخش کوچکی از موضوع مصاحبه بود. مصاحبه با معلمان به صورت انفرادی انجام شد. مصاحبه با دانشجومعلمان در گروه‌های دو نفره انجام شد و زمان هر مصاحبه ۴۰ تا ۶۰ دقیقه بود.

● نگرش شرکت‌کنندگان در مصاحبه در خصوص استلزامات توسعهٔ استدلال تناسبی کیفی دانش‌آموزان

به دلیل عدم رضایت اغلب شـــرکت‌کنندگان، ضبط صدای گفتگو انجام نشد. بررسی یادداشت‌های مکتوب مصاحبه با ۱۴ شـــرکت‌کننده دربارهٔ موضوع آزمون نخســـت، منجربه شناســـایی، کد گذاری و استخراج سه مقولهٔ کلی گردید که در جدول ۵ همراه با فراوانی مقوله‌ها ارائه شده است. دو نفر از معلمان با اشاره به نحوه طرح تکالیف دراین آزمون، ابراز کردند که ارائه نکردن اعداد برایشان این ابهام را ایجاد کرده بود که باید به چه سؤالی یا چگونه پاسخ دهند.

جدول ۵. فراوانی مقوله‌های مرتبط با نگرش شرکت‌کنندگان در مورد تکالیف آزمون نخست

مقوله‌های محوری	فراوانی	درصد
محتوای آزمون مربوط به دورهٔ دوم دبستان است.	۸	۵۷
تجربهٔ انجام چنین فعالیتی را در ساعت ریاضی ندارم.	۱۳	۹۳
این یک فعالیت آموزشی جنبی محسوب می‌شود.	۱۰	۷۱

■ بحث و نتیجه‌گیری ■

در بخش نخست آزمون، در سه تکلیف، از دریچهٔ ترسیم به مقیاس به دو مفهوم بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایی پرداخته شـــد. این مفاهیم پیش‌درآمدهایی به توسعهٔ تفکر تناســـبی هستند. بر اســـاس نتایج، بیش از یک‌چهارم معلمان دورهٔ ابتدایی و حدود یک‌چهارم دانشجومعلمان هیچ‌کدام از سه ترسیم را به درستی انجام ندادند. با احتســـاب این آمار، بالغ بر نیمـــی از معلمان دورهٔ ابتدایـــی (۵۴/۷٪) و نزدیک به نیمی از دانشـــجومعلمان (۴۷٪) حداکثر یک ترســـیم صحیح داشتند. با وجود ترسیم شبکهٔ حمایت‌کننده درپس‌زمینه، به استناد نتایج، به نظر می‌رسد ضعف در تشـــخیص روابط میان کمّیت‌ها (با مقایسهٔ آن‌ها با استفاده از یک خارج قسمت در یک سبک کیفی) یک مانع روان‌شناختی در ایجاد روابطی (ضربی) است که نسبت خوانده می‌شـــود. دراین‌باره باید در نظر داشـــت که به عقیدهٔ رویز لدسما (۲۰۱۱) بیشـــتر کودکان در آغاز پایهٔ ششم از ترسیم به مقیاس، زمانی که بخشی از ترسیم از قبل صورت گرفته اســـت، آگاه‌اند. وی این شناخت را به نفوذ قانون بستار[۸۹]، که

پیاژه بدان اشـــاره کرده است، نسبت می‌دهد. در بررســـی پاسخ به پرسش دربارهٔ ماهیت آموزشـــی تکالیف ارائه‌شـــده، برخی از واژه و تعبیرهای به‌کار گرفته شـــده فاصلهٔ بسیاری با مفاهیم نسبت، تناسب و استدلال تناسبی (کیفی ـ کمّی) داشتند. از نتایج بخش نخســـت ارزیابی می‌توان به نزدیکی شیوهٔ عملکرد دانشجومعلمان و معلمان دورهٔ ابتدایی اشـــاره کرد که تقریباً نیمی از هریک از این دو گروه عملکرد موفقی داشتند (دست‌کم دو ترسیم صحیح). معلمان متوسطهٔ اول در پاسخ‌گویی به سه ترسیم عملکرد بهتری داشتند. ۸۱ ٪ معلمان متوسطهٔ اول دست‌کم دو ترسیم صحیح داشـــتند. کارلســـون و بلوم[۹۰] (۲۰۰۵) معتقدند که دسترسی به دانش قابل اســـتفاده ریاضی در لحظهٔ مناسب، در طول هریک از مراحل حل مسئله، وابسته به غنا و ارتباط دانش مفهومی افراد اســـت. از سوی دیگر، هیل و همکارانش (۲۰۰۷) ابراز می‌کنند صرفاً دانش تجربهٔ تدریس ریاضیات به دانش‌آموزان کافی نیســـت و براهمیت توسعه دانش پداگوژیک محتوا تاکید می کنند.

