دوفصلنامه بازی جنگ، سال سوم، شماره ۷، اسفند ۱۳۹۹

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۲

از صفحه ۷۷ تا صفحه ۹۵

تصمیم‌گیری در یک اقدام متقابل به کمک نظریه بازی‌ها

نوع مقاله: پژوهشی

سعدون محمودی نبی‌کندی*[1]

اکبر زارع چاوشی[2]

چکیده:

عمل قانونی اما غیردوستانه کشوری علیه کشور دیگر را که به تلافی یک عمل غیردوستانه اما قانونی و به منظور وادار کردن آن کشور به تغییر رفتار غیردوستانه خود انجام می‌گیرد «اقدام متقابل» می‌گویند. تصمیم‌گیری دولت صدمه دیده جهت انتخاب نوع اقدام یک جانبه خود یک مسئله چالش برانگیز است زیرا اقدام متقابل او واکنش دولت مسئول و جوامع بین‌الملل را به همراه دارد. در این مقاله به کمک بازی‌های حا صلجمع صفر موقعیت ت صمیم‌گیری را مدل سازی می‌کنیم. در واقع شرایط اقدام متقابل دولت صدمه دیده را با مدل بازی (X,Y,A) متناظر می‌کنیم که در آن X مجموعه اقدامات متقابل احتمالی دولت صدمه دیده (بازیکن دوست) بر علیه دولت مسئول و Y مجموعه واکنش‌های احتمالی دولت مسئول (بازیکن دشمن) پس از اقدام متقابل دولت صدمه دیده می‌باشد، همچنین A ماتریس سودمندی دولت صدمه دیده است. مدل را به روش ماکسی‌مین حل می‌کنیم، در این راستا از تئوری کاهش بازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی و حل آن در نرم افزار **متلب** کمک می‌گیریم.

واژگان کلیدی:

مسئله تصمیم‌گیری، نظریه بازی‌ها، اقدام متقابل، بازدارندگی

[1] پژوهشگر، مرکز شبیه‌سازی ریاضی، پژوهشکده آماد و فناوری‌های دفاعی و پدافند غیر عامل، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران.

[2] عضو هیئت علمی، مرکز شبیه‌سازی ریاضی، پژوهشکده آماد و فناوری‌های دفاعی و پدافند غیر عامل، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران.

* نویسنده مسئول: mahmoudi.math89@yahoo.com

مقدمه

نظریه بازی‌ها یکی از ابزارهای کاربردی در بازی جنگ و حل مسئله تصمیم‌گیری می‌باشد. هایوود[1] و رابینسون[2] در مقالات خود اهمیت نظریه بازی‌ها را در تصمیم‌گیری‌های نظامی نشان دادند [۳]، [۴]. بعدها کتاب‌هایی در زمینه نظریه بازی‌ها منتشر شد [۵]،[۶]،[۷]. در تصمیم‌گیری‌های نظامی بازی حاصلجمع صفر از اهمیت خاصی برخوردار است [۱]. کانتول[3] در مقاله‌ای با عنوان « آیا بازی حاصلجمع صفر می‌تواند تصمیم‌گیری‌های نظامی را بهبود بخشد» به اهمیت بازی حاصلجمع صفر پرداخت [۸]. در این مقاله موقعیت‌های نظامی به یک بازی حاصلجمع صفر کاهش داده می‌شود و با حل بازی می‌توان به تصمیم‌گیری در یک موقعیت نظامی کمک کرد. تفسیر عمیق بازی حاصلجمع صفر، ارتباط آن با تصمیم‌گیری‌های نظامی و روش‌های حل بازی را می‌توان در منابع [۹]، [۱۰]،[۱۱]،[۱۲]، [۱۳]، [۱۴] دید.

یکی از موقعیت‌های مهم تصمیم‌گیری نظامی، اقدام متقابل می‌باشد. راعی دهقی در مقاله‌ای تحت عنوان «اقدام متقابل و حقوق بین‌الملل» به بررسی مفهوم اقدام متقابل، شرایط قانونی آن و طرح‌های تصویب شده بین‌المللی در این زمینه پرداخته است [۲]. در این مقاله می‌توان به اهمیت تصمیم‌گیری درست در یک اقدام متقابل پی‌برد و به راحتی دریافت که موقعیت تصمیم گیری در یک اقدام متقابل علیه یک کشور مصداق یک بازی حاصلجمع صفر دو نفره است. چنین شرایطی به نویسندگان این انگیزه را می‌دهد که به کمک بازی حاصلجمع صفر دو نفره یک اقدام متقابل را مدلسازی کنند و فرایندی برای تصمیم‌گیری بدست آورند.

در این مقاله به کمک بازی‌های حاصلجمع صفر موقعیت تصمیم‌گیری دولت صدمه دیده را مدلسازی می‌کنیم. در واقع شرایط اقدام متقابل دولت صدمه دیده را با مدل بازی (X,Y,A) متناظر می‌کنیم که در آن X مجموعه اقدامات متقابل احتمالی دولت صدمه دیده (بازیکن دوست) بر علیه دولت مسئول و Y مجموعه واکنش‌های احتمالی دولت مسئول (بازیکن دشمن) پس از اقدام متقابل دولت صدمه دیده می‌با شد، همچنین A ماتریس سودمندی دولت صدمه دیده است.

روش ماکسی‌مین که به روش محافظه‌کارانه معروف است معمول‌ترین روش حل بازی‌های حا صلجمع صفر می‌با شد [۹]. یانگ و همکاران برای حل بازی حا صلجمع صفره دو نفره به روش ماکسی‌مین، ابتدا آن را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی کاهش می‌دهند. سپس برنامه‌ای

---

[1] Haywood
[2] Robinson
[3] Cantwell

برای حل آن در نرم افزار متلب[1] ارایه می‌دهند [۱۴]. در این پژوهش مدل بازی ارایه شده برای اقدام متقابل را به روش ماکسی‌مین و با استفاده از برنامه ارایه شده در مقاله [۱۴] حل می‌کنیم.

