Iran. J. Insur. Res., 12(3): 225-238, Summer 2023, Serial #45

Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)

Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Insurance Research Center (IRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

# Optimal investment portfolio for a dynamic life insurance product using stochastic control approach

**S. Vahabi, A.T. Payandeh Najafabadi***

*Department of Actuarial Science, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Behshti University, Tehran, Iran*

**ARTICLE INFO**

***Article History:***
Received 25 September 2022
Revised 25 January 2023
Accepted 25 February 2023

***Keywords:***
*CRRA utility function*
*Kou model*
*Mortality function*
*Pure endowment*
*Stochastic optimal control*

*Corresponding Author:
Email: *amirtpayandeh@sbu.ac.ir*
Phone: +9821 29902894
ORCID: 0000-0001-8894-0803

**ABSTRACT**

**BACKGROUND AND OBJECTIVES:** In this paper, a life insurance product is designed with the help of stochastic control approach. These products are defined in such a way that in exchange for receiving an amount as insurance premium that is paid at specified times, the insurer undertakes to pay insurance benefits when the insured is alive at the end of the contract.

**METHODS:** This research is an analytical study in terms of developmental-applicative purpose. In the literature of life insurance, there are various products that are not the same in the type of benefit payment and the timing of their implementation. Among these examples, term life insurance, term life insurance, and mixed life insurance can be mentioned. Traditional insurance products with fixed benefits are quickly losing their appeal due to inflationary markets. In this research, it is focused on the design of a life insurance product on the condition of life, which is connected to the investment markets. Stochastic differential calculus models have been used to simulate capital markets assets. All the numerical results of this research have been calculated with the help of Matlab and Maple software.

**FINDINGS:** To achieve the best choice of investment type, with the help of stochastic optimal control tool, the best investment strategy was calculated for a person who has the CRRA utility function and buys this product, so that the most benefits are paid at the end of the contract. To invest in this contract, modeling was done in a non-risky market such as a bank and a risky market such as stocks, which have price jumps. In addition, to model the risk asset, the Merton model, which is a representative of the models with finite activity, was used, and at the end, a comparison was made for several mortality functions.

**CONCLUSION:** The main purpose of this article is investment for the insured who bought this product. In the product designed in this article, the insurer undertakes to pay the premiums received at a guaranteed rate at the end of the contract. Also, the insured will share the profit from the investment based on a certain percentage that is determined at the beginning of each year. The simulations show that the behavior of the optimal consumption rate is the same as the Merton model with the approach that the behavior of full price jumps is transparent in the optimal consumption rate designed in this article. Investment results for several mortality functions are reported in the Numerical Results section.

DOI: 10.22056/ijir.2023.03.05

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دوره ۱۲، شماره ۳، تابستان ۱۴۰۲، شماره پیاپی ۴۵، ص ۲۲۵-۲۳۸

**نشریه علمی پژوهشنامه بیمه**

**سایت نشریه:** https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

**مقاله علمی**

# بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای یک محصول بیمه زندگی پویا با استفاده از ابزارهای کنترل تصادفی

**سامان وهابی، امیر تیمور پاینده نجف آبادی***

*گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران*

**اطلاعات مقاله**

***تاریخ های مقاله:***

تاریخ دریافت: ۰۳ مهر ۱۴۰۱

تاریخ داوری: ۰۵ بهمن ۱۴۰۱

تاریخ پذیرش: ۰۶ اسفند ۱۴۰۱

***کلمات کلیدی:***

*بیمه زندگی به شرط حیات*

*تابع مطلوبیت CRRA*

*تابع مرگ و میر*

*کنترل تصادفی بهینه*

*مدل کو*

***نویسنده مسئول:**

**ایمیل:** *amirtpayandeh@sbu.ac.ir*

**تلفن:** ۲۹۹۰۲۸۹۴ ۹۸۲۱+

ORCID: 0000-0001-8894-0803

**چکیده:**

**پیشینه و اهداف:** در این مقاله ما به کمک رویکرد کنترل تصادفی، یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به‌عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه‌گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند.

**روش‌شناسی:** این پژوهش از نظر هدف توسعه‌ای- کاربردی از نوع مطالعات تحلیلی محسوب می‌شود. در ادبیات بیمه‌های زندگی محصولات متنوعی وجود دارد که در نحوه پرداخت مزایا و زمان اجرا با هم متفاوت هستند. از این محصولات می‌توان به بیمه‌های عمر زمانی، بیمه‌های عمر به شرط حیات و بیمه‌های عمر مختلط اجاره نمود. محصولات بیمه‌ای سنتی که دارای مزایای ثابتی هستند، به‌دلیل وجود بازارهای تورمی به‌سرعت جذابیت خود را از دست می‌دهند. در این مقاله به طراحی یک محصول بیمه زندگی به شرط حیات پرداختیم که متصل به بازارهای سرمایه‌گذاری است. در این مقاله برای شبیه‌سازی دارایی‌های بازارهای سرمایه از مدل‌های حساب دیفرانسیل تصادفی استفاده شده است. تمامی نتایج عددی این پژوهش به‌کمک نرم افزار Matlab و Maple انجام شده است.

**یافته‌ها:** به‌منظور بهترین انتخاب سرمایه‌گذاری، به‌کمک ابزار کنترل بهینه تصادفی بهترین استراتژی سرمایه گذاری برای شخصی که دارای تابع مطلوبیت CRRA است و این محصول را خریداری می‌کند، محاسبه شده که تا بیشترین مزایا در پایان قرارداد پرداخت شود. برای سرمایه‌گذاری این قرارداد در بازاری غیرریسکی مانند بانک و بازاری ریسکی مانند سهام که دارای پرش‌های در قیمت بوده، مدل‌سازی انجام شده است. همچنین برای مدل‌کردن دارایی ریسکی از مدل کو که به‌عنوان نماینده‌ای از مدل‌های با فعالیت متناهی است، استفاده شده و در انتها برای چند تابع مرگ‌ومیر مقایسه انجام شده است.

**نتیجه‌گیری:** اصلی‌ترین هدف این مقاله سرمایه گذاری برای بیمه‌شده‌هایی است که این محصول را خریداری کرده‌اند. در محصولی که در این مقاله طراحی شده است، بیمه‌گر متعهد می‌شود که حق بیمه‌های دریافتی را با نرخ تضمینی در انتهای قرارداد پرداخت کند. همچنین از سود حاصل از سرمایه‌گذاری به درصدی مشخص که در ابتدای هر سال معین می‌شود، بیمه‌شده را سهیم نماید. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که رفتار نرخ مصرف بهینه همانند مدل مرتون می‌باشد، با این تفاوت که در نرخ مصرف بهینه طراحی‌شده در این مقاله رفتار پرش‌های قیمت کامل مشهود است. نتایج سرمایه‌گذاری برای چندین تابع مرگ‌ومیر در بخش نتایج عددی گزارش شده است.

DOI: 10.22056/ijir.2023.03.05

***توجه: مدت زمان بحث و انتقاد برای این مقاله تا ۱ اکتبر ۲۰۲۳ در وب‌سایت IJIR در «نمایش مقاله» باز می‌باشد.***

## مقدمه

در ادبیات بیمه‌های زندگی محصولات متنوعی وجود دارد که در نحوه پرداخت مزایا و زمان اجرا با هم متفاوت هستند. از این محصولات می‌توان به بیمه‌های عمر زمانی، بیمه‌های عمر به شرط حیات و بیمه‌های عمر مختلط اشاره نمود. در این مقاله ما به‌کمک رویکرد کنترل تصادفی، یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به‌عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه‌گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند. در محصولی که در این مقاله طراحی شده است، علاوه بر اینکه بیمه‌گر متعهد می‌شود که حق بیمه‌های دریافتی را با یک نرخ تضمینی در انتهای قرارداد پرداخت کند، از سود حاصل از سرمایه‌گذاری که درصدی مشخص و در ابتدای هر سال معین می‌شود، پرداخت نماید. اصلی‌ترین هدف این مقاله سرمایه‌گذاری برای بیمه‌شده‌هایی است که این محصول را خریداری کرده‌اند. برای این کار ما پرتفویی از دارایی‌های ریسکی و غیرریسکی تشکیل می‌دهیم و به محاسبه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه می‌پردازیم. ازاین‌رو، از رویکرد کنترل تصادفی بهینه استفاده شده است. به‌طور کلی به‌کمک این رویکرد فرض می‌کنیم دارایی ریسکی دارای دینامیکی تصادفی باشد. در این مقاله از سهام به‌عنوان دارایی ریسکی و پول بانکی به‌عنوان دارایی غیرریسکی برای مدل‌سازی استفاده شده است. اصلی‌ترین فرض این مقاله این است که در رفتار قیمت دارایی ریسکی، پرش‌های از خانواده فرایندهای لوی وجود دارد. به‌طور کلی مدل‌های مالی همراه با پرش را که در تعداد و رفتارشان در پرش با هم متفاوت هستند، می‌توان به دو بخش تقسیم بندی کرد. این مدل‌ها از دسته خانواده فرایندهای لوی هستند. دسته اول این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت نامتناهی هستند. در این مدل‌ها قسمت پرش بیشترین نقش را در این فرایندها دارد و قسمت پخش این فرایندها به‌ندرت رخ می‌دهد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل واریانس-گاما اشاره کرد. دسته دوم این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت متناهی هستند که در ساختارشان هم قسمت پخش و هم قسمت پرش وجود دارد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل پخش و پرش مرتون و یا مدل پخش و پرش کو اشاره کرد. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای ساختار دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم. ازاین‌رو، ساختار کلی مقاله را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

