New Economy and Trade, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Quarterly Journal, Vol. 16, No. 4, Winter 2021, 69-92
Doi: 10.30465/JNET.2022.39336.1822

Comparison of skewness and kurtosis effects for optimal portfolios risk criteria using dependent structure of copula functions

Mohammad Reza Haddadi*
Manizheh Goudarzi**

Abstract

Portfolio optimization is one of the main methods of investment and one of the main stages of portfolio construction. Since ptimization is the process of selecting the best option from a set of available options, given specific constraints, this is one of the most important challenges facing investors, financial managers and operations research modelers. In this paper, the optimal portfolio curvature with criteria of variance risk (MV), absolute deviation (MAD) and conditional value at risk (CVaR) for the five symbols Shasta, Kachad, Vepars, Khsapa and Shebandar is obtained from 1/09/1399 to 1/3/1400 and all four methods are compared. Accordingly, the effect of skewness and kurtosis on optimal portfolios in all four risk criteria is investigated by applying the dependence structure of copula functions using Monte Carlo simulation. In this regard, Pearson distribution system and Gaussian copula have been used to simulate the yields with different skewness and kurtosis and with standard deviation and mean of historical data, and finally it is shown that this process leads to a change in the optimal portfolios in all four methods of portfolio

* Assistant Professor of Financial Mathematics at Ayatollah Borujerdi University, Borujerd, Iran, (Corresponding Author) haddadi@abru.ac.ir

** PhD in Statistics, Instructor of Mathematics Department at Ayatollah Borujerdi University, Borujerd, Iran, m.goudarzi@abru.ac.ir

Date received: 09/12/2021, Date of acceptance: 14/02/2022

optimization, so that the change in the amount of presented risk causes the most change in the optimal portfolio of CVaR and the least change in the optimal portfolio MSV.

Keywords: Stock portfolio optimization, Conditional value at risk, Skewness, Kurtosis, Copula Function.

JEL Classification: C15, G11, G17, C61

اقتصاد و تجارت نوین، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
فصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال ۱۶، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۴۰۰، ۷۱ - ۹۲

مقایسهٔ اثر چولگی و کشیدگی برای معیارهای ریسک سبدهای بهینه با استفاده از ساختار وابستگی توابع مفصل

محمدرضا حدادی*

منیژه گودرزی**

چکیده

بهینه‌سازی فرایند انتخاب بهترین گزینه از میان مجموعه‌ای از گزینه‌های در دسترس با توجه به محدودیت‌های مشخص است که از مهم‌ترین چالش‌های پیش روی سرمایه‌گذاران، مدیران مالی و مدل‌سازان تحقیق در عملیات است. برای بهینه‌سازی سبد سهام می‌توان از معیارهای مختلفی به عنوان ریسک در تابع هدف استفاده کرد که در این خصوص مقایسه هر یک از این روش‌ها از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. این پژوهش سبد بهینه با معیارهای ریسک واریانس (MV)، نیم‌واریانس(MSV)، انحراف مطلق (MAD) و ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR) برای پنج نماد حکشتی، کچاد، وپارس، خودرو و شبندر در دوره زمانی ۹۹/۹/۱ تا ۱۴۰۰/۳/۱ را بدست آورد و هر چهار روش با هم مقایسه شد. سپس به ارزیابی اثر چولگی و کشیدگی بر سبدهای بهینه در هر چهار معیار ریسک با اعمال ساختار وابستگی توابع مفصل به کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو پرداخته می‌شود. در این راستا از سیستم توزیع پیرسون و مفصل گوسی برای شبیه‌سازی بازده‌ها با چولگی و کشیدگی‌های مختلف و با انحراف معیار و میانگین داده‌های تاریخی

* استادیار گروه ریاضی مالی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی(ره)، بروجرد، ایران (نویسندهٔ مسئول)، haddadi@abru.ac.ir

** دکترای تخصصی آمار، مربی گروه ریاضی و آمار، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه آیت ا... بروجردی (ره)، بروجرد، ایران، m.goudarzi@abru.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۹/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۵

استفاده شد و نهایتا نشان داده می‌شود که این فرایند به تغییر در سبدهای بهینه در هر چهار روش بهینه‌سازی سبد منجر شد به طوری‌که تغییر ایجاد شده در مقدار ریسک ارائه‌شده در سبد بهینه CVaR بیشترین تغییر و در سبد بهینه MSV کمترین تغییر را ایجاد کرد.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی سبد سهام، ارزش در معرض خطر مشروط، چولگی، کشیدگی، تابع مفصل.