این مقاله در پنج بخش سازماندهی شده است. پس از بخش مقدمه، بخش بعدی مبانی نظری پژوهش می‌باشد که در آن مفاهیم بنیادی بازی‌های حاصلجمع صفر دو نفره ارایه می شود و با کاهش بازی به مسئله برنامه‌ریزی خطی یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای بازی حاصلجمع صفر بدست می‌آوریم. با استفاده از مدل برنامه‌ریزی ریاضی برنامه حل بازی در متلب ارایه می شود. در این بخش، همچنین مفهوم اقدام متقابل و شرایط آن ارایه می‌گردد. در بخش سوم یک اقدام متقابل را به کمک بازی‌های حاصلجمع صفر دو نفره مدلسازی می‌کنیم و فرایندی برای تصمیم‌گیری ارایه می‌شود. در بخش چهارم نتایج پژوهش و در بخش پایانی فهرست منابع ارایه می‌شود.

مبانی نظری پژوهش

بازی حاصل‌جمع صفر

تصمیم‌گیری در یک موقعیت می‌تواند به عنوان بازی دو نفره حاصلجمع صفر در نظر گرفته شود، هرگاه نتیجه هر دستاورد یکی از طرفین، فقدان و از دست دادن مشابه آن برای طرف دیگر باشد (من یک چیزی را بدست بیاورم به معنای آن باشد که طرف مقابل آن را از دست داده باشد). در نظریه بازی‌ها این مفهوم را حاصلجمع صفر می‌نامند. در نظریه بازی‌ها دو بازیکن را به عنوان بازیکنان منطقی در نظر می‌گیرند که هر کدام تلاش می‌کنند که دستاوردها را به حداکثر برسانند و فقدان را به حداقل برسانند. این فرضیات مشابه فرضیه‌های فرایند تصمیم گیری نظامی است. در این بخش مفاهیم بنیادی بازی حاصلجمع صفر ارایه می‌شود.

کتاب [۷] یک مدل از بازی حاصلجمع صفر دو نفره را به شکل زیر تعریف می‌کند.

تعریف: یک بازی حاصلجمع صفر دو نفره را با یک سه تایی (X,Y,A) نشان می‌دهند که در آن

الف) X یک مجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی عملکردهای بازیکن اول می‌باشد

ب) Y یک مجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی عملکردهای بازیکن دوم می‌باشد

ج) A یک تابع با مقادیر حقیقی روی مجموعه‌ی $X \times Y$ می باشد، در واقع برای هر $(x,y) \in X \times Y$، مقدار حقیقی $A(x,y)$ را داریم. در این حالت سه تایی (X,Y,A) را

---
[1] Matlab

یک مدل برای بازی گویند.
تفسیر این بازی به این شکل است که بازیکن اول $x \in X$ و بازیکن دوم $y \in Y$ را انتخاب می‌کنند و هیچ کدام از انتخاب طرف مقابل اطلاعی ندارند. وقتی انتخاب‌های شان انجام شد، هر کدام انتخاب‌هایشان را به معرض نمایش می‌گذارند. در این حالت عایدی بازیکن اول مقدار $A(x, y)$ می‌باشد. با توجه به شرایط بازی $A(x, y)$ می‌تواند واحد پول یا هر چیز دیگری باشد. اگر $A(x, y)$ مثبت باشد باید بازیکن دوم به بازیکن اول به مقدار $A(x, y)$ پرداخت کند و اگر منفی باشد باید بازیکن اول به بازیکن دوم پرداخت کند.
اگر $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ مجموعه‌ی عملکردهای بازیکن اول و $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعه‌ی عملکردهای بازیکن دوم باشد، آنگاه تابع A را روی مجموعه‌ی $X \times Y$ با یک ماتریس $m \times n$ به شکل زیر نمایش می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

که در اینجا برای $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ داریم $a_{ij} = A(x_i, y_j)$. این ماتریس را ماتریس سودمندی یا کاربرد بازیکن اول می‌نامند. هر عضو $x_i \in X$ را یک راهبرد خالص بازیکن اول و هر عضو $y_j \in Y$ را یک راهبرد خالص بازیکن دوم می‌نامند.
یک راهبرد مخلوط برای بازیکن اول یک توزیع احتمال $p = (p_1, \dots, p_m)$ روی مجموعه عملکردهای این بازیکن یعنی X می‌باشد که در آن $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ و برای هر $1 \le i \le m$ این بازیکن عملکرد x_i به احتمال p_i انجام می‌دهد (یعنی بازیکن اول در $100p_i$ درصد مواقع عملکرد x_i را انتخاب می‌کند). به طور مشابه راهبرد مخلوط برای بازیکن دوم تعریف می‌شود.
حال اگر مجموعه‌ی تمام توزیع‌های احتمال روی مجموعه‌های X و Y را به ترتیب با $\Delta(X)$ و $\Delta(Y)$ نشان دهیم سودمندی مورد انتظار برای بازیکن اول وقتی که بازیکن اول راهبرد مخلوط x و بازیکن دوم راهبرد مخلوط y را انتخاب کند برابر $x^T A y$ می‌باشد.
توجه داشته باشید که یک راهبرد خالص می‌تواند به عنوان یک راهبرد مخلوط در نظر گرفته شود. برای نمونه راهبرد خالص $x_i \in X$ با راهبرد مخلوط $p = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$ یکی در نظر گرفته شود زیرا در این حالت احتمال انجام راهبرد x_i برابر ۱ و بقیه راهبردها برابر صفر است و لذا فقط عملکرد x_i انجام می‌شود. اگر $y_j \in Y$ نیز یک راهبرد خالص دیگر باشد آن را به شکل مخلوط با $q = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$ یکی می‌گیریم در این حالت سودمندی مورد انتظار برابر $p^T A q = a_{ij}$ می‌باشد که در واقع سودمندی ترکیب دوراهبرد