در بخش دوم، پیشینه تحقیق بیان شده است. در بخش سوم، مبانی نظری، معرفی محصول و برخی تعاریف اولیه که در بخش‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم معرفی می‌شود. در بخش چهارم اصلی‌ترین سؤالات این مقاله را بیان شده است. در بخش پنجم کلیات سرمایه‌گذاری پرتفو با رویکرد کنترل بهینه تصادفی مطرح و چند مثال از آن بیان می‌شود. در بخش آخر نتایج عددی و تجزیه‌وتحلیل داده‌های این مقاله به‌کمک نرم افزار Matlab و Maple ارائه می‌شود.

## مبانی نظری پژوهش

این مقاله به معرفی یک محصول بیمه عمر به شرط حیات با رویکرد کنترل بهینه تصادفی می‌پردازد. یک محصول بیمه عمر به شرط حیات، محصولی است که شرکت بیمه متقبل می‌شود که در ازای دریافت حق بیمه معین در بازه زمانی خاص، سرمایه حیات این بیمه‌نامه را در پایان قرارداد بیمه‌نامه به شرطی که بیمه‌شده در حیات باشد، بپردازد. در این محصول حق بیمه‌های دریافتی را با P(t) نمایش می‌دهیم که در زمان‌های مشخصی دریافت می‌شود، همچنین بیمه‌گر متعهد می‌شود که این حق بیمه‌ها را با نرخ تضمین g به بیمه‌شده بازگرداند، به‌علاوه با سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی، وی را از سود حاصل از سرمایه گذاری بهره‌مند سازد. این نرخ مشارکت را با $\tau$ نشان می‌دهیم. زمان سررسید قرارداد را با T و همچنین این دو نرخ تضمین و مشارکت در ابتدای هر سال بروزرسانی می‌شود. در این محصول تمامی مبالغی که برای بیمه‌شده از سود حاصل از سرمایه گذاری جمع‌آوری می‌شود، در حسابی به نام حساب مشتری گردآوری می‌شود که آن را با $C_t^+$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_t^+ = \begin{cases} P & t=0 \\ (1+g)C_{t-1} + \tau\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ & t=1,\dots,T \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن به ازای هر مقدار ثابت $A$، خواهیم داشت $[A]^+ = \max[A,0]$ و همچنین $W_t^{\pi^*,c^*}$ حساب سرمایه‌گذاری بیمه‌شده است که تحت استراتژی بهینه ($\pi^*$) و نرخ مصرف بهینه ($c^*$) نمایش داده شده است. این دو مقدار را در ادامه به‌طور کامل معرفی خواهیم کرد. حساب دیگری که در این قرارداد معرفی شده است، حساب ذخیره نام دارد و آن را با $R_t^+$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_t^+ = \begin{cases} 0 & t=0 \\ W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1} - \tau\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ & t=1,\dots,T \end{cases} \qquad (۲)$$

این حساب به‌گونه‌ای طراحی شده است تا مواقعی که بازار بحرانی باشد پشتوانه‌ای برای بیمه‌گر شود تا از عهده تعهدات خود برآید. در محصول بیمه‌ای به شرط حیات تمامی مزایای بیمه‌نامه در زمان سررسید T پرداخت می‌شود؛ به همین جهت حساب مشتری در زمان سررسید برابر است با:

$$C_T = (1+g)^T C_0 + \tau\sum_{t=1}^{T}\left[W_t^{\pi^*,c^*} - (1+g)C_{t-1}\right]^+ (1+g)^{T-t}. \qquad (۳)$$

در ادامه به جزئیات سرمایه‌گذاری با حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌شده‌ها می‌پردازیم. روش کار به این صورت است که با تشکیل

پرتفویی از دو بازار ریسکی و غیرریسکی، به دنبال محاسبه بهترین استراتژی سرمایه‌گذاری برای بیمه‌گذاران هستیم. برای شروع فرض می‌کنیم مدل‌هایی که از آن‌ها استفاده می‌کنیم همگی در فضای $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$ می‌باشد.

در اینجا به معرفی دارایی غیرریسکی می‌پردازیم. دارایی غیرریسکی دارایی‌ای است که در بازدهی‌اش، ریسکی آن را تهدید نمی‌کند و همواره با نرخ ثابتی در حال رشد است. به‌عنوان مثال، اوراق قرضه و پول بانکی نمونه‌هایی از این دارایی‌ها می‌باشد. در حالت کلی برای مدل‌سازی این دارایی‌ها می‌توان از دینامیک زیر پیروی کرد:

$$\frac{dB(t)}{B(t)}=r(t)dt,\quad B(0)=1, \tag{۴}$$

که با نرخ بهره r همواره رشد می‌کند.

دارایی دیگر پرتفو بیمه‌ای این مقاله، دارایی ریسکی است. دارایی ریسکی آن دسته از دارایی‌هایی هستند که در بازدهی و سود آن‌ها اطمینانی وجود ندارد و شرایط بازار سود یا زیان آن را تعیین می‌کند. در این مقاله ما از سهام به‌عنوان دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم که دارایی دینامیک تصادفی زیر است.

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=\left(\mu(t)+\frac{1}{2}\sigma(t)^2\right)dt+\sigma(t)dZ(t)+ \int_{-\infty}^{\infty}(e^x-1)N(dt,dx),\quad S(0)=S_0, \tag{۵}$$

در رابطه ۵ که یک معادله دیفرانسیل تصادفی است، ضریب dt را ضریب رانش، ضریب dZ را ضریب پخش و Z(t) یک حرکت براونی استاندارد است. فرض ما بر این است که در دینامیک سهام، به‌دلیل نوسانات قیمت، پرش‌هایی در قیمت دارایی وجود دارد و آن را به‌صورت یک عبارت انتگرالی نشان داده‌ایم. در این عبارت x مقدار هر پرش و $N(dt,dx)$ اندازه تصادفی پواسون است.

براساس کتاب Tankov and Cont (2004) هر اندازه تصادفی پواسون دارای یک اندازه تصادفی جبرانی است که آن را $\Pi(\cdot,\cdot)$ نمایش می‌دهیم و به ازای هر تابع اندازه پذیر $\Phi(t,x)$ همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}}\Phi(t,x)N(dt,dx)\right)=\int_{\mathbb{R}}\Phi(t,x)\Pi(t,dx)dt. \tag{۶}$$

در این مقاله فرض بر این است که حرکت براونی و فرایند پرش از هم مستقل‌اند. بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، در قسمت اندازه جبرانی فرایند پواسون، متغیر دیگری به نام متغیر حالت تعریف شده است که به‌صورت $\Pi(t,dx)=\Pi(v_t,dx)$ نمایش داده‌ایم. متغیر حالت درحقیقت بیانگر میزان فعالیت یک کسب‌وکار باشد. به‌عنوان مثال، می‌توان به حجم نقدینگی یک بازار یا میزان حجم معاملات اشاره کرد. این پارامتر را هم می‌توان تصادفی و هم ثابت فرض کرد که در این مقاله آن را ثابت فرض کرده‌ایم. در یک حالت خاص ما اندازه پرش فرایند را نسبتی از متغیر حالت فرض می‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\Pi(v_t,dx)=v_t\Pi(dx). \tag{۷}$$

به‌طور کلی مدل‌های مالی همراه با پرش را که در تعداد و رفتارشان در پرش با هم متفاوت هستند، می‌توان به دو بخش تقسیم بندی کرد. این مدل‌ها از دسته خانواده فرایندهای لوی هستند. دسته اول این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت نامتناهی هستند. در این مدل‌ها قسمت پرش بیشترین نقش را در این فرایندها دارد و قسمت پخش این فرایندها به‌ندرت رخ می‌دهد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل واریانس-گاما اشاره کرد. دسته دوم این مدل‌ها، مدل‌های با فعالیت متناهی هستند که در ساختارشان هم قسمت پخش و هم قسمت پرش وجود دارد. از معروف‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل پخش و پرش مرتون و یا مدل پخش و پرش کو اشاره کرد. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای ساختار دارایی ریسکی استفاده کرده‌ایم. برای مطالعه بیشتر در مورد این مدل‌ها می‌توان به کتاب Tankov and Cont (2004) اشاره نمود.

همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، در این مقاله توزیع پرش‌های فرایند قیمت را از مدل کو استفاده کرده‌ایم. این پرش‌ها دارای تابع چگالی زیر هستند:

$$h_X(x)=p\beta_1e^{-\beta_1x}I_{\{x>0\}}+q\beta_2e^{\beta_2x}I_{\{x<0\}}, \tag{۸}$$

که در آن ضرایب $\beta_1>1,\beta_2>0$ و همچنین $p\in[0,1],\ p+q=1$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر، مدل کو برای پرش‌های مثبت و منفی با احتمال p، دو توزیع نمایی با پارامترهای $\beta_1$ و $\beta_2$ در نظر می‌گیرد. در ادامه برای محاسبه استراتژی و نرخ بهینه که به‌تفصیل به آن خواهیم پرداخت، نیاز به اندازه لوی مدل کو داریم. براساس مقاله Kou (2002) رابطه بین اندازه لوی و تابع چگالی فرایند پرش برابر با $\Pi(dx)=\lambda h_X(x)dx$ می‌باشد.

● تعریف: به تابع حقیقی مقدار و اندازه‌پذیر $\{\pi(t)\}_{t\in[0,T]}$ یک استراتژی پرتفو گوییم، هرگاه:

$$\int_0^T |\pi(t)W_t|^2 dt < \infty, \quad \mathbb{P} \sim a.s. \tag{۹}$$

- به فرایند نامنفی، حقیقی مقدار و اندازه‌پذیر $\{c(t)\}_{t\in[0,T]}$ فرایند مصرف گوییم، هرگاه:

$$\int_0^T c(t)\,dt < \infty, \quad \mathbb{P} \sim a.s. \tag{۱۰}$$

به کمک دو تعریف بالا و با استفاده از دینامیک دو دارایی ریسکی و غیرریسکی، به تعریف فرایند تصادفی ثروت $W^{\pi,c} := \{W_t^{\pi,c}\}_{t\in[0,T]}$ می‌پردازیم. فرم کلی معادله ثروت به‌صورت زیر است.

$$dW_t^{\pi,c} = ((r(t)+\pi(t)(\mu(t)+\frac{1}{2}\sigma(t)^2 - r(t)))W_t^{\pi,c} - c(t))dt \tag{۱۱}$$
$$+P(t)dt + \pi(t)W_t^{\pi,c}\sigma(t)dZ(t) + \pi(t-)W_{t^-}^{\pi,c}\int_{-\infty}^{\infty}(e^x - 1)N(dt,dx),$$

که در آن $W_0^{\pi,c} = P(0)$ می‌باشد که از اولین حق بیمه دریافتی به وجود می‌آید. با توجه به تعریف قابل‌قبولی هر استراتژی، استراتژی $(\pi,c)$ قابل‌قبول است که به ازای هر $t \geq 0$ آنگاه $W_t^{\pi,c} \geq 0$ باشد.

- تعریف: برای اینکه بیشترین سود در این محصول عاید بیمه‌شده شود، نیاز به تعیین رفتار سرمایه‌گذاری آنان داریم. در ادبیات به این تعریف تابع مطلوبیت گویند. هر یک از افراد بنا به شرایط و خصوصیات شخصی در پذیرش ریسک‌های موجود، تابع مطلوبیت جداگانه‌ای دارند. در این تعریف ما دو تابع مطلوبیت CRRA را بیان می‌کنیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \gamma \neq 1, \gamma > 0, \\ \log(x) & \gamma = 1, \end{cases} \tag{۱۲}$$

که در آن $\gamma$ ضریب ریسک‌گریزی افراد معرفی می‌شود. در ادامه به طراحی محصول بیمه عمر به شرط حیات متصل به بازارهای سرمایه‌گذاری می‌پردازیم. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، در محصول بیمه عمر به شرط حیات، شرط حیات بیمه‌شده در پایان قرارداد یکی از شروط اصلی اجرای قرارداد است؛ ازاین‌رو، باید برای سن بیمه‌شده توزیع احتمال در نظر بگیریم. با بهره‌گیری از کتاب Gerber (1997) تابع بقا $\bar{F}(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\tau$ طول عمر آتی یک شخص باشد، در این صورت احتمال اینکه این شخص تا t سال آینده زنده باشد برابر است با:

$$\bar{F}(t) = P(\tau \geq t) \tag{۱۳}$$

از طرف دیگر این احتمال بقا را می‌توان از مفهوم نیروی مرگ‌ومیر به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{P(t \leq \tau < t+\delta t \mid \tau \geq t)}{\delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \tag{۱۴}$$

که در آن $f(t)$ تابع چگالی سن آتی بیمه‌شده و $\lambda(t)$ نیروی مرگ‌ومیر می‌باشد. با کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u)du\right\}, \tag{۱۵}$$

همچنین تابع احتمال بقا از بازه t الی s به شرطی که $t \leq s$ باشد، برابر است با:

$$\bar{F}(s,t) = \exp\left\{-\int_t^s \lambda(u)du\right\}. \tag{۱۶}$$

تا به اینجا مفاهیم و تعاریف مورد نیاز برای محصول بیمه عمر متصل به شرط حیات را که متصل به بازارهای سرمایه‌گذاری است، بیان کردیم. حال در ادامه به هدف و اصل موضوع این مقاله با طرح سؤالات زیر می‌پردازیم.

*سؤالات پژوهش*

تا به اینجا به معرفی محصولی که در این مقاله طراحی شده است، پرداختیم. در ادامه مسائلی را طرح کرده و به حل آن‌ها می‌پردازیم. همان‌طور که بیان شد اصلی‌ترین هدف این مقاله سرمایه‌گذاری برای شخصی است که این محصول بیمه‌ای را خریداری می‌کند. ازاین‌رو، با سؤالات زیر روبه‌رو هستیم.

- چه استراتژی سرمایه‌گذاری برای بیمه‌شده‌ها در نظر گرفته شود به‌طوری که هم شرکت از عهده تعهدات خود برآید و هم بیمه‌شده‌ها از خرید این محصول احساس رضایت کنند؟
- بهترین نرخ مصرف برای بیمه‌شده‌ها چه مقدار باشد تا آنان از دارایی خود به بهترین نحو استفاده کنند؟
- آیا توابع مرگ‌ومیر مختلف در تعیین استراتژی و نرخ مصرف بهینه تأثیر دارد؟

## مروری بر پیشینه پژوهش

مسئله تخصیص بهینه یکی از اصلی‌ترین مسائل در ادبیات بیمه و ریاضیات مالی است که از دیرباز مورد توجه بوده است. از اولین افرادی که به این مسئله توجه ویژه‌ای داشته Merton (1969) است. وی ابتدا مسئله بهینه‌سازی پرتفو مالی رویکرد کنترل تصادفی بهینه را مطرح نمود و به محاسبه استراتژی بهینه پرداخت. Merton (1976) مسئله کنترل تصادفی بهینه را در حضور نرخ مصرف بیان کرد و با همین ادبیات نرخ مصرف بهینه را محاسبه کرد. Yaari (1965) مسئله بیمه‌های زندگی را برای یک شخص با طول عمر تصادفی مطرح کرد. درحقیقت محصولی که در این مقاله طراحی شده است