طبقه بندی JEL: C15, G11, G17, C61

۱. مقدمه

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، مدلی برای برقراری تعادل بین ریسک و بازده است. این مسئله شامل مجموعه‌ای از اوراق بهادار است که در آن تلاش می‌شود نسبت سرمایه‌گذاری در هر یک به نحوی تعیین شود که ریسک سرمایه‌گذاری کمینه شده و بازده سرمایه‌گذاری بیشینه شود. مدل انتخاب سبد سهام را نخستین بار مارکویتز (۱۹۵۲) ارائه کرد و در آن واریانس سبد احتمالی را معیار ریسک در نظر گرفت. تنوع‌بخشی و تشکیل سبد سهام و هم‌چنین بهینه‌سازی آن، یکی از شروط لازم برای موفقیت در بازارهای کارا می‌باشد. مسئله انتخاب پرتفوی به چگونگی توزیع ثروت بین سهام مختلف می‌پردازد، بر این اساس بهینه‌سازی پرتفوی یکی از زمینه‌های اصلی تحقیقاتی در مدیریت ریسک مدرن است (بوئر و ونتز(Bower and Wentz)، ۲۰۰۵). روش‌های زیادی برای حل مسائل بهینه پیشنهاد شده است.

از آن‌جا که تصمیمات سیاسی و تغییر در مناسبات بین‌المللی بر قیمت‌های بازار سهام به‌ویژه در ایران تاثیرگذار است، این موضوع منجر به تغییر در شکل توزیع بازده سهام می‌گردد. این تغییر می‌تواند چولگی و کشیدگی در توزیع داده‌ها را به همراه داشته باشد. سوال اصلی در این پژوهش اثرپذیری معیارهای ریسک در سبد بهینه با وجود چولگی و کشیدگی در ساختار داده‌ها می‌باشد. در این راستا به مقایسه چهار روش بهینه‌سازی شامل بهینه‌سازی میانگین–واریانس (MV)، بهینه‌سازی میانگین–نیم‌واریانس (MSV)، بهینه‌سازی میانگین–قدرمطلق انحراف از میانگین (MAD) و بهینه‌سازی میانگین–

ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR) با در نظر گرفتن چولگی و کشیدگی‌های مختلف پرداخته می‌شود.

۲. ادبیات نظری

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگهداری شود؛ به شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن بر اساس معیارهایی مشخص می‌شود که به صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. معمولاً بهینه‌سازی سبد در دو مرحله انجام می‌شود که در مرحله اول بهینه‌سازی وزن سرمایه‌گذاری در یکی از انواع دارایی‌ها مانند تعیین نسبت سرمایه‌گذاری بین سهام و اوراق قرضه و در دومین مرحله، بهینه‌سازی وزن سرمایه‌گذاری دارایی‌های موجود در یک نوع خاص دارایی صورت می‌گیرد. نگهداری انواع مختلف دارایی باعث متنوع‌سازی سبد می‌شود و این عمل باعث حذف ریسک غیرسیستماتیک می‌شود. برای بهینه‌سازی سبد سهام، مدل‌های مختلفی وجود دارد. مدل‌های بهینه‌سازی براساس تابع هدف تعریف شده به دنبال انتخاب سبد سهامی هستند که بیش‌ترین بازده و کم‌ترین ریسک را دارا می‌باشند (جورین(Jorion)، ۱۹۹۲).

سرمایه‌گذاران به هنگام سرمایه‌گذاری در پروژه‌های مختلف به‌طور هم‌زمان ریسک و بازده آن پروژه‌ها را به‌عنوان یکی از عمده‌ترین عوامل در تصمیمات سرمایه‌گذاری مدنظر قرار می‌دهند. باید اذعان نمود که ریسک جز لاینفک بازده است و هنگام تصمیم‌گیری در مورد بازده پروژه‌های مختلف سرمایه‌گذاری می‌بایست به میزان ریسک آن‌ها توجه نمود؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدیریت ریسک فرآیندی است که در آن مدیران به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم‌گیری در مورد ریسک و نظارت بر انواع ریسک‌های مطرح برای بنگاه‌های اقتصادی می‌پردازند (راعی و تلنگی، ۱۳۸۳).