نحوهٔ تأثیرگذاری ادراک معلمان بر تفســـیر آن‌ها در خصوص استدلال تناسبی کیفی در پاســـخ به درخواست چهارم قابل بررســـی است. در پاسخ به این پرسش، بیشترین تعابیر صحیح به ترتیب از سوی معلمان متوسطه، دانشجومعلمان و سپس معلمان ابتدایی مشاهده شد. بیش از نیمی از معلمان دورهٔ ابتدایی با وجود مشاهدهٔ سه تکلیف ازاستدلال تناسبی کیفی، از جمله درخواست صریح ترسیم به مقیاس در تکلیف شـــمارهٔ دو، قادر به استنباط و تشخیص منابع مفهومی (ابتکارهای مفهومی موردنظر) برای تدریس در حوزه نسبت و تناسب نشدند. ۳۴/۴ ٪ مشارکت‌کنندگان در پاسخ به پرسش آزمون (درخواست چهارم) اظهارنظر نکردند یا به ایده‌هایی نظیر ارزیابی هوش، تجســـم فضایی، سنجش میزان تمرکز و به یادسپاری الگوها و غیره اشاره کردند.

به این ترتیب، ایدهٔ به‌کارگیری این ســـه بازنمایی در رابطه با محتوای نسبت و تناســـب به ذهن یک‌سوم از مشارکت‌کنندگان خطور نکرد. تجسم‌پردازی ضعیف و موفق نبودن در ترســـیم اشکال و شکســـت در شرح فرایند استدلال تناسبی نشان از ضعف آگاهی و آماده نبودن برای مدیریت آموزش روند توســـعهٔ تفکر تناســـبی است. گویا در ذهن این بخش از مشارکت‌کنندگان، پیوند به‌کارگیری بازنمایی‌های هندسی (تشابهات فضایی) با مفاهیم حسابی از قدرت لازم برخوردار نیست.

با یکپارچه‌ســـازی نتایج حاصل از تحلیل اطلاعات جمع‌آوری‌شـــده از آزمون و مصاحبه به نظر می‌رســـد مشـــارکت‌کنندگان در این پژوهش، در مفهوم‌پردازی

محتوای نسبت و تناسب در تدریس، کمتر به استفاده از بازنمایی‌های تصویری ـ هندسی می‌اندیشند. تصور ارتباط هر آنچه به دست‌ورزی با اشکال سروکار دارد با دانش موضوعی و محتوایی هندسه باید تعدیل شود و التفات اندک به ابتکارعمل‌های مفهومی تصویری مرتبط با دانش موضوعی نسبت و تناسب اصلاح و بهبود یابد. فراهم‌ساختن فرصت تفکر تأملی معلمان برای بازشناسی ماهیت و کارکرد متنوع بازنمایی‌ها و تمرکززدایی از بکارگیری بازنمایی‌های نمادین مورد تأکید است. این فرصت با تدوین طرح‌های تعلیمی و غنی‌سازی برنامه‌های توسعهٔ حرفه‌ای فراهم می‌شود. به نظر می‌رسد معلمان بایستی بر مفاهیم خود در ارتباط با کارکرد بازنمایی‌ها در راهبردهای آموزشی تأمل کنند. این تأمل احساس نیاز به توسعهٔ منابع و ابتکار عمل‌های مفهومی را در پی دارد. در خصوص دانشجومعلمان به نظر می‌رسد که کیفیت آموزش نیاز به دریافت این دانش را برآورده نساخته است.