به نوعی شبیه بیمه‌های عمر متصل به بازارهای سرمایه‌گذاری است. Barigou and Delong (2022) با طراحی یک محصول بیمه‌ای متصل به سهام در بازاری دارای عدم قطعیت، به قیمت‌گذاری این محصول به کمک روش شبکه عصبی پرداختند. Ceci *et al.* (2017) یک محصول بیمه‌ای عمر مختلط با قابلیت پوشش ریسک را طراحی کرده که پرداخت‌های آن به بازار سهام بستگی داشته است. در این مقاله ما از مدل پخش و پرش کو برای مدل‌سازی قیمت دارایی ریسکی خود که همان سهام باشد، استفاده کرده‌ایم. Wang *et al.* (2021) یک محصول بیمه‌ای متصل به واحد را مطرح و مزایای فوت این محصول را به کمک تبدیلات فوریه برای یک مدل پخش و پرش قیمت گذاری کرده‌اند.Huertas and Alfonso (2021) به کمک مدل‌های کسرپذیر، ذخایر ریاضی را که ازجمله تعهدات آتی شرکت بیمه در قبال بیمه‌شده‌ها است، برای یک محصول بیمه‌ای محاسبه کرده‌اند. اصلی‌ترین نتایج این مقاله موضوع سرمایه‌گذاری با استفاده از حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌شده‌ها است.Kung and Yang (2019) با طراحی یک محصول بیمه عمر، بر روی سرمایه‌گذاری آن تمرکز داشتند. Liu *et al.* (2002) با استفاده از همین ادبیات یک محصول بیمه عمر متصل به واحد طراحی کرده‌اند. از دیگر مقالاتی که در این زمینه چاپ شده است می‌توان به Li *et al.* (2014) اشاره کرد که با در نظر گرفتن مسئله یک بهینه‌سازی بیمه‌ای و اتکائی، وقتی که دینامیک دارایی ریسکی این فرایند از مدل هستون پیروی می‌کند به محاسبه استراتژی و نرخ مصرف بهینه پرداخته‌اند. از دیگر کاربردهای دیگر کنترل بهینه تصادفی می‌توان به طراحی صندوق‌های بازنشستگی با مزایای معین و مشارکت معین اشاره نمود. Xu and Gao (2020) یک فرم بسته‌ای از جواب کنترل بهینه تصادفی برای یک صندوق بازنشستگی با مشارکت معین به دست آورده‌اند. مشابه آنها، Dong and Zheng (2020) با رویکرد کنترل بهینه تصادفی دوگانه یک صندوق بازنشستگی با مشارکت معین طراحی و ارزیابی کرده‌اند. به‌طور کلی ابزار کنترل بهینه تصادفی به کمک مدل‌های تصادفی قابل‌تعریف است. از مهم‌ترین این مدل‌ها می‌توان به خانواده فرایندهای لوی و نحوه استفاده از این مدل‌ها در تعریف دارایی‌های ریسکی اشاره کرد. (Cox and Huang, 1989; Kallsen, 2000; Emmer and Klüppelberg, 2004; Choulli and Hurd, 2001).

Øksendal and Sulem (2019) و Øksendal (2013) با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی همراه پرش به مدل‌سازی دینامیک دارایی‌ها پرداخته‌اند. آن‌ها از فرایندهای لوی برای شبیه‌سازی مدل‌های پرش استفاده کرده‌اند. همچنین این مدل‌ها برای شبیه‌سازی و مدل‌کردن نرخ مرگ‌ومیر تصادفی قابل‌استفاده هستند (Liang and Ma, 2015).

Yao *et al.* (2020) به کمک نرخ بهره تصادفی که از مدل اونشتاین-اوهلنبرگ استفاده کرده‌اند، استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای محاسبه کرده و تأثیر نرخ بهره تصادفی را بر استراتژی بهینه گزارش کرده‌اند. از نمونه مقالاتی که به محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی کرده‌اند، می‌توان به مقاله Ceci *et al.* (2020) اشاره نمود که با استفاده از روش BSDEs به قیمت گذاری قرارداد پرداختند. مسئله تخصیص بهینه و کاربرد آن همواره در طراحی محصولات بیمه‌ای قابل‌توجه بوده است (Pasin and Vargiolu, 2010; Gao, 2008; Deelstra *et al.*, 2004).

با توجه به توضیحات بالا، در این مقاله ما به کمک رویکرد کنترل تصادفی، یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی نموده‌ایم. این محصولات به این صورت است که در ازای دریافت مبلغی به‌عنوان حق بیمه که در زمان‌های مشخص پرداخت می‌شود، بیمه‌گر متعهد می‌شود زمانی که بیمه‌شده در انتهای قرارداد در قید حیات باشد، مزایای بیمه‌ای را پرداخت کند.

## روش‌شناسی پژوهش

در این بخش به سرمایه‌گذاری برای یک بیمه‌شده که محصول بیمه عمر به شرط حیات را خریداری می‌کند، پرداخته می شود. هدف این است که با تشکیل یک پرتفو بیمه‌ای به دنبال بهترین استراتژی سرمایه‌گذاری باشیم. کنترل بهینه تصادفی این مسیر را برای ما میسر ساخته است. با استفاده از رویکرد Merton (1971) و Yaari (1965) مسئله بهینه‌سازی تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$J(W,t)=\sup_{\{\pi(s),c(s)\}_{0\le s\le t}}\mathbb{E}_t\left(\bar{F}(T,t)\left(U(W_T^{\pi,c})+\int_t^T U(s,c(s))ds\right)\right), \qquad (۱۷)$$

هدف رابطه ۱۷ در مسئله بهینه سازی این است که به دنبال بیشترین پرتفو مورد انتظار در انتهای قرارداد برای یک شخص با تابع مطلوبیتی دلخواه تحت دو استراتژی $(\pi,c)$ می‌باشد. پس با انتخاب بهترین استراتژی رابطه ۱۷ را ماکزیمم می‌کنیم. در رابطه ۱۷، U(.) همان تابع مطلوبیتی است که در بخش قبلی به آن اشاره شده است. به کمک حساب دیفرانسیل تصادفی می‌توان نشان داد که تابع هدف ۱۷ جوابی از معادله زیر است.

$$\begin{aligned}\Omega(W,\pi,c,t)=J_t-\lambda(t)J+\sup_{\{\pi(t),c(t)\}}\Big\{&\big(r+\pi(\mu+\tfrac{1}{2}\sigma^2-r)\big)W_tJ_W\\ &-cJ_W+U(t,c)+\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2W_t^2J_{WW}\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\left[J\left(W(1+\pi(e^x-1)),t\right)-J(W,t)\right]\Pi(v_t,dx)\Big\}=0,\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

به معادله ۱۸ در ادبیات تصادفی معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن (Hamilton-Jacobi-Bellman) می‌گویند که به اختصار به معادله HJB معروف است.

در ادامه برای اینکه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را محاسبه کنیم، از $\Omega(W,\pi,c,t)$ در رابطه ۱۸ نسبت به پارامترهای کنترل $(\pi,c)$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه از حل رابطه ۱۹ و ۲۰، به ازای هر تابع مطلوبیت و اندازه تصادفی دلخواه محاسبه می‌شود:

$$(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)W_t J_W + \pi^*\sigma^2 W_t^{\,2} J_{WW} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\pi}J(W(1+\pi^*(e^x-1)),t)\Pi(\nu_t,dx)=0. \quad (۱۹)$$

$$\frac{\partial}{\partial c}U(t,c^*)-J_W=0 \quad (۲۰)$$

از خواص تابع مطلوبیت می‌توان به اکیداً صعودی‌بودن اشاره کرد و چون $\frac{\partial^2}{\partial c^2}U(t,c^*)=0$ در نتیجه مقدار بیشینه می‌باشد. همچنین در استراتژی بهینه برای اینکه $\pi^*$ مقدار بیشینه باشد باید شرط $J_{ww}<0$ برقرار باشد.

در ادامه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای دو تابع مطلوبیتی که در بخش قبل معرفی کرده‌ایم، محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع مطلوبیت بیمه‌شده از نوع مطلوبیت لگاریتم باشد:

$$U(W_t)=e^{-\alpha T}\log(W_t),\quad U(t,c_t)=e^{-\alpha t}\log(c_t), \quad (۲۱)$$

با پیروی از Ait-Sahalia *et al.* (2009) فرض می‌کنیم جواب تابع هدف مسئله ($J(W,t)$) به‌صورت حدس زیر باشد:

$$J(W,t)=U(W_t)f(t)+g(t), \quad (۲۲)$$

قضیه ۱-۳: فرض می‌کنیم بیمه‌شده دارای تابع مطلوبیت لگاریتم به فرم رابطه ۲۱ و همچنین حدس جواب تابع هدف به‌صورت رابطه ۲۲ باشد، در این صورت موارد زیر برقرار است:

- $f(t)$ و $g(t)$ توابع ثابت زیر می‌باشد:

$$f(t)=e^{\int_0^t\lambda(u)du}\left(\int_0^t e^{\alpha(T-s)-\int_0^s\lambda(u)du}ds\right), \quad (۲۳)$$

$$g'(t)-\lambda(t)g(t)+e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+1\right]$$
$$(\left[(r+\pi(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r))-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\right]+\phi(\pi^*))e^{-\alpha T}f(t)=0 \quad (۲۴)$$

که در آن $\phi(\pi^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\log(1+\pi^*(e^x-1))\Pi(\nu_t,dx)$ می‌باشد.