در موضوع بهینه‌سازی سبد به دنبال مرز کارا هستیم. مرز کارا مجموعه‌ای از همه پرتفوی‌های نمونه است که برای سطح مشخصی از ریسک، بیشترین بازده را به‌همراه می‌آورد یا به بیان دیگر برای سطح مشخصی از بازده، کم‌ترین ریسک را ایجاد می‌کند، در واقع مرز کارا ابزاری مالی است که به سرمایه‌گذاران کمک می‌کند

باتوجه‌به میزان ریسک، سبدی با بالاترین میزان بازده ایجاد کنند. طبق نظریه سبد سهام مدرن، مرز کارا مجموعه‌ای از سبدهای بهینه است که چارچوبی را برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با بالاترین میزان بازده مورد انتظار برای سطح مشخصی از ریسک مشخص می‌کند. در تئوری مدرن پرتفوی همه‌ی سبدهای ممکن با بهترین کارکرد را می‌توان روی بخشی از یک سهمی نشان داد(ریچارد(Richard)، ۱۹۹۲).

در ادامه به ترتیب برخی از مهم‌ترین معیارهای اندازه‌گیری ریسک بیان می‌شوند. انحراف‌معیار نشان‌دهنده پراکندگی بازده دارایی یا پرتفولیو است. انحراف‌معیار مربوط به بازده‌های گذشته را می‌توان از طریق بازده کل برای دوره‌های خاصی محاسبه کرد. مقدار به‌دست‌آمده را می‌توان در ارزیابی ریسک کلی برای دوره خاصی مربوط به گذشته و برآورد ریسک کلی مورداستفاده قرار داد (مارکویتز و همکاران، ۱۹۹۳).

انتخاب سبد سهام با کمک نیم‌واریانس سعی در حداقل کردن عملکرد بازه‌های پایینی (منفی) سبد دارد و کاری به عملکرد بازده‌های بالای ندارد. البته در انتخاب سبد سهام به کمک نیم‌واریانس نیازی به ماتریس واریانس کوواریانس نیست اما باید توزیع بازده سهام را مشخص نمود. درواقع این سنجه ریسک سعی می‌کند مقدار پراکندگی بازده سبد از بازده مورد انتظار را نشان دهد. بنابر نتایج بدست آمده، مارکویتز در مبحث بررسی معیارهای مختلف اندازه‌گیری ریسک، نیم‌واریانس را به‌عنوان اندازه ریسک جدید مطرح نمود. نیم‌واریانس که از مجذورات انحرافات نامطلوب حول میانگین نرخ بازده بدست می‌آید را به‌عنوان سنجه ریسک در نظر گرفته و در مدل بهینه‌سازی قرار داده می‌شود (مون و یو (Moon and Yao)، ۲۰۱۱).

ارزش در معرض خطر (VaR)، بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی سبد دارایی‌ها یا مجموعه سرمایه‌گذاری در طول افق زمانی معین مثل یک روز یا یک ماه و یا یک هفته در شرایط عادی بازار و در سطح اطمینان معین می‌باشد. به سبب از معیارهای مهم اندازه‌گیری ریسک، ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) است که نشان‌دهنده بدترین زیان ممکن در سطح اطمینان مشخص، برای مقابله با تغییرات پیش روی بازار در طی دوره‌های زمانی بعدی، مشروط بر تغییرپذیری مربوط به پورتفوی موجود و اطلاعات بازار است. مدل‌های بهینه‌سازی سبدسهام به دنبال انتخاب سبد سهامی هستند که بیش‌ترین بازده و کم‌ترین ریسک را دارد. (راعی و تلنگی، ۱۳۸۳).

مدل میانگین–ارزش در معرض خطر شرطی، مدل بهینه‌سازی است که پرتفولیوهایی با حداقل ارزش در معرض خطر شرطی و حداکثر بازدهی انتظاری را ارائه می‌کند. مدل میانگین نیمه انحراف، مدل برنامه‌ریزی خطی است که با بیشینه‌کردن نیمه انحراف اندازه ریسک به تشکیل سبد سهام می‌پردازد (علی پور جورشری و همکاران، ۱۳۹۶). مدل میانگین–واریانس، الگوی میانگین–واریانس طراحی شده توسط مارکویتز، میانگین بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد و واریانس بیانگر خطرپذیری پرتفوی هست (پاک‌مرام و همکاران، ۱۳۹۶).

