دانشگاه فرهنگیان *Farhangian University*

فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه *Quarterly Journal of Education in Basic Sciences*

دوره هشتم، شماره ۲۸، پاییز ۱۴۰۱ *Volume 8, Issue 28, Autumn, 2022*

پروتکل عمومی برای اندازه‌گیری ناوردای چندجمله‌ای از درجه دو برای حالت خالص N-کیوبیتی اختیاری

ناصر کریمی[۱]، مرضیه یحیوی[۲]

دریافت:۱۴۰۱/۳/۱۷ پذیرش:۱۴۰۱/۶/۲۳

چکیده

یکی از روش‌های محاسباتی عمیق و هوشمند برای رده‌بندی کمیت خاص، استفاده از مفهوم یادگیری ماشینی است. در این مقاله، ما حالت‌های کوانتومی N-کیوبیتی زوج را با استفاده از ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ به‌عنوان معیار درهم‌تنیدگی رده‌بندی می‌کنیم. ابتدا یک پروتکل کلی برای اندازه‌گیری ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ یک حالت خالص N -کیوبیتی زوج دلخواه پیشنهاد می‌کنیم. سپس، براساس تکنیک‌های یادگیری ماشین، با استفاده از ادغام شبکه عصبی کلاسیک و محاسبات کوانتومی، رده‌بند ناوردای چند جمله‌ای از درجه دوی صفر یا غیرصفر می‌سازیم، حتی اگر الگوی ورودی ناقص باشد. با توجه به برابری معیار درهم تنیدگی چند جزئی واقعی و ناوردای چند جمله ای از درجه ۲ برای حالت X، حالت GHZ را به عنوان حالت خاص Xدر نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که صفر بودن ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ نشان می دهد که حالت مورد نظر کاملاً جداپذیر است و متعلق به برچسب کلاس "۰" است، در غیر این صورت حالت درهم‌تنیده می‌شود و متعلق به برچسب کلاس "۱" است.

کلمات کلیدی:" در همتنیدگی;"چند جمله ای; "یادگیری ماشین".

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

[۱]. استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، تهران ایران،نویسنده مسئول، n.karimi@cfu.ac.ir

[۲]. گروه فیزیک نظری و اخترفیزیک، دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

۱. مقدمه

محاسبات کوانتومی با پیشی گرفتن از روش‌های کلاسیک برای مسائل مختلف، در یافتن الگوریتم‌هایی که باعث تسریع در الگوریتم‌های یادگیری ماشین کلاسیک می‌شوند، به موفقیت دست یافته است [۱-۵]. یادگیری ماشینی به عنوان هسته هوش مصنوعی و علم داده[۶] از رشته علوم کامپیوتر آمده است که در آن هدف یادگیری الگوهای بالقوه از مجموعه داده‌های معین اولیه و تصمیم‌گیری یا پیش بینی وضعیت ناشناخته آینده براساس این الگوهای آموخته شده است. یادگیری ماشین بسیاری از جنبه‌های جامعه مدرن را قوت می‌بخشد و کاربردهای آن در سراسر علم، فناوری و تجارت فراگیر شده است[۸،۷]. درک جنبه‌های فیزیکی حالت‌های شبکه عصبی مصنوعی در حل مسائل بس-ذره‌ای با تکنیک‌های یادگیری ماشینی معرفی شده است [۹]. این نتایج نشان می‌دهند که یادگیری ماشین می‌تواند یک پلت فرم جدید برای حل برخی از مسائل فیزیک کوانتومی باشد. یادگیری ماشین کوانتومی، که ترکیبی از رشته های فیزیک کوانتومی و یادگیری ماشین است، در اواخر دهه ۹۰ و اوایل دهه ۲۰۰۰ به وجود آمد. انتظار می‌رود تحلیل داده‌های کلاسیک با استفاده از رایانه‌های کوانتومی، از طریق استفاده از اثرات مکانیکی کوانتومی مانند همدوسی و درهم‌تنیدگی، امکان شناسایی الگوهای پیچیده‌تر در چنین مجموعه‌های داده‌ای را فراهم کند. استفاده از الگوریتم‌های کوانتومی می‌تواند منجر به بهبود دقت الگوریتم‌های کلاسیک موجود و همچنین عملکرد محاسباتی آن شود. فراتر از کاربردهای گسترده آن در صنعت، یادگیری ماشین برای بررسی مسائل مربوط به فیزیک در سال‌های اخیر به کار گرفته شده است. تا به امروز تعدادی از کاربردهای امیدوارکننده، مانند توموگرافی حالت کوانتومی [۱۰]، مسئله بس-ذره‌ای کوانتومی [۱۱]، یادگیری هامیلتونی [۱۲]، تولید آزمایش‌های کوانتومی خودکار [۱۳]، شناسایی فازها و گذار فاز[۱۴-۱۶] پیشنهاد شده است. شبکه‌های عصبی با موفقیت به‌عنوان تقریب‌کننده تابع موج متغیر برای مدل‌سازی حالت پایه سیستم‌های کوانتومی بس-ذره‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تشخیص درهم‌تنیدگی یا جداپذیری حالت دوبخشی با روش یادگیری ماشینی شروع به مطالعه کرده است [۱۷-۱۹]. یادگیری عمیق کوانتومی، مسئله ایجاد مدار کوانتومی که عملکرد شبکه‌های عصبی را بهبود می‌بخشد، در چندین مقاله مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰-۲۲]. یادگیری رقابتی (CL) شکلی از یادگیری بدون نظارت در شبکه‌های عصبی مصنوعی است که در آن نورون‌ها برای پاسخ مناسب به یک الگوی ورودی با یکدیگر رقابت می‌کنند و سپس الگوی ورودی را می‌توان با الگوهای نمونه اولیه مقایسه کرد[۲۳]. این برای رده‌بندی الگوهای ورودی به مجموعه‌ای مجزا از رده‌های خروجی بسیار مفید است. در این مقاله، با استفاده از الگوریتم یادگیری رقابتی، به تشخیص ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ به عنوان معیار درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی N-کیوبیتی زوج تمرکز می‌کنیم. در حالت کوانتومی X، اندازه‌گیری درهم تنیدگی چند بخشی واقعی برابر با ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ است. بنابراین در این مقاله با استفاده از حالتGHZ ، که حالت خاصی از X است، نشان می‌دهیم که صفر بودن ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ نشان می‌دهد که حالت مورد نظر کاملاً جداپذیر است و متعلق به کلاس برچسب "۰" است، در غیر این صورت حالت درهم است و متعلق به کلاس "۱" است. سازماندهی این مقاله به شرح زیر است: در بخش اول، مدل مداری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، الگوریتم طبقه بندی کوانتومی پیشنهادی بر اساس یادگیری رقابتی و اندازه گیری درهم تنیدگی را توضیح می دهیم. در نهایت، مقاله را در بخش آخر به پایان می‌رسانیم.