خالص x_i و y_j را نشان می‌دهد.
ق ضیه زیرکه به ق ضیه مینی‌ماکس (یا ماک سی‌مین) معروف ا ست ن شان می‌دهد که بازی‌های حاصلجمع صفر دو نفره دارای جواب بهینه می‌باشند. این قضیه را می‌توان در [۹] دید.
قضـــیه (مینی‌ماکس): با فرضـــیات بالا، برای هر بازی حاصـــلجمع صـــفر دو نفره با ماتریس کاربردهای $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ داریم

$$\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T A y = \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T A y$$

در قضـیه بالا به ازای یک یا چند $(x,y) \in \Delta_m \times \Delta_n$ تسـاوی رخ می‌دهد. در این صـورت (x,y) را یک جواب بهینه بازی می‌نامند. در این حالت ســـودمندی مورد انتظار این جواب بهینه یا به عبارتی مقدار زیر را ارزش بازی می‌نامند

$$V = \max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n} x^T A y = \min_{y\in\Delta_n}\max_{x\in\Delta_m} x^T A y.$$

مفهوم ماکســی‌مین به عنوان روش بدبینانه یا محافظه‌کارانه معروف اســت. زیرا راهبرد بهینه را بین بدترین حالت‌های ممکن ســـناریو تعیین می‌کند. این روش برای بازیکن آبی یک جواب را فراهم می‌کند با این فرض که دشـــمن بهترین عملکرد را انتخاب می‌کند. لذا بازیکن دوســـت سعی می‌کند از میان مینیمم بازدهی‌های ممکن ماکسیمم را انتخاب کند. توجه دا شته با شید که بازیکن د شمن سعی بر این دارد که د ستاوردهای بازیکن دو ست را کاهش دهد لذا بازیکن دوســـت با این دیدگاه از بازیکن دشـــمن، برای هر عملکرد دســـتاورد مینیمم خود را در نظر می‌گیرد و از میان این دستاوردها ماکسیمم را انتخاب می‌کند.

برنامه‌ریزی خطی[1]

روش برنامه‌ریزی خطی یکی از گســتردە‌ترین روش‌ها در حل مسـائل بهینه سـازی و اقتصـادی می‌با شد. در این بخش، به کمک منبع [۱۴]، به روش برنامه‌ریزی خطی به حل بازی حاصلجمع صفر می‌پردازیم.
تعریف: برنامه ریزی خطی یا LP، یک روش بهینه‌ســـازی برای ســـیســـتمی خطی از قیود یا محدودیت‌ها و یک تابع هدف است که در آن، کمیتی برای بهینه کردن تعریف شده است. هدف از برنامه‌ریزی خطی، یافتن مقادیری از متغیرها اســـت که به ازای آن‌ها تابع هدف کمینه یا بیشینه می‌شود.
به عبارت دقیق‌تر یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم ریاضی زیر می‌باشد:

$$\min z = f^T x$$

[1] Linear programming

$$\text{s.t.}\begin{cases} A.x \le b \\ Aeq.x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

که در آن f، x، b، beq، lb و ub بردار می‌باشند، همچنین A و Aeq ماتریس‌اند. در این مسئله z را تابع هدف می‌نامند که می‌خواهیم کمترین مقدار ممکن آن را، با در نظر گرفتن قیودی که برای متغیر x در نظر گرفته شده است، بدست آوریم.

برای حل این مسئله از دستور linprog از جعبه ابزار بهینه‌سازی متلب به شکل زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{gathered} \mathrm{f} = [f_1, \dots, f_n] \\ A = [a_1; \dots; a_m] \\ b = [b_1; \dots; b_m] \\ Aeq = [a'_1; \dots; a'_k] \\ Beq = [b'_1; \dots; b'_k] \\ lb = [l_1; \dots; l_n] \\ ub = [u_1; \dots; u_n] \end{gathered}$$

$$x = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

توجه کنید که در برنامه بالا تعداد متغیرها n و A و Aeq به ترتیب ماتریس‌های $m \times n$ و $k \times n$ هستند. همچنین a_i و a'_i سطرهای ماتریس‌اند. و اگر هر کدام از قیود مانند Aeq وجود نداشته باشد در برنامه جای آنها را به شکل زیر خالی می‌گذاریم:

$$x = linprog(f, A, b, [\ \ ], [\ \ ], lb, ub)$$

مثال: مسئله بهینه‌سازی زیر را با دو متغیر در نظر بگیرید

$$\min_{x,y} \quad -143x - 60y$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 120x + 210y \le 15000 \\ 110x + 30y \le 4000 \\ x + y \le 75 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

اکنون این مسئله را در متلب به شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{gathered} \mathrm{f} = [-143, -60] \\ A = [120, 210; 110,30 ; 1,1] \end{gathered}$$

$$b = [15000; 4000; 75]$$
$$lb = [0; 0]$$
$$linprog(f, A, b, [\quad], [\quad], lb)$$

پس از اجرای این برنامه پاسخ مسئله را به صورت زیر خواهیم داشت

```
ans =

 21.8750
 53.1250
```

کاهش بازی حاصلجمع صفر دو نفره به مسئله برنامه‌ریزی خطی

فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس سودمندی یک بازی با جمع صفر با بعد $m \times n$ باشد اگر بازیکن آبی از راهبرد مخلوط $(p_1, \dots, p_m)$ و بازیکن قرمز راهبرد ستون j ام را انتخاب کند، در این حالت سودمندی بازیکن آبی برابر $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ است. حال اگر ارزش بازی برابر V باشد آنگاه طبق قضیه مینی ماکس که در ابتدای بخش گفته شد داریم

$$V = \max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y$$

اگر $p = (p_1, \dots, p_m)$ راهبرد بهینه بازیکن آبی، $y' = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)^T$ و A_j ستون j ام ماتریس A باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} &= pA_j \\ &= pAy' \\ &\geq \min_{y \in \Delta_n} pAy \\ &= \max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y \\ &= V \end{aligned}$$