۳. پیشینهٔ پژوهش

با توجه به اهمیت موضوع سبد بهینه، مطالعات فراوانی در این خصوص انجام شده است. برخی از این مطالعات به بررسی اثرات معیارهای مختلف ریسک پرداخته و برخی به روش‌های اندازه گیری ریسک در سبد بهینه توجه کرده‌اند. در ادامه به تعدادی از پژوهش‌های مرتبط با این تحقیق ارائه می‌گردد.

خالوزاده و امیری (۱۳۸۵) در تحقیقی به توسعه روش‌های مدیریت ریسک بر اساس نظریه ارزش در معرض ریسک توجه کرده‌اند نتایج به‌دست‌آمده نشانگر کارایی روش مدل‌سازی ریسک بازار برمبنای نظریه ارزش در معرض ریسک و روش بهینه‌سازی الگوریتم‌های ژنتیک در به دست آوردن وزن‌های بهینه سبد سهام با در نظر گرفتن محدودیت بر روی ریسک است. عبدی (۱۳۸۹) با انجام پژوهشی به بررسی معیارهای تشکیل پرتفوی با توجه به مدل‌های میانگین–واریانس و انحراف مطلق از میانگین پرداخته است. راعی و همکاران (۱۳۸۹) از روش جستجوی هارمونی در جهت بهینه‌سازی مقید پرتفوی سهام استفاده کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که روش جستجوی هارمونی در بهینه‌سازی مقید پرتفوی سهام، موفق عمل می‌کند و دریافتن جواب‌های بهینه در تمامی سطوح خطرپذیری و بازده از دقت قابل قبولی برخوردار است. گرکز و همکاران (۱۳۸۹) بهینه‌سازی سبدسهام را بر اساس تعریف متفاوتی از ریسک انجام دادند و برای کارآمدترشدن، برخی از محدودیت‌های جهان واقعی را به الگوریتم‌های طراحی‌شده افزودند. با توجه به نتایج حاصله مشخص گردید که هیچ تفاوت معناداری در به‌کارگیری دو مدل (مدل میانگین-واریانس و مدل میانگین نیمه واریانس) وجود ندارد.

روغنیان و همایی‌فر (۱۳۹۵) مدل میانگین-ارزش در معرض خطر مشروط را با برنامه‌ریزی آرمانی مدل‌سازی نمودند و درنهایت مدل پویای ارائه شده به پاسخ‌های کاراتر و کاربردی‌تر دست پیدا کرد. سروش و همکاران (۱۳۹۶) در تحقیق خود مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را در چارچوب مدل معرفی‌شده مارکویتز، با استفاده از الگوریتم مبتنی بر آموزش و یادگیری حل نموده، نتایج به دست آمده از این پژوهش نشان می‌دهد این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌ها برای یافتن مرز کارا و بهینه‌سازی سبد سهام عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. تهرانی و همکاران (۱۳۹۷) در پژوهش خود با کمک الگوریتم دسته‌های میگو مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را حل نموده و همچنین ریسک با سه معیار واریانس، نیم واریانس و ریزش مورد انتظار بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که الگوریتم دسته‌های میگو دریافتن مرز کاری پرتفوی بهینه در مقایسه با الگوریتم‌های تجمعی ذرات و رقابت استعماری نتایج مطلوب‌تری به دست می‌آورد. حدادی و همکاران (۱۳۹۹) استراتژی تنوع سازی سبد سهام بهینه با استفاده از معیارهای ریسک $WCVaR,\beta$ و مقایسه آن با روش مونت کارلو پرداختند. همچنین حدادی و همکاران در سال ۱۴۰۰ به بهینه سازی سبد سهام با معیارهای MAD و CVAR در روش کلاسیک و فراابتکاری پرداختند.