۲. پروتکل کلی برای اندازه‌گیری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برای حالت کوانتومی N-کیوبیتی خالص

در این بخش، ما پروتکل کلی را برای اندازه‌گیری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ یک حالت خالص N-کیوبیتی اختیاری ارائه می‌دهیم.

برای این منظور، حالت N-کیوبیتی خالص کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|\psi_{A_1A_2\ldots A_N}\rangle = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N=0}^{1} \psi_{i_1i_2\ldots i_N} |i_1i_2\ldots i_N\rangle \qquad (1)$$

که به علت بهنجارش، $\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N=0}^{1} |\psi_{i_1 i_2 \ldots i_N}|^2 = 1$. برای هر حالت کوانتومی خالص N-کیوبیتی که N عدد زوجی است، ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(|\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle) = \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \ldots \varepsilon_{i_N j_N} \psi_{i_1 i_2 \ldots i_N} \psi_{j_1 j_2 \ldots j_N}, \qquad (۲)$$

که جمع روی زیرنویس‌های تکراری است که مقادیر صفر و یک را می‌گیرد، و ε تانسور متناوب ناوردای- SL(۲,C) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

حال، ما پروتکلی را نشان می‌دهیم که معادله (۲) را به صورت مکانیک کوانتومی پیاده‌سازی می‌کند، و مدل مداری این پروتکل در شکل ۱ برای حالت چهارکیوبیتی نشان داده شده است. به این منظور، ما دو کپی از حالت خالص N-کیوبیتی زوج معادله (۱) را نیاز داریم. این پروتکل به صورت گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. دو کپی از حالت خالص N -کیوبیتی زوج معادله (۱) را آماده می‌کنیم:

$$|\eta_0\rangle = |\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle \otimes |\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle$$

۲. گیت پائولی σ_y به کیوبیت‌های N+1, N+2, ..., 2N اعمال می‌شود:

$$|\eta_1\rangle = \sigma_{y_{N+1}} \otimes \sigma_{y_{N+2}} \otimes \ldots \sigma_{y_{2N}} |\eta_0\rangle$$