لذا تا به حال توانسته‌ایم قیود زیر را برای یک راهبرد بهینه $p = (p_1, \dots, p_m)$ بدست آوریم:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq V \,; \quad j = 1, \dots, n.$$

حال اگر a یک عدد صحیح مثبت باشد، با جمع طرفین رابطه بالا با a قیود زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i (a_{ij} + a) \geq V + a \,; \quad j = 1, \dots, n.$$

در نتیجه می‌توان درایه‌های ماتریس A را به یک ماتریس با درایه‌های مثبت تغییر داد. حال اگر طرفین رابطه را بر $V + a$ تقسیم کنیم آنگاه قیود زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{V+a}(a_{ij}+a)\geq 1\ ;\quad j=1,\dots,n.$$

حال با قرار دادن $x_i=\frac{p_i}{V+a}$ ، جواب بهینه بازی برابر با $p=(p_1,\dots,p_m)$ است که در آن $p_i=x_i(V+a)$. از طرفی

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{V+a}=\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i}{V+a}=\frac{1}{V+a}\ ;\quad j=1,\dots,n.$$

اما بازیکن دوست می‌خواهد تا جایی که امکان دارد ارزش بازی یعنی V را افزایش دهد که این با کمینه کردن $\frac{1}{V+a}$ یعنی $\sum_{i=1}^{m}x_i$ معادل اســـت. درنتیجه جواب بهینه یک بازی با جمع صفر به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر کاهش می‌یابد

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}x_i$$
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_i(a_{ij}+a)\geq 1\ ; & j=1,\dots,n.\\ x_i\geq 0\ ; & i=1,\dots,m\end{cases}\qquad(۱)$$

حال اگر $z=(z_1,\dots,z_m)$ جواب بهینه مســـئله برنامه ریزی بالا باشـــد آنگاه $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}z_i}z$ راهبرد بهینه بازیکن آبی و $V=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}z_i}-a$ ارزش بازی است.

حال با ضرب محدودیت‌های $\sum_{i=1}^{m}x_i(a_{ij}+a)\geq 1$ در -1 به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌رسیم.

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}x_i$$
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_i(-a_{ij}-a)\leq -1\ ; & j=1,\dots,n.\\ x_i\geq 0\ ; & i=1,\dots,m\end{cases}\qquad(۲)$$

با روشی مشابه راهبرد بهینه بازیکن قرمز از مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر بدست می‌آید:

$$\max w=\sum_{j=1}^{n}y_j$$
$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}y_j(a_{ij}+a)\leq 1\ ; & i=1,\dots,m.\\ y_j\geq 0\ ; & j=1,\dots,n.\end{cases}\qquad(۳)$$

حل بازی حاصلجمع صفر دو نفره در متلب

با توجه به مطالعه موردی مقاله، بازیکن دوست برای دستابی به راهبرد بهینه طبق مراحل زیر عمل می‌کند:

۱. . با روش تسلط تا حد ممکن ماتریس سودمندی را ساده می‌کنیم: فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس سودمندی بازی پس از مدلسازی باشد. گوییم عملکرد i ام بازیکن اول بر عملکرد k ام این بازیکن تسلط دارد هرگاه برای هر j دلخواه داشته باشیم $a_{ij} \geq a_{kj}$. در این حالت بازیکن دوست می‌تواند عملکرد k ام را از میان عملکردهایش حذف کند بدون اینکه تاثیری منفی در خواسته‌های او در رسیدن به جواب بهینه داشته باشد. در واقع در این حالت تحت هر شرایطی عملکرد i ام از عملکرد k ام بهتر است. به طور مشابه عملکرد j ام بازیکن دوم بر عملکرد h ام این بازیکن تسلط دارد هرگاه برای هر i دلخواه داشته باشیم $a_{ij} \leq a_{ih}$. در این حالت نیز بازیکن دشمن ستون h ام (یعنی عملکرد h ام) را از ماتریس کاربردها حذف خواهد کرد. توجه داشته باشید این مرحله فقط جهت ساده‌سازی می‌باشد و تاثیری در جواب بهینه ندارد لذا می‌توانیم حل مدل را از گام بعد شروع کنیم.

۲. درایه های ماتریس را با عدد مثبت a جمع می‌کنیم تا از حالت منفی خارج شود.

۳. اگر A ماتریس حاصل از مراحل ۱ و ۲ باشد، بنا بر معادله ۲، مسئله برنامه ریزی خطی زیر را داریم:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i(-a_{ij}) \leq -1 \,; & j = 1, \dots, n. \\ x_i \geq 0 \,; & i = 1, \dots, m \end{cases} \tag{۴}$$

۴. برنامه این مسئله در متلب به شکل زیر است:

$$\begin{gathered} z = [1, \dots, 1] \\ A = [-a_1; \dots; -a_n] \\ b = [-1; \dots; -1] \\ lb = [0; \dots; 0] \\ p = linprog(z, A, b, [], [], lb) \end{gathered} \tag{۵}$$

که در آن a_1، ... ،a_n ستون‌های ماتریس کاربردها پس از ساده‌سازی با روش تسلط است. z و lb ماتریس‌های $1 \times m$ بعدی و b ماتریس $1 \times n$ بعدی می‌باشند.

۵. اگر $p = (p_1, \dots, p_m)$ ، آنگاه $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} p$ راهبرد بهینه بازیکن دوست است.

مثال: یک بازی حاصلجمع صفر با ماتریس سودمندی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم راهبرد بهینه بازیکن آبی را بیابیم

۱. ماتریس در ساده‌ترین فرم قرار دارد و لذا با تسلط بیشتر از این ساده نمی‌شود.