لی و انجی(Li and Ng) (۲۰۰۰) مسئله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در دوره‌های زمان پیوسته ارائه دادند به طوری که یک راه‌حل بهینه تحلیلی برای میانگین فرمول واریانس در انتخاب نمونه کارها چند دوره‌ای درنظر گرفته شده است. به طور خاص، سیاست تجزیه و تحلیل سبد بهینه و بیان تحلیلی از مرز واریانس کارا برای فرمول واریانس میانگین چند دوره مشتق شده است. یک الگوریتم کارا نیز برای یافتن یک سیاست سبد بهینه برای به حداکثر رساندن عملکرد مطلوب مقدار مورد انتظار و واریانس ارائه شده است. راکفلار و اوریاسو (Rockfeller and Uryasev) (۲۰۰۲) یک سنجه ریسک جدید معرفی نمودند که به نام ارزش در معرض خطر مشروط مشهور است. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط باعث می‌شود که مدل انتخاب سبدسهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. سنجه ریسک افت سرمایه در معرض خطر مشروط ($CDaR$) بسیار شبیه به $CVaR$است که این سنجه ریسک توسط کروخمال و همکاران (Krokhmal et al.) (۲۰۰۳) توسعه پیدا کرد. این سنجه، میزان سقوط ارزش یک سبد سهام از حداکثر میزانی که در طول دوره داشته است را مشخص می‌کند. در ادامه ژو و همکاران (Zhu et al.) (۲۰۰۴) مسئله‌ی انتخاب سبد سهام چند دوره‌ای را با در نظر گرفتن

ورشکستگی توسعه دادنـد، بـه طـوری کـه یـک مـدل واریـانس میـانگین تعمـیم یافتـه را پیشـنهاد دادنـد. وی و یـه (Wi and Ye) (۲۰۰۷) مـدل چنـد دوره‌ای میـانگین واریـانس را تحت‌کنترل ریسک ورشکسـتگی ارائـه دادنـد. مـدل انتخـاب سـبد واریـانس چنـد دوره‌ای اعمال‌شده توسط محدودیت ورشکستگی در بازار تصادفی در نظر گرفته شده اسـت. بـازده تصادفی دارایی‌های پرخطر همـه بـه وضـعیت بـازار تصـادفی بسـتگی دارد کـه فـرض بـر این است که از یک زنجیره مـارکوف پیـروی مـی‌کنـد. هـانن و فـوزی(Hanen & Faouzi) (۲۰۱۴) در پژوهشی با استفاده از ماکزیمم کردن تابع مطلوبیت، محدودیت VaRرا که با یـک ضرر متناسب با بازده جاری محدود شده است، بررسی نمودند. فرناندو و همکـاران (۲۰۱۸) بـه مقایسـه عملکـرد الگـوریتم‌هـای ژنتیـک و اکتشـافات جسـتجوی تـابو محاسـبات عصبی پرداختند. هنریکس و همکاران (Henriques et al.) (۲۰۱۹) یـک چـارچوب پرتفـوی بازه‌ای چندهدفه برای حمایت از ترجیحات سرمایه‌گذار تحت مفروضـات مختلـف ریسـک ارائه کردند. همچنین عمران و همکـاران (Imran et al.) (۲۰۲۱) بـه سـاخت سـبد بهینـه بـا استفاده از مدل‌های ریسک متفاوت و مقایسه سناریوهای اقتصادی متنوع پرداختند.

هدف تحقیق حاضر مقایسه چهار روش بهینه‌سازی شامل بهینه‌سازی میـانگین–واریـانس (MV)، بهینه‌سازی میانگین–نیم‌واریانس (MSV)، بهینه‌سازی میانگین–قـدرمطلق انحـراف از میـانگین (MAD) و بهینـه‌سـازی میـانگین–ارزش در معـرض خطـر مشـروط (CVaR) بـا درنظرگرفتن چولگی و کشیدگی‌های مختلف برای توزیع بـازده مـی‌باشـد کـه در مطالعـات پیشین به آن پرداخته نشده است.

۴. روش تحقیق

یک ابزار سرمایه‌گذاری که می‌تواند خرید و فروش شود، معمولاً دارایی نامیده می‌شود. یـک سبد سهام از ترکیب خطی n دارایی تشکیل شده است. برای دارایی داده شده i فرض کنیـد $S_i(t)$ قیمت در زمان $t = 1, \dots, T+1$ باشد در ایـن صـورت بـازده $R_i(t)$ بـه صـورت زیـر تعریف می‌شود:

$$R_i(t) = \frac{S_i(t+1) - S_i(t)}{S_i(t)}, \quad i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

فرض کنید سرمایه‌گذاری قصد دارد در دارایی‌های داده شده، سرمایه‌گذاری کند و x_i تعدادی از دارایی‌های i در سبد سهام باشد که شامل n دارایی، $i = ۱, \dots, n$، بین زمان t و $t + ۱$ است. کل ثروت در زمان t به صورت زیر است.

$$S(t) = x_۱ S_۱(t) + \cdots , x_n S_n(t) \quad (۲)$$

فرض کنید w_i نسبت کل سرمایه‌گذاری ثروت اختصاص یافته به دارایی i باشد.

