

چگونه پرتفولیوی بهینه انتخاب نماییم؟

احمد تلنگی

کارشناس ارشد مدیریت بازرگانی - گرایش مالی (دانشگاه تهران)

به سود شود پاداش بالقوه‌ای را در پی خواهد داشت. اگر سود حاصل از ترقی قیمتها با سودهای تقسیمی دریافتی در طول دوره نگهداری ترکیب شود بازده کل را شکل می‌دهد.

اگر بازده سالانه یک ورقه بهادر یا مجموعه‌ای از آنها عددی مانند $1/1$ یا $1/10$ باشد، این اعداد بیانگر این مفهوم می‌باشند که ارزش سرمایه‌گذاری (همراه با سود تقسیمی) در انتهای سال به ترتیب $1/10$ درصد یا $1/100$ درصد ارزش ابتدایی سرمایه‌گذاری می‌باشد.

اصطلاح نرخ بازده (عایدی) برای توصیف نرخ افزایش یا کاهش سرمایه‌گذاری در طول دوره نگهداری دارایی به کار می‌رود. یک نرخ بازده $1/10$ -یا $1/20$ -نشانگر این نکته است که به ترتیب سرمایه‌گذاری درصد کاهش و یا درصد افزایش داشته است. نرخ بازده آینده همیشه قطعی نیست بلکه بر مبنای پیش‌بینی عملکرد بازارهای از عایدی به دست می‌آید و سپس در احتمالهای وقوع آن ضرب و نتایج حاصل با هم جمع می‌شوند که به نتیجه عمل، بازده مورد انتظار گفته می‌شود.

هرگاه رویدادهای آتی بطور کامل قابل پیش‌بینی نباشند و برخی از رویدادها بر رویدادهای دیگر ترجیح داده شوند مخاطره وجود دارد. مخاطره را می‌توان احتمال تحمل زیان تعریف کرد. مخاطره امکان وقوع یک رویداد نامطلوب است. احتمال یک حادثه برابر با امکان وقوع آن است.

رابطه بین ریسک و بازده می‌توان رابطه بین ریسک و بازده را از طریق نشان دادن

چکیده

معتبرترین مدل انتخاب پرتفولیوی بهینه^۱، مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک^۲ مارکویتز (Markowitz) می‌باشد.

در این مقاله با بیان مفاهیم ثوری پرتفولیو به زبان ساده، به نحوه بهینه سازی پرتفولیو براساس مدل میانگین - واریانس^۳ مارکویتز پرداخته شده است. در قسمت دوم یک مثال عددی جهت نمایش نحوه محاسبه پارامترها و تعیین متغیرها آورده شده و در قسمت پایانی به نتیجه گیری پرداخته شده است.

مقدمه

فرایند سرمایه‌گذاری شامل دو وظیفه عمده می‌باشد. نخست تجزیه و تحلیل بازار و اوراق بهادر، که از طریق آن ویژگیهای ریسک و بازده مورد انتظار کل مجموعه سرمایه‌گذاری ممکن ارزیابی می‌شود.

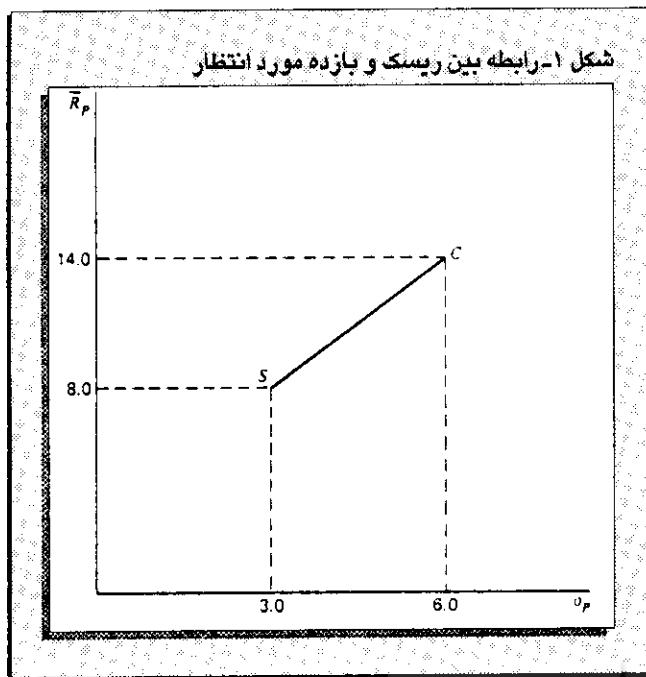
وظیفه دوم تشکیل پرتفولیوی مطلوب از دارایها می‌باشد. این وظیفه شامل تعیین بهترین فرستهای ممکن ریسک - بازده از پرتفولیوهای سرمایه‌گذاری موجود و انتخاب بهترین پرتفولیو از مجموعه موجود می‌باشد. وظیفه دوم ثوری پرتفولیو نامیده می‌شود.