۳. گیت CNOT بین کیوبیت‌ها به صورت زیر اعمال می‌گردد:

$$|\eta_2\rangle = CNOT_{2,N+2} CNOT_{3,N+3} \ldots CNOT_{N,2N} |\eta_1\rangle$$

۴. در نهایت، گیت دوران R به کیوبیت‌های $2,3,\ldots,N$ اعمال می‌شود:

$$|\eta_3\rangle = R_2 \otimes R_3 \otimes \ldots \otimes R_N |\eta_2\rangle$$

که گیت یکانی R حالت کیوبیت را به صورت زیر دوران می‌دهد:

$$R|0\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad R|1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

بنابراین، حالت سیستم به صورت زیر درمی‌آید:

$$C(|\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle) = N\sqrt{2P_{0,0}} \qquad or \qquad C(|\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle) = N\sqrt{2P_{2^{N-1},2^{N-1}}}$$

که برای اختصارنویسی، ما شکل باینری را به شکل دهدهی تبدیل کرده‌ایم و P_{00} و $P_{2^{N-1},2^{N-1}}$ به ترتیب احتمال موفقیت برای بدست آوردن حالت $|0,0\rangle$ و $|2^{N-1},2^{N-1}\rangle$ در شکل دهدهی هستند.

به طور مشابه برای حالت درهم‌تنیده $|\psi\rangle = \alpha|00\ldots0\rangle + \beta|11\ldots1\rangle$ می‌توان نتایج زیر را بدست آورد:

$$C(|\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle) = N\sqrt{2\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0}, \ldots, P_{2^{N-1}-1,0}\}}$$
$$C(|\psi_{A_1 \ldots A_N}\rangle) = N\sqrt{2\{P_{2^{N-1},2^{N-1}}, P_{2^{N-1}+1,2^{N-1}}, \ldots, P_{2^N-1,2^{N-1}}\}} \qquad (۳)$$

بنابراین، می‌توان ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ را با استفاده از یکی از فرمول‌های نشان‌داده شده در بالا بدست آورد. توجه به این نکته جالب است که برای این مورد که حالت خاصی از حالت X است، درهم‌تنیدگی چندجزئی کلی (GM) با ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ ($2|\alpha\beta|$) برابر است. بنابراین، برای حالت GHZ به عنوان رده‌بند الگوی ورودی ناقص، حالتی با ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برابر با صفر، کاملا جداپذیر است و متعلق به برچسب " ۰" است، در غیر اینصورت حالت

درهم‌تنیده است و متعلق به رده " ۱" است. یادآوری می‌شود که اگر در یک سیستم حاوی N کیوبیت، هر کیوبیت با همه کیوبیت‌های دیگر و نه فقط با بعضی از آن‌ها درهم‌تنیده باشد، می‌گوییم که سیستم دارای درهم‌تنیدگی چندجزئی کلی (GM) است. یکی از معیارها برای محاسبه درهم‌تنیدگی GM، استفاده از تابع تلاقی GM است که برای یک حالت خالص $|\phi\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{GM}(|\psi\rangle) := min_{\lambda\in\kappa}\sqrt{2}\sqrt{1-Tr(\rho_{A_\lambda}^2)}$$

که در معادله فوق، κ مجموعه همه دوجزئی‌های ممکن $\{A_\lambda | B_\lambda\}$ را نشان می‌دهد، و ρ_{A_λ} ماتریس چگالی کاهش‌یافته است: $\rho_{A_\lambda} = Tr_{B_\lambda}(|\psi\rangle\langle\psi|)$.

۳. الگوریتم رده‌بندی کوانتومی پیشنهادی براساس یادگیری رقابتی و معیار درهم‌تنیدگی

برای توضیح الگوریتم پیشنهادی با جزئیات بیشتر، ما الگوریتم را روی مجموعه داده‌های زیر توضیح خواهیم داد. فرض کنید مجموعه داده‌هایی داریم که از دو رده با برچسب‌های " ۰" و "۱" تشکیل شده‌اند. برچسب "۰" نشان می‌دهد که ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برابر صفر است و برچسب "۱" نشان می‌دهد که این معیار از درهم‌تنیدگی غیرصفر است. فرض می‌شود مجموعه‌ای از m الگوی اولیه به صورت زیر وجود دارد:

$$Pt = \{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1,\ j_1 j_2 j_3 \ldots j_{2N} r_2, k_1 k_2 k_3 \ldots k_{2N} r_3, \ldots, l_1 l_2 l_3 \ldots l_{2N} r_m\} \quad (۴)$$

که در آن در هر الگو در مجموعه Pt ، ۲N مقدار اول ویژگیهای الگو $(i, j, k, \ldots, l = \{0,1\})$ را نشان می‌دهد، در حالی که مقدار انتهایی برچسب رده را مشخص می‌کند ($r_1,\ldots,r_m=\{0,1\}$). فرض کنید که ما یک الگوی ورودی ناقص داریم که دارای برخی ویژگی‌های گمشده است، برای مثال $inp = ?k_2?\ldots k_{2N}$ ، علامت " ؟" به این معنا است که این الگو در کیوبیت‌های اول و سوم ناقص است. برای ذخیره‌سازی m الگوی اولیه از پیش‌تعریف‌شده که با احتمال‌های برابر در لایه ذخیره‌کننده کوانتومی به صورت رابطه (۴) هستند، ما از مدل ذخیره‌سازی Zhou استفاده می‌کنیم.