- با استفاده از توابع بالا استراتژی بهینه ($\pi^*$) و نرخ مصرف بهینه ($c^*$) از روابط زیر به دست می‌آید:

$$-\pi^*\sigma^2+\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^x-1)}{1+\pi^*(e^x-1)}\Pi(\nu_t,dx)=0, \quad (۲۵)$$

$$c_t^*=e^{\alpha(T-t)}\frac{W_t}{f(t)}. \quad (۲۶)$$

اثبات: با استفاده از مشتق مرتبه اول از معادله HJB و مشتق‌گرفتن نسبت به پارامترهای کنترل، استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه به دست می‌آید. با قراردادن مقادیر بهینه در معادله HJB خواهیم داشت:

$$J(W_t,t)=e^{-\alpha T}\log(W_t)f(t)+g(t)$$

$$\begin{cases} J_W=\dfrac{e^{-\alpha T}f(t)}{W_t} \\ J_{WW}=-\dfrac{e^{-\alpha T}f(t)}{W_t^{\,2}} \\ J_t=e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)+g'(t) \\ U(t,c_t^*)=e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+\log(W_t)\right] \end{cases} \quad (۲۷)$$

با قراردادن رابطه ۲۷ در معادله HJB خواهیم داشت:

$$e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)+\left[(r+\pi(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r))-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\right]e^{-\alpha T}f(t)-$$
$$\lambda(t)g(t)+g'(t)+e^{-\alpha t}\left[\alpha(T-t)-\log(f(t))+\log(W_t)+1\right]- \quad (۲۸)$$
$$e^{-\alpha T}\lambda(t)\log(W_t)f(t)+e^{-\alpha T}f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\log(1+\pi^*(e^x-1))\Pi(\nu_t,dx)=0,$$

برای حذف $W_t$ از رابطه بالا معادله زیر را داریم:

$$e^{-\alpha T}\log(W_t)f'(t)-e^{-\alpha T}\lambda(t)\log(W_t)f(t)+e^{-\alpha t}\log(W_t)=0. \quad (۲۹)$$

که از این معادله $f(t)$ محاسبه می‌شود. در ادامه با جایگذاری $f(t)$ در معادله HJB، $g(t)$ محاسبه می‌شود.

در ادامه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه را برای تابع مطلوبیت توانی محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع مطلوبیت توانی به فرم زیر باشد:

$$U(W_t)=\mathrm{e}^{-\alpha T}\frac{W_t^{\,1-\gamma}}{1-\gamma},\quad U(t,c)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (۳۰)$$

در این حالت حدس جواب تابع هدف به فرم زیر است:

$$J(W_t,t)=U(W_t)f^{\gamma}(t), \quad (۳۱)$$

قضیه ۲-۳: فرض می‌کنیم بیمه‌شده دارای تابع مطلوبیت توانی به فرم رابطه ۳۰ و همچنین حدس جواب تابع هدف به‌صورت رابطه ۳۱ باشد، در این صورت موارد زیر برقرار است:

● با مفروضات بالا $f(t)$ برابر است با:

$$f(t)=\left(\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\Psi(\pi^*))(T-s)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\int_0^s \lambda(u)du}ds\right)e^{\frac{1}{\gamma}\left(\int_0^t \lambda(s)ds-\Psi(\pi^*)(T-t)\right)} \tag{۳۲}$$

$$\begin{cases}\Psi(\pi^*)=(1-\gamma)\left(\left(r+\pi^*\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r\right)\right)-\frac{\gamma\pi^{*2}\sigma^2}{2}\right)+\Phi(\pi^*)\\ \Phi(\pi^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+\pi^*(e^x-1))^{1-\gamma}-1\right)\Pi(v_t,dx)\end{cases} \tag{۳۳}$$

• با استفاده از توابع بالا استراتژی بهینه ($\pi^*$) و نرخ مصرف بهینه ($c^*$) از روابط زیر به دست می‌آید:

$$-\gamma\sigma^2\pi^*+(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)+\int_{-\infty}^{\infty}(1+\pi^*(e^x-1))^{-\gamma}(e^x-1)\Pi(v_t,dx)=0. \tag{۳۴}$$

$$c^*(t)=e^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}. \tag{۳۵}$$

اثبات: همانند تابع مطلوبیت لگاریتم، با استفاده از مشتق مرتبه اول از معادله HJB و با جایگذاری مشتقات زیر خواهیم داشت:

$$J(W_t,t)=e^{-\alpha T}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^\gamma(t),$$
$$\begin{cases}J_W=e^{-\alpha T}f^\gamma(t)W_t^{-\gamma}\\ J_{WW}=-\gamma e^{-\alpha T}f^\gamma(t)W_t^{-\gamma-1}\\ J_t=\gamma e^{-\alpha T}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^{\gamma-1}(t)f'(t)\\ U(t,c_t^*)=\frac{e^{\alpha(T-t)}e^{\frac{\alpha(T-t)(1-\gamma)}{\gamma}}}{f(t)}.\frac{e^{-\alpha T}W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^\gamma(t)\end{cases} \tag{۳۶}$$

در انتها با فاکتورگیری از $\frac{e^{-\alpha T}W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}f^\gamma(t)$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$f'(t)+\frac{(\lambda(t)-\Psi(\pi^*))}{\gamma}f(t)+e^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}=0 \tag{۳۷}$$

که از حل این معادله دیفرانسیل حدس جواب به دست می‌آید.

لم۱-۳: با استفاده از مدل کو و اندازه تصادفی مدل کو استراتژی بهینه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$0=-\gamma\sigma^2\pi^*+(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2-r)+V(\pi^*) \tag{۳۸}$$

$$V(\pi^*)=\int_0^1\left[\lambda p\beta_1\left(1+\pi^*t-t\right)^{-\gamma}(1-t)^{\beta_1+\gamma-2}-\lambda q\beta_2\left(1-\pi^*t\right)^{-\gamma}(1-t)^{\beta_2-1}\right]t\,dt \tag{۳۹}$$

اثبات: برای محاسبه استراتژی بهینه که در رابطه ۳۴ بیان شده است، قسمت انتگرال را به دو زیربازه $(0,\infty)$ و $(-\infty,0)$ تقسیم می‌کنیم که برای قسمت مثبت انتگرال از تغییر متغیر $x=-\ln(1-t)$ و برای قسمت منفی انتگرال از تغییر متغیر $x=\ln(1-t)$ استفاده می‌کنیم که در نهایت قسمت انتگرالی به بازه $(0,1)$ تبدیل می‌شود. در ادامه، این انتگرال را به کمک روش‌های انتگرال‌گیری در Gradshteyn and Ryzhik (2014) ساده‌سازی کرده، سپس در نرم‌افزار میپل و با روش انتگرالی گوسی به‌صورت عددی حل و در بخش نتایج عددی گزارش داده شده است. همچنین تمامی نتایج این لم برای تابع مطلوبیت لگاریتم در حالتی که $\gamma=1$ باشد، برقرار است.

تا به اینجا روش محاسبه استراتژی بهینه را برای مدل کو بیان کردیم. در ادامه در چند مثال به محاسبه نرخ مصرف بهینه برای دو نیروی مرگ‌ومیر معروف می‌پردازیم.

مثال۱-۳: فرض می‌کنیم نیروی مرگ‌ومیر دی موآر با بیشترین سن $\omega$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\lambda(t)=\frac{1}{\omega-x-t},\quad 0<t<\omega \tag{۴۰}$$

در این صورت با استفاده از قضیه ۱-۳ نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت لگاریتم به‌صورت زیر است:

$$c_t^*=\frac{(\omega-x)\alpha^2}{(1+\alpha t-\alpha(\omega-x))+e^{\alpha t}(1+\alpha(\omega-x))}W_t. \tag{۴۱}$$

مثال۲-۳: فرض می‌کنیم تمام مفروضات مثال ۱-۳ برقرار باشد، در این صورت نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت توانی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$c_t^*=e^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}, \tag{۴۲}$$

$$f(t)=\xi^{-(\gamma+1)}\left(\frac{2(\omega-x)}{\omega-x-t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\exp\left(\xi(\omega-x-T)-\frac{\psi(\pi^*)}{\gamma}(T-t)\right)\times\left(\Gamma\left(\gamma+1,\xi(\omega-x-t)\right)-\Gamma\left(\gamma+1,\xi(\omega-x)\right)\right) \quad (۴۳)$$

مثال۳-۳: فرض می‌کنیم نیروی مرگ‌و@میر گامپرتز به فرم زیر باشد:

$$\lambda(t)=BC^{x+t},\quad t>0 \quad (۴۴)$$

که در آن $B$ و $C$ ضرایب ثابت هستند. آن‌گاه نرخ مصرف بهینه برای شخصی با تابع مطلوبیت لگاریتم برابر است با:

$$c_t^*=\frac{e^{\alpha(T-t)-\frac{BC^{x+t}}{\ln(C)}}\ln(C)}{Ei\left(1,\frac{BC^{x+t}}{\ln(C)}\right)-Ei\left(1,\frac{BC^{x}}{\ln(C)}\right)}W_t. \quad (۴۵)$$

که در آن $Ei$ انتگرال نمایی می‌باشد.