از این رو در ابتدا به بیان مفاهیم ریسک و بازده مورد انتظار پرداخته می‌شود و سپس بحث را با مدل مارکویتز ادامه می‌دهیم.

ریسک (مخاطره) و بازده (پاداش^۴)

اگر خرید و فروش هر دارایی یا مجموعه‌ای از اوراق بهادر منجر

ویژگیهای پرتفولیوهای سرمایه‌گذاری بالقوه که دارای ارجحیت مساوی می‌باشند در نموداری که یک محور آن ریسک و محور دیگر آن بازده مورد انتظار را بیلین می‌کند، نشان داد. ترکیب بازده مورد انتظار و انحراف استاندارد را می‌توان به صورت شکل ۱ نمایش داد.



(۱) $y \leq \delta x$ باشد و یا اگر $y = \delta x$ و $y \geq \mu$ باشد، x بر σ ارجحیت دارد و برعکس.

(۲) انتخاب از مجموعه کارا^۵، یعنی انتخاب پرتفولیوی که مناسبترین ترکیب ریسک و عایدی را برای سرمایه‌گذار فراهم نماید.

تعیین پرتفولیوی کارا و انتخاب پرتفولیوی بهینه به منظور ایجاد پرتفولیوی کارا، مارکویتز ابتدا R_p (یا E_p) عایدی کل پرتفولیو را به صورت میانگین موزون (R_i , $i = 1, 2, \dots, n$) بیان می‌کند:

$$R_i = \frac{DPS}{P_i} + \frac{(1+\alpha)P_i - C}{P_i}$$

که در آن؛

DPS = سود نقدی هر سهم

P_i = قیمت سهم در ابتدای ماه (دوره)

P_{i+1} = قیمت سهم در پایان ماه (دوره)

C = آورده نقدی به هنگام افزایش سرمایه به ازای یک سهم

α = درصد افزایش سرمایه

از آنجا که R_i ها متغیرهای تصادفی‌اند، R_p نیز یک متغیر

تصادفی خواهد بود. به عبارت دیگر ارزش انتظاری و واریانس

عایدی پرتفولیو به صورت زیر خواهد بود:

$$E(R_p) = X_1 \bar{R}_1 + X_2 \bar{R}_2 + \dots + X_n \bar{R}_n \quad (1)$$

$$V(R_p) = \sum_{i=j}^n x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j \text{cov}(i, j) \quad (2)$$

۴۹ که در آن؛

مدل مارکویتز

در سال ۱۹۵۰ مارکویتز مدل پیشنهادی خود را برای انتخاب پرتفولیو ارائه نمود. مدل میانگین - واریانس مارکویتز مشهورترین و متداولترین رویکرد در مسئله تصمیم در مورد سرمایه‌گذاری می‌باشد؛ همچنانکه به عقیده مانو (Mao) کاراترین ابزار برای انتخاب پرتفولیوی بهینه، مدل برنامه‌ریزی ریاضی ارائه شده توسط مارکویتز می‌باشد. از بررسی‌های تجزیه نکات مورد توجه در مدل مارکویتز توجه به ریسک سرمایه‌گذاری نه تنها براساس انحراف معیار یک سهام، بلکه توجه به ریسک مجموعه سرمایه‌گذاری می‌باشد. مدل مارکویتز بر مبنای مفروضات زیر بیان شده است:

(۱) سرمایه‌گذاران ریسک گریزند و مطلوبیت مورد انتظار افزایشی است.

(۲) سرمایه‌گذاران پرتفولیو را بر مبنای میانگین و واریانس مورد انتظار عایدی انتخاب می‌نمایند.