۲. اگر همه‌ی درایه‌ها را با عدد 3 جمع کنیم به ماتریس زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۴. با گذشتن از مرحله سوم در بالا، برنامه حل در متلب به شکل زیر است

$$z = [1,1,1]$$
$$A = [-6, -2, -5; -1, -7, -5; -4, -5, -6]$$
$$b = [-1; -1; -1]$$
$$lb = [0; 0; 0]$$
$$p = linprog(z, A, b, [], [], lb)$$

۵. داریم $p = (0, 0, \frac{1}{5})$ و لذا راهبرد بهینه برابر $5p = (0, 0, 1)$ است. در نتیجه بازیکن آبی باید عملکرد سوم خود را انتخاب کند.

اقدام متقابل

در این بخش خلاصه‌ای از مفهوم اقدام متقابل، شرایط قانونی و طرح‌های مهم آن از مقاله [۲] ارایه می‌شود.

اقدام متقابل، یک مفهوم حقوقی با سابقه‌ای بیش از یک قرن و از جمله ضمانت اجراهای بین‌المللی است که در حوزه مسئولیت بین‌المللی به طور جدی مطرح است. در واقع وقتی یک کشور علیه کشور دیگر عملی متخلفانه انجام می‌دهد، دولت صدمه دیده جهت بازدارندگی خود را ملزم می‌داند علیه دولت مسئول دست به اقدام متقابل بزند. بازدارندگی؛ یعنی کوشش یکی از بازکنان برای اعمال نفوذ در دیگری تا او را از اقدام به عملی که متضمن خسارت یا هزینه‌ای برای اولی است باز دارد. مفهوم بازدارندگی در نظریه بازی‌ها زمینه‌ای مهم را در روابط بین المللی ایجاد کرده است. در بازدارندگی، یک بازیکن به بقیه بازیکنان که حاضر به همکاری نبودند

می‌فهماند که خواسته‌های خود را به گونه‌ای پیش ببرند که نتیجه نامطلوبی برای او نداشته باشد. در این حالت این بازیکن تعادل بازی را از دیدگاه بقیه بازیکنان تغییر می‌دهد. برای نمونه مسابقه تسلیحات هسته‌ای بین آمریکا و شوروی سابق راهبردی است که هر دو برای جلوگیری از حمله دیگری اتخاذ کرده‌اند. ترس از نابودی دو جانبه صلح را برقرار کرده است. در این بازی هر دو کشور از مفهوم بازدارندگی بهره برده‌اند.

تصمیم‌گیری در چنین شرایطی برای قربانی بسیار مشکل است زیرا ضعف در اقدام او مفهوم بازدارندگی را کامل نمی‌کند، از طرفی عدم تناسب اقدام متقابل می‌تواند اجماع بین‌المللی را علیه او داشته باشد و حتی بیشتر از این می‌تواند منجر به شروع یک جنگ تمام عیار شود. همچنین اقدام متقابل هرگز نباید در شکل زور مسلحانه روی دهد یا الزاما متقابل به مثل باشد؛ زیرا در این صورت، یک اقدام تلافی‌جویانه غیرقانونی خواهد بود. اگرچه اقدام‌های متقابل اغلب شکل اعمالی از همان نوع عمل غیردوستانه اصلی را به خود می‌گیرند اما باید از اقدام تلافی‌جویانه متفاوت باشند؛ چراکه اقدام تلافی‌جویانه عملی است که به خودی خود غیرقانونی می‌باشد، اما عمل متقابل از طریق اعمال قانونی صورت می‌گیرد.

سؤال اصلی در خصوص اقدام متقابل آن است که چه نوع اقداماتی برای متوقف کردن عمل دولت ناقض می‌توان به عمل آورد؟ آیا این اقدامات صرفا توسط دولتی باید انجام گیرد که از نقض تعهد به طور مستقیم صدمه و خسارت دیده است یا دولت‌های ثالث هم که به طور غیرمستقیم متضرر شده‌اند، می‌توانند چنین اقداماتی را به عمل آوردند؟ برای مثال، آیا دولت‌های مسلمان که از عملکرد رژیم اسرائیل در خصوص اقداماتش علیه ملت فلسطین به طور غیرمستقیم متضرر می شوند می‌توانند دست به اقدام متقابل بزنند؟ اصولاً مفهوم اقدام متقابل چیست؟ و معیار تشخیص دولت ثالث کدام است؟ آیا عنوان دولت ثالث می‌تواند متمایز از عنوان منتفعان باشد، به گونه‌ای که مفهوم «اعضای جامعه جهانی» را دربر گیرد یا به همان عنوان منتفعان که در ماده ۵۴ طرح ۲۰۰۱ بدان تصریح شده، محدود است؟

بر اساس ماده ۴۹ طرح ۲۰۰۱، هدف و محدوده اقدام متقابل به قرار ذیل است:

۱. دولت صدمه‌دیده تنها می‌تواند علیه دولت مسئول دست به اقدام متقابل بزند و هدف از این کار نیز وادار کردن آن دولت است که بر اساس تعهدات بین‌المللی خود عمل کند.

۲. اقدام متقابل محدود به مدت زمانی خواهد بود که دولت مسئول اقداماتی در راستای انجام تعهدات خود به عمل آورد.

۳. تا حد ممکن اقدام متقابل باید در مسیری قرار گیرد که از سرگیری انجام تعهدات را

امکان‌پذیر کند.

شرایط اقدام متقابل را می‌توان به شکل زیر جمع‌بندی کرد:

الف. استفاده از زور مطابق آنچه در منشور ملل متحد آمده ممنوع است.

ب. حقوق بنیادین بشر در هر حال باید مورد توجه و دفاع باشد.

ج. قواعد حقوق بشردوستانه باید رعایت شوند؛ در نتیجه، اقدام تلافی‌جویانه ممنوع است.

د. رعایت نرم‌ها و هنجارهای اولیه حقوق بین‌الملل ضروری است.

ه. نمایندگی دیپلماتیک یا کنسولی، آرشیو و سایر اسناد مربوط مورد احترام خواهند بود.