مثال۳-۴: فرض می‌کنیم تمام مفروضات مثال ۳-۳ برقرار باشد، در این صورت نرخ مصرف بهینه برای یک شخص با تابع مطلوبیت توانی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$c_t^*=\mathrm{e}^{\frac{\alpha(T-t)}{\gamma}}\frac{W_t}{f(t)}, \quad (۴۶)$$

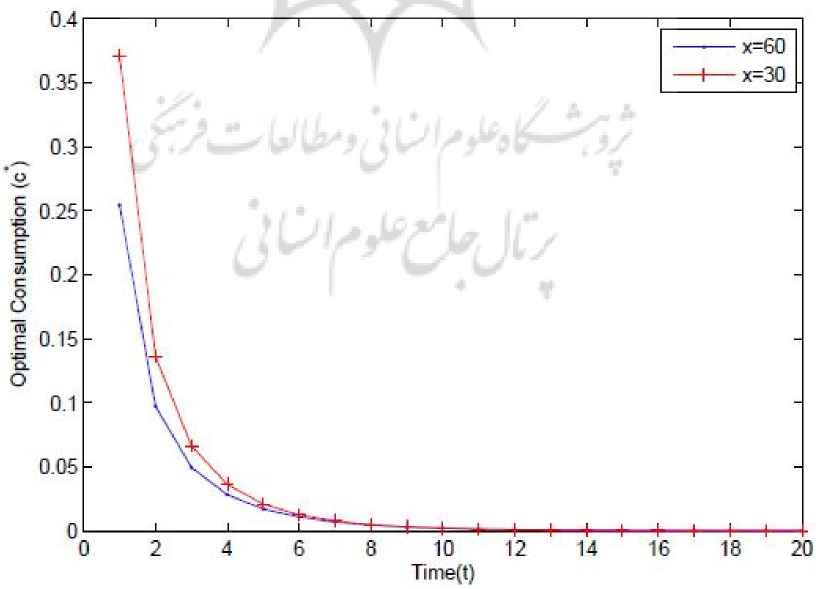
$$f(t)= \quad (۴۷)$$

$$\left(\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\Psi(\pi^*))(T-s)}{\gamma}+\frac{B(C^{x+s}-C^x)}{\gamma\ln(C)}}ds\right)e^{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{B(C^{x+t}-C^x)}{\ln(C)}-\Psi(\pi^*)(T-t)\right)}$$

## نتایج و بحث

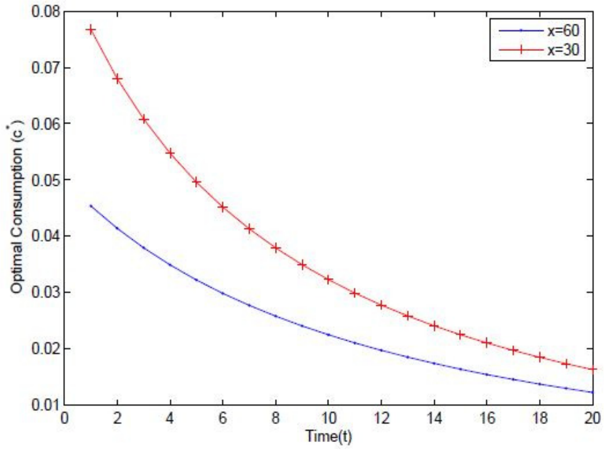
در این مقاله یک محصول بیمه عمر به شرط حیات طراحی شده است که بخشی از مزایای آن به دو بازار ریسکی و غیرریسکی بستگی دارد. برای این منظور با تشکیلی پرتفویی از دو بازار مذکور، استراتژی و نرخ مصرف بهینه محاسبه و در جدول و نمودارهای زیر بیان شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که رفتار نرخ مصرف بهینه همانند مدل Merton (1976) می‌باشد، با این تفاوت که در نرخ مصرف بهینه طراحی‌شده در این مقاله رفتار پرش‌های قیمت کامل مشهود است. نمودارهای ۱-۴ نشان‌دهنده نرخ مصرف بهینه برای دو سن ۳۰ و ۶۰ برای تابع مطلوبیت CRRA می‌باشد. همچنین در جدول ۱ استراتژی بهینه برای مدل کو گزارش شده است.

در نمودارهای بالا رفتار نرخ مصرف بهینه برای دو تابع مطلوبیت نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در نمودارهای ۱ و ۴ رفتار نرخ مصرف بهینه برای دو مقدار سن در تابع مطلوبیت توانی بسیار به هم نزدیک بوده و با فاصله کمی حرکت می‌کنند، به‌طوری که مقدار مصرف بهینه در مدل مرگ‌ومیر دی مو آر برای سن ۳۰ سالگی کمی بیشتر از سن ۶۰ سالگی است. به‌طور کلی شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که نرخ مصرف در تابع مطلوبیت توانی



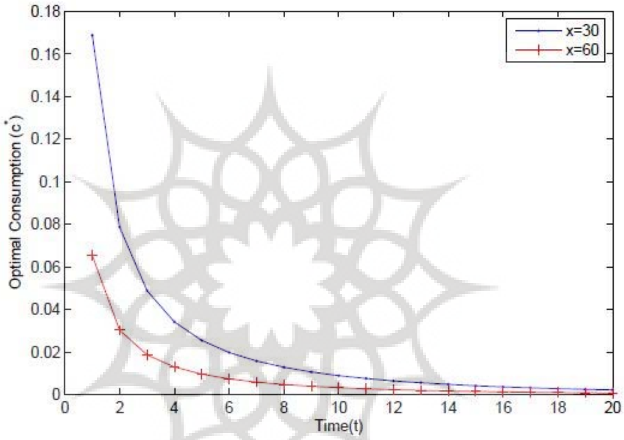

نمودار ۱: رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ‌ومیر دی موآر را برای تابع مطلوبیت توانی

Fig. 1: The behavior of the optimal consumption rate for the De Moir mortality model with power utility function.




نمودار ۲: رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ‌ومیر دی موآر را برای تابع مطلوبیت لگاریتم

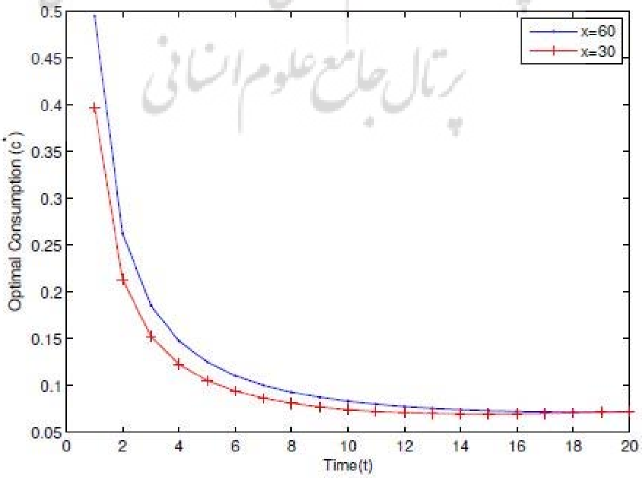
Fig. 2: The behavior of the optimal consumption rate for the De Moir mortality model with logarithm utility function.




نمودار ۳: رفتار نرخ مصرف بهینه با تابع مطلوبیت لگاریتم برای مدل مرگ‌ومیر گامپرتز با پارامترهای C=1.01, B=0.01

Fig. 3: The behavior of the optimal consumption rate with logarithm utility function for the Gampertz mortality model with B=0.01 and C=1.01.






نمودار ۴: رفتار نرخ مصرف بهینه برای مدل مرگ‌ومیر گامپرتز را برای تابع مطلوبیت توانی با پارامترهای C=1.01, B=0.01

Fig. 4: The behavior of the optimal consumption rate with power utility function for the Gampertz mortality model with B=0.01 and C=1.01.