در بررسی پرسش مطرح‌شده در بخش پایانی آزمون، صرف‌نظر از پاسخ‌های سفید مشارکت‌کنندگان، اشاره معلمان دورهٔ ابتدایی و متوسطهٔ اول (معلمان حین خدمت) به واژه‌های بزرگ‌نمایی و کوچک نمایی بسیار اندک بود. از این رو می‌توان استنباط کرد که ارتباط میان موضوعات بزرگ‌نمایی ـ کوچک‌نمایی و محتوای نسبت و تناسب به ذهن آنان خطور نکرده است. استفاده از این نوع تکالیف به عنوان ابزارهایی برای یادگیری، به‌کارگیری در کلاس درس و برای سنجش اطلاعات دانش‌آموز، در واقع فهرستی از ابزار ایجاد درک به شیوه‌ای نظام‌مند است که می‌تواند پیش از نمادپردازی سنتی رایج برای یک تناسب استفاده شود. تلاش‌های پژوهشی رویز لدسما (۲۰۱۳)، از طراحی فعالیت‌های تعلیمی برای ساخت و ایجاد مفهوم تناسب (به روش کیفی) و عملکرد موفق در توسعهٔ تفکر تناسبی کیفی توسط نرم‌افزارهای محاسباتی تعاملی خبر می‌دهد. لیکن در کتب آموزشیِ ایران تفکر تناسبی کیفی به شکل منسجم و شفاف طرح و مطالبه نمی‌شود. این در حالی است که با توجه به جایگاه دست‌ورزی و بازنمایی تصویری ـ تجسمی (ادراک بصری)، در مفهوم‌پردازی استدلال تناسبی، این رفتار در کیفیت توسعهٔ آن اثرگذار است. مشخصهٔ این توسعه نیافتگی در کیفیت انجام بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایی تصاویر ساده، ازسوی دانش‌آموزان، پایه‌های ابتدایی و پیش از ورود به پایه‌های میانی، که بر یک بعد از شکل تمرکز دارند، قابل مشاهده است. در این خصوص، رویز لدسما (۲۰۱۰ به نقل از پیاژه، ۱۹۷۸) بیان می‌کند برای اینکه دانش‌آموز

تفکر تناسبی کیفی خود را توسعه دهد لزوماً بایستی با مفاهیم بزرگ‌نمایی و کوچک‌نمایی آغاز کند و در ادامه، ایدهٔ ترسیم به مقیاس شکل گیرد.

در ارائهٔ یک طرح تعلیمی درباره توسعهٔ تفکر تناسبیِ کیفی، ضرورت به‌کارگیری سبک‌های خاص بازنمایی و زبان رایج و درعین‌حال تکنیکی از سوی معلم، برای انتقال مفاهیم و درعین‌حال مطالبه از دانش‌آموز، وجود دارد. دراین‌باره، رویز لدسما و والدمورس آلوارز (۲۰۰۴) به اقدام برای طرح تکالیفی اشاره کرده‌اند که دانش‌آموز، با توسل به ادراکات کیفی[۹۱] بدون درنظرگرفتن کمّیت‌های آشکار مرتبط با روابط تناسبی، توجیهاتی برای پاسخ خود ارائه کند.

بنابراین، ارائهٔ دست‌ورزی و بازنمایی‌های مرتبط با ادراک بصری در مفهوم‌پردازی کیفی این محتوا پراهمیت است و ضرورت دقت به پیش‌درآمدها و استلزام‌های توسعهٔ استدلال تناسبی در کودکان از سوی معلمان و تعمیق بررسی آن به‌دست پژوهشگران مورد تأکید است.

به‌منظور هم‌گرایی ایده‌ها و آرمان‌های ترسیمی از سوی آموزشگران ریاضی دربارهٔ اهداف آموزشی هر محتوا از کتب درسی، ضرورت دارد که معلمان را به عنوان یکی از عاملان واقعی تغییر دریابیم و نقش آنان را در کیفیت آموزشی بیشتر مورد توجه قرار دهیم.