(۳) هر سرمایه‌گذاری تا بنها تابع قابل تقسیم است.

(۴) سرمایه‌گذاران افق زمانی یک دوره‌ای داشته و این برای همه سرمایه‌گذاران مشابه است.

مسئله سرمایه‌گذاری مارکویتز را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

سرمایه‌گذاری (شخص الف) را در نظر بگیرید که یک عایدی مورد انتظار بالا را که مطلوب و عدم اطمینان عایدی را که نامطلوب است مورد نظر دارد. وی π ورقه بهادر پیش‌رو دارد و π_i عایدی ورقه i را یک متغیر با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 را در نظر می‌گیرد.

علاوه بر این فرض می‌شود که π_i ، کوواریانس بین عایدات هر دو

ورقه، شناخته شده باشد. اگر سرمایه‌گذار مقداری پول برای سرمایه‌گذاری در بین n ورقه داشته باشد سوال این است که مبلغ

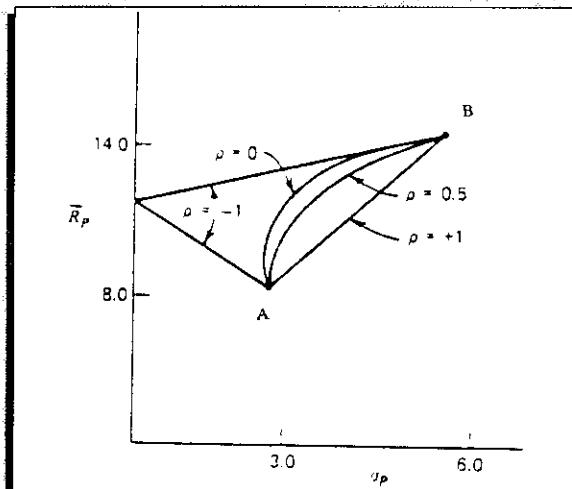
سرمایه‌گذاری چگونه بین n ورقه تخصیص یابد به نحوی که پرتفولیوی حاصل حداقل مطلوبیت مورد انتظار را نتیجه دهد.

مارکویتز پیشنهاد می‌کند که پاسخ سوال فوق باید در دو مرحله انجام پذیرد:

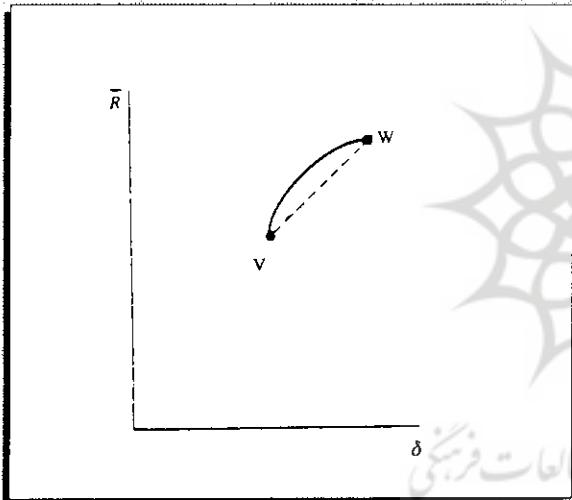
(۱) تعیین مجموعه پرتفولیوی کارا؛ پرتفولیوی کارا، پرتفولیوی

است باکمترین واریانس عایدی در بین تمامی پرتفولیوها با این عایدی مورد انتظار یکسان، و یا بیشترین عایدی مورد انتظار در بین تمامی آنها باید که واریانس مشابه دارند. به نماد ریاضی؛ اگر $y = \mu$ و

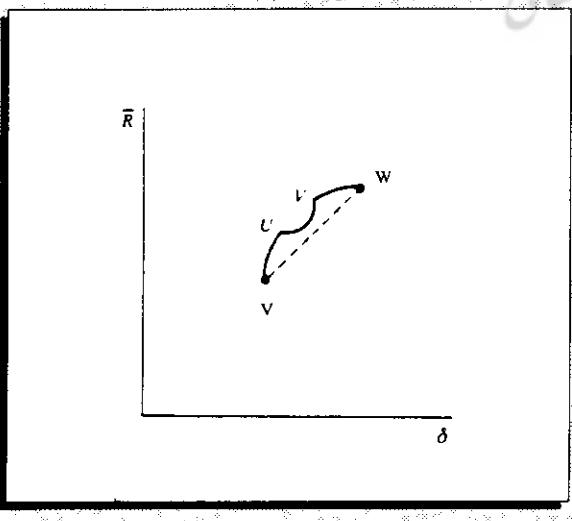
شکل ۲- رابطه بین بازده موزدانتظار و ریسک با ضرایب همیستگی مختلف