٤. لایه ذخیره‌کننده کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره‌سازی

مدل ذخیره‌سازی Zhou با سه رجیستر نادرهم‌تنیده به صورت زیر مقداردهی اولیه می‌شود: $|p\rangle$ ، $|qn\rangle$ ، $|c\rangle$ رجیسترهای اول و دوم از n کیوبیت تشکیل می‌شوند، در حالی که رجیستر سوم، رجیستر کنترل کوانتومی نامیده می‌شود که یک سیستم دوکیوبیتی است که با حالت $|01\rangle$ مقداردهی اولیه می‌شود. رجیستر $|p\rangle$ رجیستر ورودی نامیده می‌شود که الگوی اولیه کلاسیکی $p \in Pt$ را در رجیستر کوانتومی $|qn\rangle$ ذخیره می‌کند.

" ذخیره‌کننده کوانتومی" به صورت گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

گام ۱: مقداردهی اولیه حالت کوانتومی به صورت $|\psi_0\rangle = |p, qn, c\rangle$

$$|\psi_0\rangle = |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{000\ldots0}_{2N+1}, 01\rangle$$

که ما فرض کردیم که حالت ورودی به صورت $i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1$ داده می‌شود، که در آن الگوی اول در معادله (۴) را در نظر گرفته‌ایم.

گام ۲:

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} T^2_{p_i c_2 qn_i} |\psi_0\rangle$$

با توجه به اینکه $c_2=1$ ، بنابراین اگر $\{i_m, r_1\}=0$ باشد، در این صورت $q_m=0$ است، و اگر $\{i_m, r_1\}=1$ باشد، آنگاه $q_m=1$ است، بنابراین ما حالت زیر را داریم:

$$|\psi_1\rangle = |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

که در آن T^2 گیت توفولی است.

گام ۳:

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} NOT_{qn_i} XOR_{p_i qn_i} |\psi_1\rangle = |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 01\rangle$$

گام ۴:

$$|\psi_3\rangle = T^{2N+1}_{qn_1 \ldots qn_{2N+1} c_1} |\psi_2\rangle = |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 11\rangle.$$

گام ۵:

$$|\psi_4\rangle = S^M_{c_1 c_2} |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 10\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 11\rangle$$

که در آن S عملگر گیت ونتوره و مارتینز[۱] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{J-1}{J}} & \frac{1}{\sqrt{J}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{J}} & \sqrt{\frac{J-1}{J}} \end{pmatrix}$$

که در این ماتریس، J شاخص الگو در مجموعه الگوهای Pt است.

گام ۶:

$$|\psi_5\rangle = T^{2N+1}_{qn_1 \ldots qn_{2N+1} c_1} |\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, \underbrace{111\ldots1}_{2N+1}, 01\rangle$$

گام ۷:

$$|\psi_6\rangle = \prod_{2N+1}^{i=1} XOR_{p_i qn_i} NOT_{qn_i} |\psi_5\rangle$$

با توجه به اینکه همه q_mها برابر یک هستند، اگر $\{i_m, r_1\}=0$، در این صورت $q_m=0$، و اگر $\{i_m, r_1\}=1$، آنگاه $q_m=1$ است، بنابراین ما حالت زیر را داریم:

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

گام ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} T^2_{p_i c_2 qn_i} |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

بنابراین واضح است که الگوی $|i_1 i_2 i_3 \ldots i_{2N} r_1\rangle$ در اولین عبارت سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. چون مقدار رجیستر $|c\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ برابر $|01\rangle$ است، در نتیجه زمانی که الگوریتم ذخیره‌کننده را مجددا تکرار کنیم، الگوی دوم $|Pt\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. همان رویه برای بقیه الگوهای اولیه