و. ضروری است کشورها از آیین حل و فصل پذیرفته شده بین خود استفاده کرده و اختلاف را حل کنند، مشروط به آنکه دولت مسئول حسن نیت خود را نشان داده باشد.

ز. اقدام متقابل نباید دربرگیرنده تأثیرات بسیار زیان‌آور برای دولت خاطی باشد. این بند، به اصل تناسب اشاره دارد که یک برابری بین تعهد نقض‌شده و پاسخ داده شده را بوجود می‌آورد.

حال که تا حدی با اقدام متقابل آشنا شدیم، براحتی می‌توان دید که در طی یک اقدام متقابل دولت قربانی با تحمیل یک خسارت به دولت ناقص امتیازی کسب می‌کند. لذا موقعیت تصمیم گیری در یک اقدام متقابل مصداق یک بازی حاصلجمع صفر است و با توجه به شرایط آن (بند ۳ ماده ۴۹ طرح ۲۰۰۱) تصمیم‌گیری با روش محافظه کارانه حل بازی حاصلجمع صفر منطقی است.

مدل‌سازی اقدام متقابل و ارایه فرایند تصمیم‌گیری

در این بخش ابتدا موقعیت تصمیم‌گیری در یک اقدام متقابل را به کمک بازی حاصلجمع صفر دو نفره مدلسازی می‌کنیم. سپس بر اساس بخش ۴-۲ راهبرد بهینه بازیکن دوست را تعیین می‌کنیم. در پایان فرایندی برای تصمیم‌گیری بازیکن دوست جهت یک اقدام متقابل ارایه می‌دهیم.

۳-۱- مدلسازی یک اقدام متقابل و ارایه روش حل مدل

یک مدل برای اقدام متقابل یک مدل بازی حاصلجمع صفر به شکل (X, Y, A) است که در آن

۱. $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ مجموعه اقدامات متقابل احتمالی دولت صدمه دیده (بازیکن دوست) بر علیه دولت مسئول می‌باشد

۲. $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعه واکنش‌های احتمالی دولت مسئول (بازیکن دشمن) پس از اقدام متقابل دولت صدمه دیده می‌باشد

۳. $A: X \times Y \to \{1, \dots, mn\}$ یک تابع روی مجموعه‌ی $X \times Y$ می‌باشد که با یک

ماتریس $m \times n$ به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

که برای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ، درایه $a_{ij} = A(x_i, y_j)$ سـودمندی دولت صـدمه دیده را، وقتی که اقدام متقابل x_i را انجام دهد و پس از آن واکنش y_j را از طرف دولت مسئول دریافت کند، نشان می‌دهد.

۴. از آنجا که هدف حل موضوع تصمیم‌گیری بازیکن دوست می‌باشد لذا پس از دستیابی به مدل بازی (X, Y, A) کافی است مدل برنامه‌ریزی خطی بازیکن دوست را بدست آوریم که بر اساس معادله ۴ به شکل زیر می‌باشد

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i(-a_{ij}) \leq -1\,; & j = 1, \dots, n. \\ x_i \geq 0\,; & i = 1, \dots, m. \end{cases} \qquad (۶)$$

حال با توجه به بند ۴ و ۵ از بخش ۴-۲- می‌توان راهبرد بهینه را تعیین کرد.

۵. بنا بر معادله ۵، برنامه حل مدل بالا در متلب به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} z &= [1, \dots, 1] \\ A &= [-a_1; \dots; -a_n] \\ b &= [-1; \dots; -1] \\ lb &= [0; \dots; 0] \\ p &= linprog(z, A, b, [], [], lb) \end{aligned} \qquad (۷)$$

که در آن a_1، ... ،a_n ستون‌های ماتریس کاربردها پس از ساده‌سازی با روش تسلط است. z و lb ماتریس‌های $1 \times m$ بعدی و b ماتریس $1 \times n$ بعدی می‌باشند.

۶. اگر $p = (p_1, \dots, p_m)$ ، آنگاه $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} p$ راهبرد بهینه بازیکن دوست است. در این حالت بازیکن دوست در $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} p_j$ درصد مواقع طبق عملکرد x_j عمل می‌کند.

۷. حال بازیکن دوسـت یکی از راهبردهای خالص را با بالاترین احتمال به عنوان اقدام متقابل انتخاب می‌کند.

اما آنچه که مهم اسـت دسـتیابی به مدل بازی (X, Y, A) می‌باشـد. برای دسـتیابی به چنین

مدلی طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:

۱. بازی بین دو بازیکن دولت صدمه دیده و دولت مسئول می‌باشد که دولت صدمه دیده را بازیکن دوست و دولت مسئول را بازیکن دشمن می‌نامیم.

۲. بازیکن دوست در مقابل نقض حقوقش می‌خواهد یک اقدام یک جانبه انجام دهد. هر اقدام یک جانبه او دارای سختی و هزینه‌هایی است. مجموعه تمام اقداماتی که این بازیکن می‌تواند انجام دهد را بر اساس هزینه و سختی کار و ... از بهترین به بدترین به شکل $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ از چپ به راست اولویت‌بندی می‌کنیم.

۳. بازیکن دشمن در مقابل اقدام متقابل بازیکن دوست واکنش نشان می‌دهد؛ برای نمونه واکنش‌های او می‌تواند به یکی از شکل‌های زیر باشد:

الف. به تعهد خود بازنگردد اما به دیگر تعهدهای خود پایبند باشد. به عبارت ساده‌تر مشابه این عمل متخلفانه را تکرار نکند. وقتی بازیکن دوست با اقدام متقابل خود بازیکن دشمن را ملزم به چنین واکنشی می‌کند در روابط بین‌الملل گویند که بازیکن دوست در بازدارندگی موفق بوده است.

ب. بازیکن دشمن به تعهد خود بازگردد.

ج. بازیکن دشمن تمام تعهدات خود یا بخشی دیگر از آنها را به هم بزند.