$$w_i = \frac{x_i S_i(t)}{S(t)} \qquad i = ۱, \dots, n \quad (۳)$$

که در آن $w = (w_۱, w_۲, \dots, w_n)^T$ بردار وزن باشد. در این صورت قیدهای زیر برقرار است (نریمانی و نریمانی ۱۳۹۲):

$$w^T e = ۱, \quad (۴)$$

که $e = (۱, \dots, ۱)^T$ بردار واحد در R^n است. بازده سبد سهام به صورت زیر می‌باشد

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i R_i(t) \quad t = ۱, \dots, T \quad (۵)$$

طبق تعریف $S_i(t + ۱) = S_i(t)(۱ + R_i(t))$ قیمت سبد سهام در لحظه t+1 است.

$$S(t + ۱) = w_۱ S(t)\left(۱ + R_۱(t)\right) + \cdots + w_n S(t)\left(۱ + R_۱(t)\right) \quad (۶)$$

فرض کنید برای هر دارایی i، بازده‌های $R_i(۱), \dots, R_i(۲), R_i(T)$ در زمان‌های مختلف توزیع یکسانی دارند بنابراین زمان حذف می‌شود و به جای $R_i(T)$، R_i نوشته می‌شود. در این‌جا بازده مورد انتظار پرتفوی به صورت زیر است.

$$E\left[\sum_{i=۱}^{n} w_i R_i\right] = \sum_{i=۱}^{n} w_i \mu_i = w^T \mu \quad (۷)$$

$\mu_i = E[R_i]$ بازده مورد انتظار دارایی i، $\mu = (\mu_۱, \dots, \mu_n)^T$ و $R = \left(R_۱, \dots, R_n\right)^T$.
واریانس R_i به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_i^۲ = \sigma_i \sigma_i = Var[R_i] = E\left[\left(R_i - \mu_i^۲\right)\right]. \quad (۸)$$

هم‌چنین واریانس سبد به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_P^{۲} = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i - \mathrm{E}\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i\right]\right)^{۲}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=۱}^{n} w_i (R_i - \mu_i) \sum_{j=۱}^{n} w_j (R_j - \mu_j)\right] = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (۹)$$

و ماتریس کوواریانس بازده سبد سهام به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{E}[(R_۱-\mu_۱)(R_۱-\mu_۱)] & \mathrm{E}[(R_۱-\mu_۱)(R_۲-\mu_۲)] & \mathrm{E}[(R_۱-\mu_۱)(R_n-\mu_n)] \\ \mathrm{E}[(R_۲-\mu_۲)(R_۱-\mu_۱)] & \mathrm{E}[(R_۲-\mu_۲)(R_۲-\mu_۲)] & \mathrm{E}[(R_۲-\mu_۲)(R_n-\mu_n)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{E}[(R_n-\mu_n)(R_۱-\mu_۱)] & \mathrm{E}[(R_n-\mu_n)(R_۲-\mu_۲)] & \mathrm{E}[(R_n-\mu_n)(R_n-\mu_n)] \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

اگر ریسک به عنوان واریانس یا انحراف استاندارد مطرح شود یک سبد سهام بهینه با یک بازده مورد انتظار μ_b مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کند (رضایی و همکاران، ۱۳۹۷)

$$\begin{gathered} \min_w \; w^T \textstyle\sum w \\ s.t. \;\; \mu^T w = \mu_b \,, \quad e^T w = ۱ \end{gathered}$$

بهینه‌سازی با روش MAD به منظور حل یک مسئله خطی به جای یک برنامه درجه دوم حاصل می‌شود که در آن مسئله به حداقل رساندن ریسک مورد نظر با سطح معینی از بازده مورد انتظار μ_b به صورت زیر نشان داده شده است:

$$\min_w \mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i - \mathrm{E}\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i\right]\right|\right] \qquad (۱۱)$$
$$s.t \; \sum_{i=۱}^{n} \mathrm{E}[R_i] w_i = \mu_b, e^T w = ۱$$

چون $\sum_{i=۱}^{n} \mathrm{E}[R_i] w_i = \mu^T w$، پس $e^T w = ۱$ و $\mu^T w = \mu_b$ همان قیدهای موجود در MV است. تنها تفاوت بین بهینه‌سازی‌های MV و MAD تابع هدف است که تابع هدف MV می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i - \mathrm{E}\left[\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i\right]\right)^{۲}\right] \qquad (۱۲)$$