جدول ۱: استراتژی بهینه سرمایه گذاری برای تابع مطلوبیت توانی با ضریب ریسک گریزی‌های متفاوت.
Table 1: The optimal investment strategy for the power utility function with different risk aversion coefficients.

| $\gamma$ | $\beta$ | $\pi^*$ |
|---|---|---|
| 3 | 5.3 | 0.3878 |
| 3 | 6.1 | 0.3810 |
| 5 | 7.5 | 0.3213 |
| 5 | 8.2 | 0.3176 |
| 1 | 6.3 | 0.6961 |
| 1 | 7.9 | 0.5917 |
| 1 | 8.4 | 0.5774 |

زیاد به سن افراد بستگی ندارد و مقادیرشان با گذشت زمان به هم نزدیک می‌شوند. درحالی‌که این نرخ برای مدل مرگ‌ومیر گامپرتز برعکس عمل می‌کند. نمودارهای ۲ و ۳ نرخ مصرف بهینه برای تابع مطلوبیت لگاریتم را نشان می‌دهد که مقدار نرخ مصرف بهینه دو سن ۳۰ و ۶۰ سالگی از هم بیشتر بوده است. به‌عبارت دیگر، مقدار نرخ مصرف در اینجا به تابع مطلوبیت حساس بوده است. از دید اقتصادی عموماً مصرف‌کنندگان هزینه‌های خود را بر مبنای ارزیابی منطقی و آگاهانه از شرایط اقتصادی فعلی و آینده خود قرار می‌دهند. اغلب شرایط اقتصادی منفی باعث می‌شود که ذات نرخ مصرف برای افراد همواره نزولی باشد. در این مقاله سرمایه‌گذاری در بازاری انجام می‌شود که قیمت‌ها دارای پرش‌هایی در دینامیکشان هستند. در حالت کلی نرخ مصرف تابعی نزولی است. از آنجایی که در نتایج این مقاله پرش‌های منفی وجود دارند، نرخ مصرف رفتار نزولی‌تر به خود می‌گیرید به‌طوری که از زمانی به بعد شاهد پرشی منفی در رفتار نرخ مصرف هستیم.

در جدول ۱ استراتژی‌های بهینه برای تابع مطلوبیت‌های توانی و لگاریتم گزارش شده است. همان‌طور که قبلاً بیان شد در حالتی که $\gamma=1$ باشد، استراتژی بهینه برای تابع مطلوبیت لگاریتم بوده و در جدول گزارش شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای تابع مطلوبیت لگاریتم مقدار استراتژی بهینه بیشتر از تابع مطلوبیت توانی بوده و به‌عبارت دیگر نسبت سرمایه در بازارهای ریسکی به‌مراتب بیشتر می‌باشد و بیمه‌شده‌هایی که ریسک‌پذیرتر هستند برای سرمایه‌گذاری از تابع مطلوبیت لگاریتم استفاده می‌کنند. همچنین هر اندازه ضریب ریسک‌گریزی افراد بیشتر باشد، مشارکتشان در سرمایه‌گذاری در بازارهای ریسکی کمتر می‌باشد.

## جمع بندی و پیشنهادها

در این مقاله با بهره‌گیری از پرتفویی متشکل از دارایی ریسکی و غیرریسکی و محاسبه استراتژی بهینه و نرخ مصرف بهینه، یک قرارداد بیمه عمر طراحی کردیم. مطالعه ما بر روی یک خانواده از فرایندهای لوی بوده و تأثیر این فرایندها روی استراتژی‌های پرتفو ادامه یافت. در ادامه با استفاده از دو مدل مرگ‌ومیر شناخته‌شده این نتایج با هم مقایسه شده است.

امروزه در برخی از شرکت‌های بیمه، محصولاتی در رشته عمر طراحی شده‌اند که برخی از مزایای آن از بازارهای سهام استخراج می‌شود. مطالعاتی که اغلب دراین‌باره انجام می‌شود بسیار تجربی بوده و با استفاده از مشاهدات بازار انجام می‌پذیرد. در چنین شرایطی طراحی مدل‌هایی مانند مدل این مقاله در تصمیم‌گیری و ارائه خدمات هر چه بهتر برای مشتریان بسیار حائز اهمیت است و همچنین می‌توانند در بحث پیش‌بینی رفتار سهام عملکرد بهتری انجام دهند. به‌عبارت دیگر، با استفاده از مدل قیمتی این مقاله می‌توانند سناریوهای مختلفی طراحی کنند و با توجه به این سناریو بهترین رفتار سرمایه‌گذاری را در مواقع بحرانی انتخاب کنند. ازاین‌رو در صنعت بیمه طراحی چنین مدل‌های بسیار ضروری است.

به‌عنوان پژوهشی که در ادامه می‌توان به آن پرداخت، استفاده از خانواده معادلات دیفرانسیل تصادفی به‌عنوان مدلی از شدت مرگ‌ومیر است. همچنین در مدلی کاربردی‌تر می‌توان به خانواده‌ای از مدل‌های دیفرانسیل تصادفی توأم اشاره نمود. این دسته از مدل‌ها برای بیمه‌نامه‌هایی قابل‌استفاده است که به‌صورت گروهی صادر می‌شود و در این زمینه مطالعات کمی انجام شده است. از نگاه کلی‌تر، از این محصولات می‌توان در فروش محصولات بیمه‌نامه‌های زندگی در شرکت‌های بیمه استفاده نمود.

## مشارکت نویسندگان

سامان وهابی: جمع‌آوری مطالعات مرتبط و تدوین مدل، مروری بر ادبیات پژوهش، روش پژوهش و متدولوژی، کنترل چهارچوب تدوین استانداردهای پژوهشی. دکتر امیر تیمور پاینده نجف‌آبادی به‌عنوان استاد راهنما در نتیجه‌گیری و کلیه مراحل مقاله، نظارت و همکاری داشته‌اند.

## تشکر و قدردانی

این مقاله توسط صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور Iran National Science Foundation (INSF) به شماره (No. ۹۹۰۰۲۴۲۱) مورد حمایت مالی قرار گرفته است. در اینجا بر خود لازم می‌داریم که از این نهاد محترم تشکر و قدردانی به عمل آوریم. همچنین از جناب آقای دکتر مسعود حجاریان به خاطر نکات و نظرات مثبت خود در راستای پیشرفت این اثر تشکر و قدردانی می‌کنیم.

## تعارض منافع

نویسنده (گان) اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سوءرفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسندگان رعایت شده است.

## دسترسی آزاد



## یادداشت ناشر

ناشر نشریه پژوهشنامه بیمه با توجه به مرزهای حقوقی در نقشه‌های منتشر شده بی‌طرف باقی می‌ماند.

## منابع

Ait-Sahalia, Y.; Cacho-Diaz, J.; Hurd, T.R., (2009). Portfolio choice with jumps: A closed-form solution. Annals Appl. Probability., 19(2): 556-584 **(29 Pages)**.

Barigou, K.; Delong, L., (2022). Pricing equity-linked life insurance contracts with multiple risk factors by neural networks. J. Comput. Appl. Math., 404(1).

Ceci, C.; Colaneri, K.; Cretarola, A., (2020). Indifference pricing of pure endowments via BSDEs under partial information. Scand. Actuarial. J., 2020(10): 904-933 **(30 Pages)**.

Ceci, C.; Colaneri, K.; Cretarola, A., (2017). Unit-linked life insurance policies: Optimal hedging in partially observable market models. Insur. Math. Econ., 76(1): 149-163 **(15 Pages)**.

Choulli, T.; Hurd, T.R., (2001). The role of hellinger processes in mathematical finance. Entropy., 3(3): 150-161 **(12 Pages)**.

Cox, J.C.; Huang, C.F., (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. J. Econ. Theory., 49(1): 33-83 **(51 Pages)**.

Deelstra, G.; Grasselli, M.; Koehl, P.F., (2004). Optimal design of the guarantee for defined contribution funds. J. Econ. Dyn. Control., 28(11): 2239-2260 **(22 Pages)**.

Dong, Y.; Zheng, H., (2020). Optimal investment with S-shaped utility and trading and Value at Risk constraints: An application to defined contribution pension plan. Eur. J. Oper. Res., 281(2): 341-356 **(16 Pages)**.

Emmer, S.; Klüppelberg, C., (2004). Optimal portfolios when stock prices follow an exponential Lévy process. Finance. Stochastics., 8(1): 17-44 **(28 Pages)**.

Gao, J., (2008). Stochastic optimal control of DC pension funds. Insur. Math. Econ., 42(3): 1159-1164 **(6 Pages)**.

Gerber, H.U., (1997). Life insurance mathematics. Springer. Sci. Bus. Media

Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M., (2014). Table of integrals, series, and products. Acad. Press

Huertas, K.E.A.; Alfonso, K.E., (2021). Mathematical reserves of unit-linked insurance policies with fractional volatility.

Kallsen, J., (2000). Optimal portfolios for exponential Lévy processes. Math. Methods. Oper. Res., 51(1): 357-374 **(18 Pages)**.

Kou, S.G., (2002). A jump-diffusion model for option pricing. Manage. Sci., 48(8): 1086-1101 **(16 Pages)**.

Kung, K.L.; Yang, S.Y., (2019). Optimal consumption and investment problem incorporating housing and life insurance decisions: The continuous time case. J. Risk. Insur., 87(1): 143-171 **(29 Pages)**.