شکل ۳- مرز کارا (حالت ممکن)



شکل ۴- مرز کارا (حالت غیرممکن)



عایدی مورد انتظار ورقه ۱

کسری از کل منابع سرمایه گذاری شده در ورقه ۱

واریانس سهام ۱ام

کوواریانس بین سهام ۱ با سهام

۲

$\text{cov}(i,j) =$

با هر پرتفولیو می‌توان به عنوان یک ورقه سهام رفتار نمود.

فرض کنید که نقاط A و B در شکل ۲ بیانگر ارزشهای E_p و δ_p مربوط به دو پرتفولیو باشند.

اگر عایدات در دو پرتفولیو کاملاً مرتبط باشند منحنی بین نقاط A و B یک خط مستقیم و راست خواهد بود در غیر این صورت در بالا و سمت چپ خط مستقیم متصل کننده نقاط خواهد بود.

هر پرتفولیوی می‌تواند بوسیله یک نقطه در یک نمودار دو بعدی E_p و δ_p نمایش داده شود. با توجه به محدودیتهای اعمال شده از طرف سرمایه گذار تنها انتخاب پرتفولیوهای معینی امکانپذیر (قابل حصول) خواهد بود. به عبارت کلی‌تر، هر ترکیبی از دو پرتفولیوی ممکن نیز امکانپذیر خواهد بود. در این صورت نقاط نمایش دهنده پرتفولیوهای ممکن تماماً یک ناحیه از نمودار E_p و δ_p را پر خواهند نمود. و این ناحیه در طول مرز انتهایی، محدب خواهد بود.

فرض کنید که V و W دو نقطه در مرز E_p و δ_p باشند. تمامی نقاط در مرز بین V و W در بالای خط مستقیم متصل کننده دو نقطه خواهند بود. شکل ۳ یک حالت ممکن و شکل ۴ یک حالت غیرممکن را نمایش می‌دهند.

هدف هر سرمایه گذار انتخاب بهترین پرتفولیو می‌باشد؛ به عبارت دیگر یافتن پرتفولیوی ممکن واقع بر مطلوبترین منحنی بی تفاوتی^۶. مسئله شخص الف یافتن ترکیب ممکن P و V_p (یا E_p) واقع بر قابل حصولترین منحنی بی تفاوتی می‌باشد. در شکل ۵ آن نقطه، نقطه B می‌باشد.

معادله هر منحنی بی تفاوتی شخص الف در شکل ۵ می‌تواند به صورت زیرنویشته شود:

$$\delta_p = \alpha_i + \lambda E_p \quad (3)$$

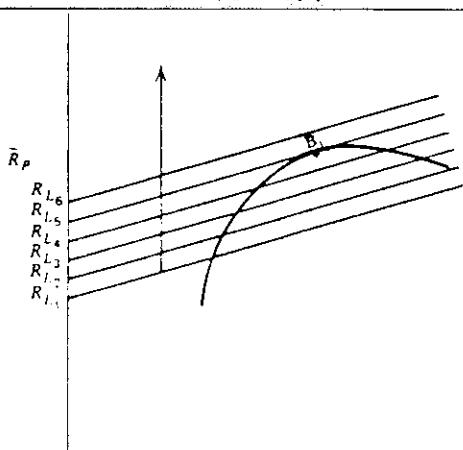
که λ (لامبда) بیانگر شبیه خط بوده و برای تمامی منحنیها مشابه می‌باشد. ارزش α نشانگر تقاطع افقی (طول از مبدأ) است که از خطی به خط دیگر متفاوت خواهد بود. بالاترین منحنی بی تفاوتی (دورترین از سمت چپ) بهترین منحنی خواهد بود. پس هدف شخص الف کمینه کردن α می‌باشد. با بازنویسی مجدد معادله فوق خواهیم داشت:

$$\alpha_i = -\lambda E_p + V_p \quad (4)$$

۴. پس هدف به شرح زیر خواهد بود:

$$\text{Minimize} -\lambda E_p + V_p \quad (5)$$

شکل ۵- مسئله انتخاب پرتفولیوی بهینه



جدول شماره ۱

		ورقه	دوره
۲	۱		
%۲	%۱۰	۱	
%۱۳	%۱		۲

مدلهای تک شاخصی^۸، چند شاخصی^۹ و اخیراً آرمانی^{۱۰} را برای انتخاب پرتفولیو پیشنهاد نموده‌اند. علاقه‌مندان جهت آشنایی بیشتر با مدل‌های مذکور می‌توانند به منابع مورد اشاره مقاله مراجعه نمایند.

مثال: اطلاعات مربوط به دو ورقه سهم برای دو دوره زمانی در دست می‌باشد (جدول شماره ۱). سیاست بهینه سرمایه‌گذاری را تعیین نمایید.

جواب

کام (اول) محاسبه پارامترها

i	j	(۱)	(۲)	(۳)	(۲) × (۳)
۱	۱۰	۲	۴/۵	۶	-۲۷
۲	۱۳	۱	-۴/۵	۶	-۲۷

$$\bar{R}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{N} = \% ۵/۵$$

$$\text{Var}(R_1) = \frac{\sum (R_i - \bar{R})^2}{N} = \% ۲۰/۲۵$$

$$\bar{R}_2 = \% ۸$$

$$\text{Var}(\bar{R}_2) = \% ۳۶$$

نتیجه‌گیری

با اینکه مدل میانگین - واریانس معتبرترین مدل در انتخاب پرتفولیو بوده است لیکن به دلیل مشکلات محاسبه (برآورد $\frac{R_1 + R_2}{2}$) پارامتر) و فنی (حل دستگاه‌های بی‌شمار)، و استوار بودن آن بر برخی مفروضات غیرواقعی، قابلیت کاربرد آن بخصوص هنگامی که تعداد سهام قابل بررسی افزایش می‌باید بسیار مشکل می‌نماید. از این رو محققان بعد از مارکویتز در جهت رفع مشکلات فوق

$$E_p = \sum_{i=1}^n X_i E_i, \quad V_p = \sum_{i,j} X_i X_j \delta_{ij}$$

$$\text{S.T: } \sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (6)$$

$$X_i, \lambda \geq 0$$

در مدل فوق شخص الف قصد دارد تا E_p را Max یا Min نماید.

از این بیانگر اهمیت E_p نسبت به V_p می‌باشد. برای هر ارزش λ ، شخص الف یک پرتفولیوی کارا خواهد داشت. نهایتاً مسئله ایجاد پرتفولیوهای کارا می‌تواند به صورت زیر بیان شود: ارزشهای X_i ای را باید که در محدودیت معادله (۶) و شرایط غیرمنفی بودن صدق نموده و در عین حال تابع هدف را بیشینه نماید. معادله (۶) بیان می‌کند که مقدار ورقه خریداری شده باید دقیقاً برابر با مقدار کل منابع موجود باشد. محدودیتهای غیرمنفی بودن، $X_i \geq 0$ ، امکان فروش استقراضی^۷ هر ورقه را غیرممکن می‌سازد و تابع هدف می‌گوید که در بین مجموعه حدود محدودیتها، ارزش X_i ها باید به نحوی انتخاب شوند که $E_p + V_p - \lambda E_p$ را به ترتیب کمینه یا بیشینه نماید.

اگر λ برابر صفر باشد مدل پرتفولیوی را با بیشترین E_p و اگر λ برابر با بی‌نهایت (یک عدد بسیار بزرگ) شود مدل پرتفولیوی را با کمترین V_p انتخاب خواهد نمود. ارزشهای میانه برای λ منجر به پرتفولیوی میانه از E_p و V_p خواهد شد. توجه نمایید که تابع هدف فقط انتخاب پرتفولیوهای بهینه را مجاز می‌شمارد. مجموعه کامل پرتفولیوهای بهینه با حل مدل برای ارزشهای λ ، بین صفر و بی‌نهایت (یعنی $\lambda \in \mathbb{R}^+$) بدست خواهد آمد.