[۱] Venture and Martinez's gate operator

انجام خواهد شد. در نهایت، ما درمی‌یابیم که هر دو رجیستر $|p\rangle$ و $|c\rangle$ با حافظه رجیستر $|qn\rangle$ جداپذیر هستند. این بدان معنا است که خروجی لایه ذخیره‌کننده کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره‌سازی Zhou، همان رجیستر $|qn\rangle$ است که الگوهای اولیه مجموعه Pt را به صورت برهم نهی یکنواخت به شکل زیر ذخیره می‌کند:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(|i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1\rangle + |j_1 j_2 j_3 \dots j_{2N} r_2\rangle + |k_1 k_2 k_3 \dots k_{2N} r_3\rangle + \dots + |l_1 l_2 l_3 \dots l_{2N} r_M\rangle)$$

۵. دسته‌بندی یک ورودی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

در اینجا، ما الگوی ناقص $inp = ?k_2\, ?k_4 \dots k_{2N}$ را با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و براساس گام‌های زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

۱. **گام مقداردهی اولیه:**

$$|\psi_0\rangle \equiv |inp, qn, uv\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(|?k_2\, ?k_4 \dots k_{2N}, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 00\rangle + |?k_2\, ?k_4 \dots k_{2N}, j_1 j_2 j_3 \dots j_{2N} r_2, 00\rangle$$
$$+ |?k_2\, ?k_4 \dots k_{2N}, k_1 k_2 k_3 \dots k_{2N} r_3, 00\rangle + \dots + |?k_2\, ?k_4 \dots k_{2N}, l_1 l_2 l_3 \dots l_{2N} r_M, 00\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i\in h, h\neq\{1,3\}}^{2N} X_{qn_i} CNOT_{inp_i qn_i} |\psi_0\rangle$$

۲. اگر $\mathrm{inp}_i = 0$ باشد، در این صورت qn_i با qn_i گام اول برابر است.

۳. گیت توفولی را بین کیوبیت‌های j+۱ رجیستر $|qn\rangle$ و کیوبیت $|u\rangle$ به ترتیب به عنوان کیوبیت‌های کنترلی و هدف اعمال کنید.

$$|\psi_2\rangle = T^{j+1} |\psi_1\rangle = T_{(qn_2 qn_4 qn_5 \dots qn_{2N+1} u)} |\psi_1\rangle$$

اگر همه qn_i ها برابر با یک باشند، در این صورت u=۱ است، در غیر اینصورت u=۰ است.

۴. گام‌های ۱، ۲ و ۳ را تکرار کنید تا کپی دیگری از حالت را بدست آورید و عملگر M_z را که شامل دو عملگر است اعمال کنید: در ابتدا گیت CNOT روی هر کپی از سیستم‌های N-کیوبیتی اعمال می‌شود، طوری که در هر کپی از $|uvw\dots x\rangle$، $|u\rangle$ یک کیوبیت کنترلی است و $|v\rangle, |w\rangle, \dots, |x\rangle$ کیوبیت‌های هدف هستند. سپس، ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ که در بخش قبلی توصیف شد، اندازه‌گیری می‌شود. در این صورت، دو احتمال در این مرحله وجود دارد:

- **مورد اول:** اگر در گام ۳ حالت $|uvw\dots x\rangle \equiv |00\dots0\rangle$ را بدست آوریم، با اعمال M_z درمی‌یابیم که دسته حالت ۰ است.
- **مورد دوم:** اگر در گام ۳ حالت $|uvw\dots x\rangle = \sqrt{\frac{M-1}{M}}|000\dots0\rangle + \frac{1}{\sqrt{M}}|111\dots1\rangle$ را بدست آوریم، با اعمال عملگر M_z، درمی‌یابیم که دسته حالت ۱ است.

۶. مثال

در این بخش، برای روشن شدن مفاهیم، ما حالت خالص چهارکیوبیتی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k,l=0}^{1} c_{ijkl} |ijkl\rangle \qquad (۵)$$

که $\sum_{i,j,k,l=0}^{1} |c_{ijkl}|^2 = 1$. برای این سیستم، ناوردای درجه دو عبارت است از:

$$I(|\psi\rangle) = 2|-c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + c_{0011}c_{1100} - c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111}|$$

(۶)

حال ما پروتکلی را نشان می‌دهیم که رابطه (۶) را به صورت مکانیک کوانتومی پیاده‌سازی می‌کند، و مدل مداری این پروتکل در شکل ۱ نشان داده می‌شود. به این منظور، ما دو کپی از حالت خالص چهارکیوبیتی معین در رابطه (۵) را نیاز داریم:

۱. آماده‌سازی دو کپی از حالت خالص چهارکیوبیتی

$$|\eta_0\rangle = |\psi\rangle(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi\rangle)$$