د. بازیکن دشمن یک جنگ تمام عیار را شروع کند.

وقتی شدت اقدام متقابل بالا باشد و آسیب زیادی به بازیکن دشمن بزند ممکن است او یکی از واکنش‌های ج یا د را انجام دهد، به همین دلیل روش محافظه‌کارانه برای یافتن راهبرد بهینه بازیکن دوست مناسب است.

حال در این مرحله از مدلسازی واکنش‌های احتمالی بازیکن دشمن را شناسایی می‌کنیم. فرض کنید $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعه واکنش‌های احتمالی بازیکن دشمن باشد.

۴. حال ماتریس کاربردهای زیر را تشکیل می‌دهیم

x_1					
$\vdots$					
x_i	y_{i1}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{in}
$\vdots$					
x_m					

که در آن $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{in}\}$ یک ترتیب از واکنش‌های بازیکن دشمن بر اساس انتظاری است که ما از واکنش احتمالی بازیکن دشمن در مقابل اقدام یک جانبه a_i داریم.

۵. بازیکن دوست با توجه به هزینه‌هایی که برای اقدام یک جانبه x_i داشته تعیین می‌کند که آیا در ازای دریافت واکنش y_{ij} پیروز میدان هست یا خیر؟ به این شیوه در مولفه‌های جدول بالا کلمات برد یا باخت را جایگذاری می‌کند.

۶. با توجه به منافع خود ابتدا درایه‌های برد را با شروع از عدد mn، ارزش‌گذاری می‌کنیم. این ارزش‌گذاری توسط دکترین نظامی انجام می‌شود.

۷. حال درایه‌های باخت را با شروع از عدد 1، ارزش‌گذاری می‌کنیم. . این ارزش‌گذاری نیز توسط دکترین نظامی انجام می‌شود.

۸. حال جدول زیر را با اعداد بدست آمده برای ترکیب اقدام متقابل و واکنش دریافتی تکمیل می‌کنیم:

A	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n
x_1					
$\vdots$					
x_i					
$\vdots$					
x_m					

۳-۴- فرایند تصمیم‌گیری در یک اقدام متقابل

فرایند تصمیم‌گیری جهت انجام یک اقدام متقابل به شکل زیر است:

۱. مجموعه اقدامات متقابل احتمالی خود را بر علیه دولت مسئول به شکل a_1، ...، a_m در نظر می‌گیریم.

۲. مجموعه واکنش‌های احتمالی دولت مسئول را پس از اقدام متقابل خود به شکل b_1، ...، b_n در نظر می‌گیریم.

۳. بنا بر الگوریتم گفته شده در بخش (۱-۳) ماتریس کاربردها را بدست می‌آوریم.

۴. بنا بر معادله ۷، برنامه حل مدل را می‌نویسیم که پاسخ به شکل $p = (p_1, \dots, p_m)$ می‌باشد.

۵. در این حالت $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} p$ راهبرد بهینه بازیکن دو ست ا ست. حال اگر $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ عملکردهای باقیمانده ،پس از ساده سازی تسلط، برای بازیکن دو ست با شد، بازیکن دو ست در $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} p_j$ درصد مواقع طبق عملکرد a_j عمل می کند.

۶. یکی از راهبردهای خالص a_i را با بالاترین درصد به عنوان اقدام متقابل انتخاب می‌کنیم.

مثال: فرض کنید کشور y علیه کشور ما یک عمل متخلفانه انجام می‌دهد و ما می‌خواهیم در یک اقدام متقابل به او پاسخ دهیم. اگر پیشنهادهای مسئولان جهت اقدام متقابل سه عملکرد $\{a, b, c\}$ باشد، طبق فرایند زیر عمل می‌کنیم:

۱. مجموعه عملکردهای خود را بر اساس هزینه و سختی کار و ... از بهترین به بدترین اولویت بندی می‌کنیم. فرض کنید این اولویت بندی از چپ به راست به شکل $X = \{a, c, b\}$ باشد.

۲. مجموعه واکنش‌های احتمالی کشور y را، با توجه به اقدامات خود در قسمت۱، مشخص می‌کنیم. فرض کنید عملکردهای $Y = \{d, e, f, g\}$ مجموعه واکنش‌های احتمالی دولت y باشد.

۳. (مدلسازی موقعیت) فرض کنید اولویت‌بندی عملکردهای دشمن در مقابل هر عملکرد ما به شکل زیر باشد:

a	d	f	e	g
c	d	g	e	f
b	d	e	f	g

حال حالت‌های برد و باخت خود را به شکل زیر تعیین می‌کنیم:

a	d برد	f برد	e باخت	g باخت
c	d برد	g برد	e باخت	f باخت
b	c برد	e باخت	f باخت	g باخت

از عدد ۱۲ شروع کرده و درایه‌های برد را ارزش‌گذاری می‌کنیم. این ارزش گذاری باید توسط دکترین نظامی انجام شود. برای مثال فرض کنید ارزش گذاری به شکل زیر باشد:

a	d برد ۱۲	f برد ۹	e باخت	g باخت
c	d برد ۱۱	g برد ۱۰	e باخت	f باخت
b	d برد	e باخت	f باخت	g باخت

حال حالت‌های باخت را ارزش‌گذاری می‌کنیم:

a	d برد ۱۲	f برد ۹	e باخت ۳	g باخت ۲
c	d برد ۱۱	g برد ۱۰	e باخت ۷	f باخت ۶
b	d برد ۸	e باخت ۴	f باخت ۵	g باخت ۱

در نتیجه ماتریس کاربردها به شکل زیر بدست می‌آید

A	d	e	f	g
a	۱۲	۳	۹	۲
c	۱۱	۷	۶	۱۰
b	۸	۴	۵	۱

در این حالت (X, Y, A) یک مدل برای اقدام متقابل بازیکن دوست می باشد که $X = \{a, c, b\}$، $Y = \{d, e, f, g\}$ و A ماتریس بالا می‌باشد.