یک روش حل برای مدل برنامه‌ریزی پرتفولیو دادن ارزشهای عددی به λ و سپس حل مسئله و کسب مجموعه معینی از ارزشهای عددی برای X_i ها می‌باشد. برای جلوگیری از محاسبات اضافی و تکراری λ باید به صورت ضمیمی در محاسبات منظور شود. بدین منظور در قسمت بعدی به منظور حل مدل، پرتفولیوی را با دو سهام در نظر گرفته و سپس بحث به پرتفولیوی با n ورقه سهم تعمیم می‌یابد.

که C_{ij} کوواریانس بین ورقة i با j و E_i عایدی مورد انتظار i ، می‌باشد.
برای مثال فوق خواهیم داشت:

X_1	X_2	λ_f	=	0	λ
۲(-/۲۰۲۵)	۲(-/۲۷)	-۱	-		۱/۰۵
۲(-/۲۷)	۲(-/۲۶)	-۱	=		۱/۰۸
۱	۱		-	۱	

با فرض $\lambda = \lambda$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$X_1^* = \%56 \text{ و } X_2^* = \%44$$

بی‌نوشت

- 1- Optimal Portfolio
- 2- Quadratic Programming Model
- 3- Mean - Variance Rule
- 4- Risk and Return
- 5- Efficient Frontier
- 6- Indifference Curve
- 7- Short Selling
- 8- Single- Index Model
- 9- Multi- Index Model
- 10- Goal Programming Model

منابع

- 1- Bodie Zvi., Kane Alex & Marcus Alan, Investments, 3d ed., IRWIN 1996.
- 2- Farrell James L., Portfolio Management: Theory and Application, 2d ed, McGraw- Hill 1998.
- 3- Lee Sang M. and Chesser Dalton L, "Goal programming for Portfolio Selection", the Journal of Portfolio Management (Spring 1980) 22-26.
- 4- Mao James, Quantitative Analysis for Financial Decisions, McMillan 1969.
- 5- Markowitz Harry M., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley 1959.
- 6- Rudd Andrew and Clasing Henry K., Modern Portfolio Theory: The Principles of Investment Management, Dowjones- Irwing 1982.
- 7- Sarant Marshall and Levy, Haim, Portfolio and Investment Selection, Theory and Practice Prentice- Hall 1984.
- 8- Sharp William F., Investments, Prentic- Hall, Englewood Cliffs 1976.
- 9- Spronk, Jaap and Hallerbach Winfried., "Financial Modeling: Where to Go? with an illustration for portfolio management", European Journal of Operational Research, (1997) 113-125.
- 10- اسلامی پیدگلی غلامرضا و هیبتی فرشاد، مدیریت پرتفوی با استفاده از مدل شاخصی، تحقیقات مالی، شماره ۹ و ۱۰، زمستان ۱۳۷۴ و بهار ۱۳۷۵.
- 11- تقوی مهدی، مدیریت مالی، ۱، دانشگاه پیام نور، ۱۳۷۴.
- 12- هیلبر فردیک، لیبر من جرالد ج، تحقیق در عملیات جلد ۱ و ۲، ترجمه مدرس و اردوان آصف وزیری، نشر تندر، ۱۳۶۳.

$$\delta_1 = \sqrt{\text{var}(R_1)} = \%4/5 \quad \delta_2 = \%6$$

$$\text{cov}(R_1, R_2) = \Sigma \frac{(R_{1i} - \bar{R}_1)(R_{2i} - \bar{R}_2)}{N} = \rho_{1,2}\delta_1\delta_2 = \%-27$$

گام (دوم) تعیین و انتخاب پرتفولیوی بهینه

روش (۱) بهینه‌سازی کلاسیک

مدل اساسی را به صورت زیر داریم:

$$\text{Min } Z = -\lambda E_p + V_p$$

$$\text{S.T. : } \sum_i X_i = 1$$

$$X_i, \lambda \geq 0$$

برای مثال فوق (دو ورقه) خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z = -\lambda [R_1 X_1 + R_2 X_2] + \text{Var}(R_1) X_1^2 + \text{Var}(R_2) X_2^2$$

$$+ 2X_1 X_2 \text{Cov}(R_1, R_2)$$

$$\text{S.T: } X_1 + X_2 = 1$$

$$X_1, X_2, \lambda \geq 0$$

با جایگذاری پارامترها خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z = -\lambda [1/0.55 X_1 + 1/0.8 X_2] + X_1^2 (1/20.25) + X_2^2 (1/36)$$