Li, D.; Rong, X.; Zhao, H., (2014). Optimal reinsurance and investment problem for an insurer and a reinsurer with jump-diffusion risk process under the Heston model. Comput. Appl. Mathematics ., 35(2): 533-557 **(25 Pages)**.

Liang, Z.; Ma, M., (2015). Optimal dynamic asset allocation of pension fund in mortality and salary risks framework. Insur. Math. Econ., 64(1): 151-161 **(11 Pages)**.

Liu, J.; Longstaff, F.A.; Pan, J., (2002). Dynamic asset allocation with event risk. J. Finance., 58(1): 1-45 **(45 Pages)**.

Merton, R.C., (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-timecCase. Rev. Econ. Stat., 51(3): 247-257 **(11 Pages)**.

Merton, R.C., (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. J. Econ. Theory., 3(4): 373-413 **(41 Pages)**.

Merton, R.C., (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. J. Financ. Econ., 3(1/2): 125-144 **(20 Pages)**.

Øksendal, B., (2013). Stochastic differential equations: An introduction with applications. Springer. Sci. Bus. Media

Øksendal, B.; Sulem, A., (2019). Applied stochastic control of jump diffusions. Springer. Berlin., 498(1).

Pasin, L.; Vargiolu, T., (2010). Optimal portfolio for CRRA utility functions when risky assets are exponential additive processes. Econ. Notes., 39(1/2): 65-90 **(26 Pages)**.

Tankov, P.; Cont, R., (2004). Financial modelling with jump processes. Chapman. AMP

Wang, Y.; Zhang, Z.; Yu, W., (2021). Pricing equity-linked death benefits by complex Fourier series expansion in a regime-switching jump diffusion model. Appl. Math. Comput., 399(1).

Xu, W.; Gao, J., (2020). An optimal portfolio problem of DC pension with Input-Delay and Jump-Diffusion process. Math. Probl. Eng., 1-9 **(9 Pages)**.

Yaari, M.E., (1965). Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. Rev. Econ. Stud., 32(2): 137-150 **(14 Pages)**.

Yao, H.; Chen, P.; Zhang, M.; Li, X., (2020). Dynamic discrete-time portfolio selection for defined contribution pension funds with inflation risk. J. Ind. Manage. Optim., 18(1): 511-540 **(30 Pages)**.

## پیوست

در این پیوست کدهای نوشته‌شده برای نتایج عددی این مقاله با دو نرم‌افزار Matlab و Maple پیوست می‌شود. لازم به ذکر است که برای محاسبه استراتژی بهینه از نرم‌افزار Maple و برای نرخ مصرف بهینه از نرم‌افزار Matlab استفاده شده است. در ابتدا کدهای Matlab برای چهار نمودار از نرخ مصرف بهینه قرار داده شده است.

```
% % % % % % % % % % % % % % % % %
Optimal Consumption for Kou Jump Model%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

g=8.04; csi=0.3; mu=0.28; sig=0.16; r=0.04; C=1.01;
B=0.01;
x=60; xx=30; pi=0.3901; T=20; fiVG=-0.01; a=0.05;
gg=7.15; fiKOU=0.07;
ZaribKou=[0.3463 0.7143 1.1053 1.5209 1.9626
2.4321 2.9312 3.4617 4.0256 4.6252 5.2627 5.9405
6.6614 7.4279 8.2431 9.1102 10.0325 11.0136 12.0574
13.1678];
t=1:1:T;
si=(1-g)*(r+pi*(mu+(0.5*(sig^2))-r)-
(0.5*g*((pi*sig)^2)))+fiKOU;
for i=1:length(t)

X=ZaribKou(i)*exp((1/g)*(((B/log(C))*(C^(x+t(i))-
C^x))-si*(T-t(i))));
XX=ZaribKou(i)*exp((1/gg)*(((B/
log(C))*(C^(xx+t(i))-C^xx))-si*(T-t(i))));

cc(i,:)=exp(a*(T-t(i))/gg)/(XX);
c(i,:)=exp(a*(T-t(i))/g)/(X);
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%
g=3.2; csi=0.3; mu=0.28; sig=0.16; r=0.04; w=100;
x=60; xx=20; pi=0.3901; T=20; fiVG=-0.1;; a=0.05;
gg=2.75; fiKOU=0.7;
t=1:1:T;
si=(1-g)*(r+pi*(mu+(0.5*(sig^2))-r)-
(0.5*g*((pi*sig)^2)))+fiKOU;
for i=1:length(t)
X=exp(csi*(w-x-T)-(si*(T-t(i)))/g);
Y=(csi^(-g-1))*((2*(w-x))/(w-x-t(i)))^(1/g);
G=gammainc(csi*(w-x),g+1)-gammainc(csi*(w-x-
t(i)),g+1);

XX=exp(csi*(w-xx-T)-(si*(T-t(i)))/gg);
YY=(csi^(-gg-1))*((2*(w-xx))/(w-xx-t(i)))^(1/gg);
GG=gammainc(csi*(w-xx),gg+1)-gammainc(csi*(w-
xx-t(i)),gg+1);

cc(i,:)=exp(a*(T-t(i))/gg)/(GG*XX*YY);
c(i,:)=exp(a*(T-t(i))/g)/(G*X*Y);
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%
C=1.01; B=0.01; T=20; x=30; a=0.05; xx=60;
t=1:1:T;
```

```
for i=1:length(t)
X=mfun('Ei',(B*(C^x))/log(C));
Y=mfun('Ei',(B*(C^(x+t(i))))/log(C));
Z=exp(a*(T-t(i))-(B*C^(x+t(i)))/log(C))*log(C);

XX=mfun('Ei',(B*(C^xx))/log(C));
YY=mfun('Ei',(B*(C^(xx+t(i))))/log(C));
ZZ=exp(a*(T-t(i))-(B*C^(xx+t(i)))/log(C))*log(C);

c(i,:)=Z/(Y-X);
cc(i,:)=ZZ/(YY-XX);
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
alpha=0.05; x=60; w=100; xx=30;
t=1:1:20;
for i=1:length(t)
c(i,:)=((w-x)*(alpha^2))/((1+(alpha*t(i))-alpha*(w-x))+exp(alpha*t(i))*(1+alpha*(w-x)));

cc(i,:)=((w-xx)*(alpha^2))/((1+(alpha*t(i))-alpha*(w-xx))+exp(alpha*t(i))*(1+alpha*(w-xx)));
end
hold on
plot(t,c,'.-')
plot(t,cc,'-+')
ylabel('Optimal Consumption (c^*)')
xlabel('Time(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%
```

در کد زیر استراتژی بهینه محاسبه شده است. روش محاسبه به کمک روش‌های انتگرال‌گیری که در نرم‌افزار Maple موجود است، استفاده شده است.

```
> restart :
> with(Student[NumericalAnalysis]) : with(LinearAlgebra) :
  σ := 0.16 :
  ρ := 0.5 :
  λ := 8.8 :
  η := 0 :
  μ := 0.28 :
  r := 0.04 :
  g := 1 : δ := 8.8 : χ := 2 :

> P0 := 0.5 :
  f := t→t·χ·(δ·ρ·(1 + t·(P − 1))^(-g)·(1 − t)^(δ+g−2) − λ·(1 − ρ)·(1 − P·t)^(-g)·(1 − t)^(λ−1)) :
>
  M2 := expand(Quadrature(f(t), t = 0 ..1, method = gaussian[3] , partition = 1, output = value)) :
>
  M22 := expand(Quadrature(f(t), t = 0 ..1, method = newtoncotes[3] , partition = 1, output = value)) :
>
> equ := P→− g·σ^2·P + M2 :
> Optimal Strategy := (μ + 0.5· σ^2 − r) + Newton(equ(P), P = P0, tolerance = 10^(-2))
```


**AUTHOR(S) BIOSKETCHES** | **معرفی نویسندگان**

**سامان وهابی**، دانشجوی دکتری بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

- Email: *s_vahabi@sbu.ac.ir*
- ORCID: 0000-0003-3604-1325
- Homepage: https://mathsci.sbu.ac.ir/

**امیرتیمور پاینده نجف‌آبادی**، استاد گروه بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

- Email: *amirtpayandeh@sbu.ac.ir*
- ORCID: 0000-0001-8894-0803
- Homepage: http://facultymembers.sbu.ac.ir/payandeh/



**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

*Vahabi, S.; Payandeh Najafabadi, A.T., (2023). Optimal investment portfolio for a dynamic life insurance product using stochastic control approach. Iran. J. Insur. Res., 12(2): 225-238.*

**DOI:** 10.22056/ijir.2023.03.05

**URL:** https://ijir.irc.ac.ir/article_160293.html?lang=en