۴. (حل مدل) اگر درایه‌های متناظر با عملکرد c خود را در نظر بگیریم می‌بینیم که از مقادیر متناظر با عملکرد b بیشترند. لذا ماتریس با روش تسلط از دیدگاه ما (بازیکن دوست) به شکل زیر ساده می‌شود

A	d	e	f	g
a	۱۲	۳	۹	۲
c	۱۱	۷	۶	۱۰

حال اگر با دیدگاه بازیکن دشمن به مسئله نگاه کنیم، می‌دانیم که بازیکن دشمن خواهان کاهش دستاوردهای بازیکن دوست است لذا از دید دشمن عملکرد e بر عملکردهای d تسلط دارد لذا با حذف ستون d به ماتریس ساده زیر می‌رسیم:

A	e	f	g
a	۳	۹	۲
c	۷	۶	۱۰

حال برنامه این بازی در متلب به شکل زیر است:

$$z = [1,1]$$
$$A = [-3, -7; -9, -6; -2, -10]$$

$$b = [-1; -1; -1]$$
$$lb = [0; 0]$$
$$p \ = \ linprog(z, A, b, [], [], lb)$$

با اجرای برنامه جواب برابر $p = (\,0 \cdot 0222,\ \ 0 \cdot 1333\,)$ اســت. لذا راهبرد بهینه ما برابر $\frac{1}{0.1555}p = (\,0 \cdot 1427527,\ \ 0.85723473)$ می‌باشد. در نتیجه ما باید در ۱۴ درصد مواقع طبق عملکرد a و در ۸۶ درصد مواقع طبق عملکرد c عمل کنیم. پس می‌توانیم عملکرد c را به عنوان اقدام متقابل انتخاب کنیم.

نتیجه گیری

کانتول[۱] در مقاله خود موقعیت تصمیم‌گیری در صحنه نبرد را به کمک بازی حاصلجمع صفر دو نفره مدلسازی کرده است [۸] . او در یک مثال بر اساس توانایی نظامی طرفین جنگ و موقعیت قراگیری نیروهای آنها روشـــی برای مدلســـازی ارایه می‌دهد. همچنین جواب بهینه با روش ماکسی‌مین و به کمک نرم افزار گمز [۲] بدست می‌آید.

شرایط ت صمیم‌گیری در یک اقدام متقابل با توجه به دریافت واکنش احتمالی از دولت م سئول مشــابه تصــمیم‌گیری در صــحنه نبرد اســت. لذا مقاله [۸] را الگوی مدلســازی خود و اســاس دســتیابی به جواب بهینه قرار دادیم. از آنجا که برنامه حل بازی به روش ماکســی‌مین در متلب ساده‌تر است از الگوی کاهش مدل بازی حاصلجمع صفر به مسئله برنامه ریزی خطی بر اساس مقاله [۱۴] استفاده می‌کنیم و برنامه حل مدل را از این مقاله دریافت کردیم.

مدلســـازی اقدام متقابل به کمک بازی‌های حاصـــلجمع صـــفر و ارایه فرایند شـــش مرحله‌ای تصمیم‌گیری مهم‌ترین نتایج پژوهش می‌باشد.

قدردانی

از کلیه اساتید و خبرگانی که با صرف وقت ارزشمند خود در خصوص تکمیل و انجام این پژوهش ما را یاری نمودند کمال تشکر را داریم.

منابع

[۱]. بیگدلی، حمید. (۱۳۹۸). مدلسازی مسائل جنگ الکترونیک با استفاده از بازی مجموع صفر، دوفصلنامه بازی جنگ، سال دوم، شماره ۵، پاییز و زمستان.

[۲]. راعی دهقی، مسعود. (۱۳۹۰). اقدام متقابل و حقوق بین‌الملل، معرفت سال بیستم، شهریور ۱۳۹۰ شماره ۶ (پیاپی ۱۶۵) ویژه ی حقوق، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی .

---

[۱] Cantwell
[۲] GAMS

[3] Haywood, O. G. (1954). *Military decision and game theory*. s.l. : J Oper Res Soc,Vol. 2 .
[4]. Robinson, T. W. (1970). *Game Theory and Politics. Recent Soviet Views*. s.l. : Santa monica.
[5]. Berwanger, Dietmar. (2011). *Introduction to Strategic Games*.
[6]. Rasmusen, Eric. (1989). *Games and information: An introduction to Game Theory*. s.l. : Oxford, UK: Basil Blackwell.
[7]. Thomas, S. F. (2014). *Game Theory*. s.l. : 2nd ed, Mathematic Department, UCLA.
[8]. Cantwell, G. (2003). *CAN TWO PERSON ZERO SUM GAME THEORY IMPROVE MILITARY DECISION-MAKING COURSE OF ACTION SELECTION?*. School of Advanced Military Studies United States Army Command and General Staff College Fort Leavenworth. Kansas Academic Year 02-03.
[**9**]. Bartlett, P. (2016). *Lecture 7: two player zero-sum games*.
[**10**]. Fox, William P. (2016). *Applied Game Theory to Improve Strategic and Tactical Military Decisions*, Journal of Defense Management, DOI: 10.4172/2167-0374.1000147.
[**11**]. Andreas H, Hamel. & Andreas Lohne. (2018). *A set optimization approach to zero-sum matrix games with multi-dimensional payoffs*. Mathematical Methods of Operations Research , 88(3).
[**12**]. Cook, W.D. (1976). *Zero-sum games with multiple goals*. Naval Research Logistics Quarterly , 23(4).
[**13**]. Ghose, D. & Prasad, U.R. (1989). *Solution concepts in two-person multicriteria games.* Journal of Optimization Theory and Applications, 63(2).
[**14**]. Yang. Y, Guo. Y, Feng. L. & Di, J. (2011) *Solving two-person zero-sum game by Matlab.* Applied Mechanics and Materials , Vols. 50-51, *pp 262-265.*