این تلاش بخشی از یک مطالعه گسترده با هدف ارزیابی منسجم برآیند تفکر پداگوژیکی معلم و دانشجومعلمان در خصوص محتوای نسبت و تناسب است. چشم‌انداز این امر تدوین یک طرح تعلیمی راهنما در خصوص محتوای استدلال تناسبی است. این طرح می‌تواند با غنابخشیدن به گفتمان آموزشگران ، برنامه‌ریزان توسعه حرفه‌ای معلمان و طراحان برنامه‌های آموزشی مراکز تربیت‌معلم در خصوص شیوه‌های حمایت آموزشی از معلمان در امر توسعهٔ استدلال تناسبی فراگیران تبیین شود. انتظار می‌رود این اقدام به ارائه چارچوبی پیشنهادی و نه تجویزی بینجامد. این ارائه شأن معلمان را در قضاوت فکورانه و نقادانه نسبت به استفاده از یافته‌های این مطالعه به رسمیت می شناسد.

منابع
REFERENCES

■ مرتاضی مهربانی، نرگس. (۱۳۹۵). آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌های عمیق. *فصلنامهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*،۳۵(۵۸)، ۱۳۵-۱۵۷.

■ Artut, P. D., & Pelen, M. S. (2015). 6th grade students' solution strategies on proportional reasoning problems. *Journal of Procedia-Social and Behavioral Sciences, 197*(11), 113-119.

■ Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

■ Baxter, G. P., & Junker, B. A. (2001. April). *Designing cognitive-developmental assessments: A case study in proportional reasoning* [Paper presentation]. The Annual meeting of the National Council for Measurement in Education, Seattle. Washington. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.452.7801&rep=rep1&type=pdf

■ Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education (pre-and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes).* sense publishers

■ Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent Multidimensional problem solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1) 45–76.

■ Clarkson, R. (1990). Ratio: Enlargement. In D. C. Johnson (Ed.), *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching* (pp.191-226). NFER-Nelson.

■ Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics*(pp. 291-330). State University of New York Press.

■ Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grade mathematics* (pp. 159- 178). Macmillan Publishing Company.

■ Figueras, O., Filloy, E., & Valdemoros, M. (1987). Some difficulties which obscure the appropriation of the fraction concept. In J. C. Bergeron., N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Psychology of Mathematics Education, PME-X1* (pp 366-372). ERIC.

■ Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education* (3rd ed). New York: Teachers College Press. https://doi.org/10.1177%2F002248719104200507

■ Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Nfer Nelson.

■ Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (vol. 2. pp. 198-219). Routledge

■ Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education, 39*(4), 372 - 400. Doi:10.5951/jresematheduc.39.4.0372

■ Hill, H. C., Sleep, L. Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Jr. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Information Age Publishing.

■ Hines, E., & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105.

■ Howe, C., T. Nunes, & P. Bryant. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 391-417.

■ Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219–233. https://doi.org/10.1007/BF00410539.

■ Lachance, A., & Confrey, J. (2001). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(4), 503-526.
■ Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-121). New York Press.
■ Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education, 24*(1), 41-61.
■ Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essentiol content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003008057
■ Lim-Teo, S. K., Chua, K. G., Cheang, W. K., & Yeo, J. K. (2007). The development of diploma in education student teachers' mathematics pedagogical content knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(2), 237-261.
■ Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.
■ Lobato, J., Ellis, A., & Zbiek, R. M. (2010). Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8. In H. Kepner (Ed.), *Developing Essential Understanding* (pp 11-24). NCTM Publication.
■ National Council of Teachers of Mathematics. (2013). *Research Brief: Teaching Ratio and Proportion in the Middle Grades*. NCTM.
■ Parish, L. (2010). Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio. In L.Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education* (pp. 469-476). MERGA.
■ Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149-169.
■ Riley, K. R. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 2010): Optimizing Student Understanding in Mathematics* (pp. 1055-1061). The ohio State University.
■ Ruiz Ledesma, E. F. (2010). Using an interactive computer system to support the task of building the notions of ratio and proportion. *Creative Education, 1*(02), 115-120
■ Ruiz Ledesma, E. F. (2011). Primary and secondary teachers' knowledge, interpretation, and approaches to students errors about ratio and proportion topics. *Creative Education, 2*(03), 264-269. Doi:10.4236/ce.2011.23035
■ Ruiz Ledesma, E. F. (2013). Activities to Learn the Proportion Concept Using Technology. *International Review of Social Sciences and Humanities, 5*(1), 175-184.
■ Ruiz Ledesma, E. F., & Valdemoros Alvarez, M. E. (2002). Concepts of Ratio and Proportion in Basic Level Students: Case Study. In D. S. Mewborn., P. Sztajn., D. Y. White., H. Wiegel., R. L. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1651-1657). ERIC Publications.
■ Ruiz Ledesma, E. F., & Valdemoros Alvarez, M. E. (2004). *Connection between qualitative and quantitative thinking about Proportion: the case of Paulina* [Paper presentation] The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. https://www.researchgate.net/publication/237292736
■ Ruiz Ledesma, E. F., & Lupiáñez Gómez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles to teaching and learning the topics of ratio and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of research in Educatinal Psychology, 7*(1) 396-424.
■ Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.
■ Smith III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In G .Litwiller., G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 yearbook* (pp. 3-17). National Council of Teachers of Mathematics.
■ Son, J. W. (2010). Ratio and proportion: How prospective teachers respond to student errors in similar rectangles. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 243-251). The Ohio State University.

■ Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.
■ Spanoudi, A., & Misailidou, C. (2016). *Teachers encountering challenging word problems: How do they solve them?* [Paper presentation]. The 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Szeged, Hungary. https://scholar.google.gr/scholar?oi=bibs&cluster=7476052257962473448&btnI=1&hl=el
■ Streefland, L. (1984a). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards... a theory). *Educational studies in Mathematics, 15*(3), 327-348.
■ Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. Part II. (towards... a theory). *Educational studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.
■ Thomas, M. (2002). Research on mathematical proof. *Journal of intelligence, learning and understanding in mathematics, 12*(5) 179- 204.
■ Thurston, A., Grant, G., & Topping, K. (2006). Constructing Understanding in Primary Science: An exploration of process and outcomes. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 4*(1),1-34
■ Tourniaire, F. (1984). *Proportional Reasoning in Grades Three, Four and Five* [Doctoral dissertation, California University]. ProQuest Dissertations and Theses Global.
■ Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.
■ Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

پی‌نوشت‌ها

1. lamon
2. relative thinking
3. multiplicative thinking
4. cognitive function
5. additive and multiplicative structures
6. qualitatively & logical way
7. Streefland
8. Ruiz Ledesma &Valdemoros
9. Clarkson
10. Ruiz Ledesma & Lupiáñez Gómez
11. Son
12. additive strategy
13. Thurston
14. Figueras
15. Grossman
16. واژه و اصطلاحاتی که در شرایط خاص حرفه‌ای به‌کار می‌رود.
17. Hill
18. Vergnaud
19. NCTM
20. Thompson
21. Lachance & Confrey
22. additive comparison
23. composed unit
24. iterated (repeated)
25. partitioned (broken into equal-size parts)
26. Lo & Watanabe
27. Smith
28. multiplicative construct
29. splitting
30. sharing
31. folding
32. magnifying
33. primitive notions
34. Piajet & Inhelder
35. Artut & Pelen
36. didactical resources
37. perception patterns
38. Tourniaire & Pulos
39. Cramer
40. qualitative prediction & comparison problems
41. Thomas
42. linguistic recognition
43. Freudenthal
44. intutively
45. explicitly
46. visualization
47. enlargement- reduction
48. qualitative identity
49. quantitative conservation
50. the intervening factors
51. a scale drawing
52. perception
53. observation
54. linguistic expressions
55. verbal categories
56. ordering
57. i intensive quantifications
58. emeasurement
59. confronting
60. the rule of three
61. realistic mathematics education
62. visual discrimination
63. operator
64. psychological obstacle
65. focusing process
66. drawing to scale
67. meager qualitative understanding
68. Parish
69. squared paper
70. Baxter & Junker
71. Hart
72. Karplus
73. Pitta-Pantazi & Christou
74. Riley
75. Lobato
76. Spanoudi & Misailidou
77. Ben-Chaim
78. Howe, Nunes & Bryant
79. scholastic education
80. interactive activities
81. Shulman
82. Ball
83. Hines & McMahon
84. Lim
85. content validity
86. comparison activities
87. similarity relationships
88. isotropic homogeneity
89. the law of closure
90. Carlson & Bloom
91. qualitative appreciations