۲. گیت‌های CNOT به ترتیب بین کیوبیت‌های دوم و ششم، کیوبیت‌های سوم و هفتم، کیوبیت‌های چهارم و هشتم اعمال می‌شود:

$$|\eta_1\rangle = CNOT_{2,6}CNOT_{3,7}CNOT_{4,8}|\eta_0\rangle$$

۳. در نهایت، دوران‌های گیت R به کیوبیت‌های دوم، سوم، و چهارم اعمال می‌شود:

$$|\eta_2\rangle = R_2R_3R_4|\eta_1\rangle$$

بنابراین حالت سیستم به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}|\eta_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}((&-c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + \\ &c_{0011}c_{1100} - c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111})|\,00000000\rangle + \\ &(-c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + c_{0011}c_{1100} - \\ &c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111})|\,10001000\rangle + ...)\end{aligned}$$

(۷)

که به علت طولانی بودن عبارت، از نوشتن ادامه عبارت صرفنظر کردیم. با مقایسه دو رابطه (۶) و (۷)، نتیجه زیر را در شکل دودویی بدست می‌آوریم:

$$I = 4\sqrt{2P_{0,0}} \qquad or \qquad I = 4\sqrt{2P_{8,8}}$$

(۸-الف)

که $P_{0,0}$ و $P_{\{8,8\}}$ به ترتیب احتمال موفقیت برای بدست آوردن حالت‌های $|0,0\rangle$ و $|8,8\rangle$ هستند.

به طور مشابه، برای حالت درهم‌تنیده $|\psi\rangle = \alpha|0000\rangle + \beta|1111\rangle$، ما می‌توانیم نتایج زیر را بدست آوریم:

$$I = 4\sqrt{2\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0}, ..., P_{7,0}\}} \qquad I = 4\sqrt{2\{P_{8,8}, P_{9,8}, P_{10,8}, ..., P_{15,8}\}}$$

(۸-ب)

بنابراین ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ را می‌توان با استفاده از فرمول‌های نشان‌داده شده در بالا بدست آورد.

حال ما الگوریتم رده‌بندی کوانتومی پیشنهادی را براساس یادگیری رقابتی و معیار درهم‌تنیدگی در نظر می‌گیریم. الگوهای اولیه‌ای که با رده ۱ برچسب‌گذاری می‌شوند، چهار الگو با ۸ ویژگی هستند که عبارتند از: ۱۱۱۰۰۱۱۰، ۱۰۱۰۱۰۰۰، ۰۱۱۱۰۱۰۰ و ۰۱۱۱۰۰۱۰، در حالی که الگوهای اولیه با برچسب ۰ دو الگوی ۰۰۱۰۰۰۱۱۰ و ۱۰۰۰۰۱۱۱۰ هستند. بنابراین، مجموعه الگوهای اولیه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Pt=\{111001101,101010001,001000110,011101001,100001110,011100101\}$$

(۹)

که در هر الگو در مجموعه Pt، ۸ مقدار اول ویژگی‌های الگو را نشان می‌دهد، در حالی که مقدار آخر برچسب رده را نشان می‌دهد. فرض کنید که الگوی ورودی inp = ۱?۱?۰۱۱۰ را داریم که در کیوبیت‌های دوم و چهارم ناقص است. برای ذخیره M=٦ الگوی اولیه معادله (۹) از مدل ذخیره‌سازی Zhou که در بخش قبلی توضیح داده شد، استفاده می‌کنیم:

گام ۱: مقداردهی اولیه حالت کوانتومی به صورت $|\psi_0\rangle = |p, qn, c\rangle$ که فرض می‌کنیم حالت ورودی p=۱۱۱۰۰۱۱۰۱ الگوی اول در معادله (۹) است:

$$|\psi_0\rangle = |111001101, 000000000, 01\rangle$$

گام ۲:

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1}^{9} T^2_{p_i c_2 qn_i} |\psi_0\rangle = |111001101, 111001101, 01\rangle$$

گام ۳:

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^{9} NOT_{qn_i} XOR_{p_i qn_i} |\psi_1\rangle = |111001101, 111111111, 01\rangle$$

گام ۴:

$$|\psi_3\rangle = T^9_{qn_1 \ldots qn_9 c_1} |\psi_2\rangle = |111001101, 111111111, 11\rangle$$

گام ۵:

$$|\psi_4\rangle = S^6_{c_1 c_2} |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111111111, 10\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111111111, 11\rangle$$

گام ۶:

$$|\psi_5\rangle = T^9_{qn_1 \ldots qn_9 c_1} |\psi_4 >= \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111111111, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111111111, 01\rangle.$$

گام ۷:

$$\rangle = \prod_{n=9}^{i=1} XOR_{p_i qn_i} NOT_{qn_i} |\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111001101, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111001101, 01\rangle$$