$$+ 2(-/27) X_1 X_2$$

$$\text{S.T: } X_1 + X_2 = 1$$

مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک می‌باشد که می‌توان از طریق روش ضرایب لاگرانژ آن را حل نمود، یعنی:

$$\text{Min } Z' = Z + \lambda_f (1 - \sum_i X_i)$$

به منظور بهینه‌سازی تابع فوق، بایستی شرایط زیر برقرار باشد:
 $\frac{\partial Z'}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial Z'}{\partial X_2} = 0, \frac{\partial Z'}{\partial \lambda_f} = 0$

با فرض $\lambda = \lambda$ ، نتیجه عبارت خواهد بود: $X_1^* = \%44$ و $X_2^* = \%56$ با

حل مدل برنامه‌ریزی کوادراتیک فوق برای λ های مختلف ($\lambda \in R^+$) مرز کارای پرتفولیو ایجاد می‌شود.

روش (۲) از آنجاکه با افزایش تعداد اوراق قابل بررسی و همچنین حل مدل با λ های مختلف حجم عملیات بشدت افزایش می‌یابد، می‌توان پارامترهای حاصل را در جدول زیر قرار داده و با ارزشهای مختلف برای λ آن را حل نمود:

X_1	X_2	X_3	λ_f	= constant	λ
$2C_{1,1}$	$2C_{1,2}$...	$2C_{1,N}$	-۱	۰
$2C_{2,1}$	$2C_{2,2}$...	$2C_{2,N}$	-۱	۰
:	:	:	:	:	:
$2C_{N,1}$	$2C_{N,2}$...	$2C_{NN}$	-۱	۰
۱	۱	...	۱	۰	۱

کادر مجرب طراحی سیستمهای کامپیوتری



کادر متخصص پیاده‌سازی نرم‌افزارهای کامپیوتری

سیستمهای کارآمد کاربردی کامپیوتری

نرم‌افزارهای کامپیوتری آماده
مالی اداری:

- حسابداری مالی
- اسناد ریافتی اپرداختنی
- اطلاعات پرسنلی
- حقوق و دستمزد
- ...

مشاران نرم‌افزار

طراحی و پیاده‌سازی انواع
سیستمهای کاربردی کامپیوتری:

- حسابداری مالی و صنعتی
- حسابداری فروش و مشتریان
- حسابداری دارایی‌های ثابت
- حسابداری انبار
- تدارکات و سفارشات
- کنترل حمل و نقل و ترجیح کالا
- بودجه و تأمین اعتبار
- پرسنلی و امور اداری
- حقوق و دستمزد کارکنان

سیستمهای جامع و یکپارچه کامپیوتری:

- سیستم جامع اطلاعات مدیریت
- سیستم جامع اطلاعات مالی
- سیستمهای جامع تلفیقی

با بیش از چهارده سال تجربه در طراحی و پیاده‌سازی سیستمهای کامپیوتری مالی، اداری و مدیریت

مشاران نرم‌افزار

کتابخانه ملی
جمهوری اسلامی ایران

اهمیت داری

کتابخانه ملی
جمهوری اسلامی ایران

چک

کتابخانه ملی
جمهوری اسلامی ایران

مرکز جامع علوم اسلامی

دین و اندیشه

نرم افزار حوب همپوشانه گران نیست

آیا می دانید در کشورهای پیشرفته قیمت نرم افزار چه تسبیتی با میانگین درآمد دارد؟

تلفن : ۹۷۳۱۴۴

۱۰٪ تخفیف ویژه اسند ماه

نیاپل

۱ نرم افزار بجای ۵ نرم افزار

منتخب شرکتهای دارنده گواهینامه ISO



نایر نرم افزارها:

- حسابداری مالی

- پرسنلی و حقوق دستمزد

- انبار و حسابداری انبار

آدرس: ایرانشهر شمالی - کوی برنا - پلاک ۳۳ - طبقه ۳ غربی

تلفن واحد فروش: ۸۸۴۹۲۸۷ - ۸۸۴۳۱۰۲ - ۸۸۴۵۶۷

واحد پشتیبانی: ۸۸۴۳۶۵۸ - ۸۸۴۵۶۶