گام ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^{9} T^2_{p_i c_2 qn_i} |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111001101, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111001101, 01\rangle$$

بنابراین، واضح است که الگوی $|111001101\rangle$ در عبارت اول سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. با تکرار همین روند برای بقیه الگوهای اولیه Pt ، خروجی لایه ذخیره‌کننده کوانتومی به صورت زیر درمی‌آید:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|111001101\rangle + |101010001\rangle + |001000110\rangle) +$$
$$|011101001\rangle + |100001110\rangle + |011100101\rangle)$$

در نهایت، ما الگوی ناقص inp = ۱?۱?۰۱۱۰ را براساس الگوریتم توصیف شده در بخش قبلی دسته‌بندی می‌کنیم:

۱.

$$|\psi_0\rangle \dashv |inp, qn, uv\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111001101,0000\rangle+|1?1?0110,101010001,0000\rangle+|1?1?0110,001000110,0000\rangle)+$$

$$|1?1?0110,011101001,0000\rangle+|1?1?0110,100001110,0000\rangle+|1?1?0110,011100101,0000\rangle)$$

۲.

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i\in h=\{1,3,5,6,7,8\}} X_{qn_i} CNOT_{inp_i qn_i} |\psi_0\rangle \$\$\$ |\psi_1\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111011111,0000\rangle+|1?1?0110,101000011,0000\rangle+|1?1?0110,001010100,0000\rangle)+$$

$$|1?1?0110,011111011,0000\rangle+|1?1?0110,00011100,0000\rangle+|1?1?0110,011110111,0000\rangle)$$

۳.

$$|\psi_2\rangle = T_{(\prod_{i\in h=\{1,3,5,6,7,8,9\}u})} |\psi_1\rangle = T_{(qn_1qn_3qn_5qn_6qn_7qn_8qn_9u)} |\psi_1\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111011111,0000\rangle+|1?1?0110,101000011,0000\rangle+|1?1?0110,001010100,0000\rangle+$$

$$|1?1?0110,011111011,0000\rangle+|1?1?0110,100011100,0000\rangle+|1?1?0110,011110111,0000\rangle)$$

بنابراین حالت سیستم چهارکیوبیتی $|uvwx\rangle$ بدست می‌آید. با تکرار گام‌های ۱ تا ۳، می‌توانیم کپی دیگر از حالت $|uvwx\rangle$ را بدست آوریم. در نهایت، عملگر M_z را که در شکل ۲ نشان داده شده است، روی حالت $|uvwx\rangle \otimes |uvwx\rangle$ اعمال می‌کنیم. در اینجا بدیهی است که احتمال حالت‌های

00000000,00010000, 00100000, 00110000, 01000000, 01010000, 01100000, 01110000,
10001000, 10011000, 10101000,10111000, 11001000,11011000, 11101000, 11111000

که به ترتیب متناظر با احتمال‌های دودویی $\{P_{0,0},P_{1,0},P_{2,0},...,P_{8,0},P_{8,8},P_{8,9},...,P_{15,8}\}$ است، غیرصفر هستند، بنابراین مطابق رابطه (۸-ب) مقدار ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ غیرصفر است ($I > 0$). بنابراین الگوی آزمایشی inp = ۱□۱□۰۱۱۰ متعلق به برچسب ۱ است.

۷. نتیجه‌گیری

مسئله دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی در قلب پردازش اطلاعات کوانتومی نهفته است. برخلاف بسیاری از روش‌ها برای بررسی این مسئله، هیچ کدام از آن‌ها کلی نیستند. در این مقاله، ما نشان داده‌ایم که روش‌های یادگیری ماشین را می‌توان به طور موثر برای دسته‌بندی ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ به عنوان یک معیار درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی N-کیوبیتی با N زوج مورد استفاده قرار داد. در مقایسه با شرط معمول برای تشخیص ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲، روش ما می‌تواند یک حالت ناشناخته را می‌تواند به دو دسته صفر یا یک دسته‌بندی کند. ما پیش‌بینی می‌کنیم که کار ما بینش‌هایی را برای استفاده از تکنیک‌های یادگیری ماشین برای حل مسائل بیشتر در زمینه پردازش اطلاعات کوانتومی در آینده نزدیک ارائه دهد.

منابع

[۱] I. Kerenidis, J. Landman, A. Luongo, and A. Prakash, "*q-means: A quantum algorithm for unsupervised machine learning,*" arXiv preprint arXiv:۱۸۱۲,۰۳۵۸٤, ۲۰۱۸.

[۲] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, "Quantum algorithms for supervised and unsupervised machine learning," *arXiv*, vol. ۱۳۰۷,۰٤۱۱, pp. ۱–۱۱, ۷ ۲۰۱۳. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/۱۳۰۷,۰٤۱۱.

[۳] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, "Quantum principal component analysis," *Nature Physics*, vol. ۱۰, no. ۹, p. ٦۳۱, ۲۰۱٤.

[٤] I. Kerenidis and A. Prakash, "Quantum gradient descent for linear systems and least squares," *arXiv*:۱۷۰٤,۰٤۹۹۲, ۲۰۱۷.

[٥] N. Wiebe, A. Kapoor, and K. M. Svore, "Quantum Algorithms for Nearest-Neighbor Methods for Supervised and Unsupervised Learning," *arXiv*:۱٤۰۱,۲۱٤۲v۲, ۲۰۱٤. [Online].

[٦] R. S. Michalski, J. G. Carbonell, and T. M. Mitchell, *Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach* (Springer Science and Business Media, Berlin, ۲۰۱۳).

[۷] M. Jordan and T. Mitchell, *Machine Learning: Trends, Perspectives, and Prospects, Science* ۳٤۹, ۲٥٥ (۲۰۱٥).

[۸] Y. LeCun, Y. Bengio, and G. Hinton, Deep Learning, *Nature* ٥۲۱, ٤۳٦ (۲۰۱٥).

[۹] G. Carleo and M. Troyer, Solving the Quantum Many-Body Problem with Artificial Neural Networks, *Science* ۳٥٥, ٦۰۲ (۲۰۱۷).

[۱۰] Giacomo Torlai, Guglielmo Mazzola, Juan Carrasquilla, Matthias Troyer, Roger Melko and Giuseppe Carleo, *Nature Physics*, ۱٤,(۲۰۱۸)٤٤۷.

[۱۱] Giuseppe Carleo and Matthias Troyer, Science, ۳٥٥, (۲۰۱۷)٦۰۲.

[۱۲] N. Wiebe, C. Granade, C. Ferrie, and D. G. Cory, Phys. Rev.*Lett*. ۱۱۲, ۱۹۰٥۰۱ (۲۰۱٤).

[۱۳] M. Krenn, M. Malik, R. Fickler, R. Lapkiewicz, and A. Zeilinger, Phys. Rev. *Lett*. ۱۱٦, ۰۹۰٤۰٥ (۲۰۱٦).

[۱٤] S. S. Schoenholz, E. D. Cubuk, D. M. Sussman, E. Kaxiras, and A. J. Liu, Nat. *Phys*. ۱۲, ٤٦۹ (۲۰۱٦).

[۱٥] E. P. L. van Nieuwenburg, Y.-H. Liu, and S. D. Huber, Nat. Phys.۱۳, ٤۳٥ (۲۰۱۷).

[۱٦] J. Carrasquilla and R. G. Melko, Nat. *Phys*. ۱۳, ٤۳۱ (۲۰۱۷).

[۱۷] Y.-C. Ma and M.-H. Yung, npj Quantum Information ٤, ۳٤ (۲۰۱۸).

[۱۸] S. Lu, S. Huang, K. Li, J. Li, J. Chen, D. Lu, Z. Ji, Y. Shen, D. Zhou, and B. Zeng, *Phys. Rev*. A ۹۸, ۰۱۲۳۱٥ (۲۰۱۸).

[۱۹] J. Gao, L.-F. Qiao, Z.-Q. Jiao, Y.-C. Ma, C.-Q. Hu, R.-J. Ren, A.-L. Yang, H. Tang, M.-H. Yung, , and X.-M. Jin, Phys. Rev. *Lett* ۱۲۰, ۲٤۰٥۰۱ (۲۰۱۸).

[۲۰] J. Allcock, C.-Y. Hsieh, I. Kerenidis, and S. Zhang, "Quantum algorithms for feedforward neural networks," *arXiv preprint arXiv*:۱۸۱۲,۰۳۰۸۹, ۲۰۱۸.

[۲۱] P. Rebentrost, T. R. Bromley, C. Weedbrook, and S. Lloyd, "Quantum hopfield neural network," *Physical Review* A, vol. ۹۸, no. ٤, p. ۰٤۲۳۰۸, ۲۰۱۸.

[۲۲] N. Wiebe, A. Kapoor, and K. M. Svore, "Quantum deep learning," *arXiv preprint arXiv:*۱٤۱۲,۳٤۸۹, ۲۰۱٤.

[۲۳] R. Rojas. *Unsupervised Learing and Clustering Algorithms*, Neural Networks, Springer Verlag, Berlin, ۱۹۹٦.