و برای بهینه‌سازی MAD تابع هدف به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=۱}^{n} R_i w_i - \mathrm{E}\left[\sum R_i w_i\right]\right|\right] \qquad (۱۳)$$

برای سبد سهام با بازده مورد انتظار μ_b، یک سبد سهام با کم‌ترین ریسک وجود دارد، که این خطر باریسک MAD مطرح می‌شود. می‌توان تابع هدف بهینه‌سازی MAD را طبق فرمول زیر تخمین زد:

$$E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} R_i w_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} R_i w_i\right]\right|\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{it} - \bar{r}_i)w_i\right| \qquad (14)$$

که در آن r_{it} بازده‌های مشاهده شده سبد برای $i = 1,2,\ldots,n$ و T و $t = 1,2,\ldots,T$ و همچنین $\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$ است. برای ساده‌سازی محاسبات مجموعه‌ی $a_{it} = r_{it} - r_i$ ساخته می‌شود آنگاه می‌توان مسئله‌ی مینیمم کردن MAD برای بازده مورد انتظار داده شده μ_b را به صورت زیر نوشت:

$$\min_w \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_{it} w_i\right|/T$$
$$\text{s.t. } \hat{\mu}^T w = \mu_b\ ,\ e^T w = 1,$$

ارزش در معرض خطر (VaR) یک معیار ریسک است که ضرر یک سبد سهام با سطح اطمینان خاص α، $\alpha \in (0,1)$ را تخمین می‌زند. اگر $L(w,R)$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد در این صورت اینفیمم مجموعه‌ی $\{\xi: \mathbb{P}[\mathbb{L}(\mathbb{w},\mathbb{R}) \leq \xi] \geq \alpha\}$ به دست آمده است و $\mathbb{VaR}_\alpha(\mathbb{w})$ مقدار $\mathbb{1} - \alpha$ ضرر است. یعنی آستانه یا مرز منحصر به فرد ξ برای هر $\mathbb{P}[\mathbb{L}(\mathbb{w},\mathbb{R}) \leq \xi] = \alpha$ وجود دارد.

CVaR یک اندازه‌گیری پرریسک است که به کمک VaR_α به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(w) = E[L(w,R)|L(w,R) > \mathrm{VaR}_\alpha(w)] \qquad (15)$$

به بیان دیگر

$$CVaR_{1-\alpha}(y) := \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_{1-\alpha}(y)dy. \qquad (16)$$

معادله بهینه‌سازی سبد با تابع هدف CVaR_α با بازده مورد انتظار μ_b به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\min_{w,\xi} \xi+\frac{1}{1-\alpha}E\left[\left(-\sum_{i=1}^{n} R_i w_i-\xi\right)^{+}\right]$$
$$s.t \qquad \mu^T w = \mu_b \;, \quad e^T w = 1.$$

تابع مفصل ابزاری مفید برای ساخت و شبیه‌سازی توزیع‌های چند متغیره است که اولین بار توسط اسکلار (۱۹۵۹) معرفی گردید و مورد استقبال پژوهشگران در زمینه‌های مختلف ازجمله حوزه مالی قرار گرفت. در مباحث مالی از تابع مفصل در موضوعاتی مانند بررسی سبدی از دارایی‌های مالی و یا بررسی رفتار همزمان تعدادی از ابزارهای مالی استفاده می‌شود. یک مفصل n- بعدی، تابع توزیعی چند متغیره مانند C با توزیع حاشیه‌ای‌هایی C_i است که در ادامه به خصوصیاتی از آن اشاره می‌شود:

$$C : [0,1]^n \to [0,1]$$

C، n- صعودی و جهت دار است،

C_i، حاشیه‌ای‌های C هستند که در $C_i(u) = C\left(1,\dots,1,u,1,\dots,1\right) = u$ به ازای هر $u \in [0,1]$ صدق می‌کند.

معمولا برای محاسبه وابستگی بین دو متغیر تصادفی از ضرایب همبستگی مانند ρ پیرسون یا τ کندال استفاده می‌شود. از آنجایی که ضریب هبستگی پیرسون تحت تغییرات حاشیه‌ای پایا نیست و نمی‌توان آن را برحسب تابع مفصل بیان کرد از اندازه‌های وابستگی دیگری مانند τ کندال استفاده می‌شود که برابر است با تفاضل احتمالات هماهنگ بودن و هماهنگ نبودن دو متغیر است و براساس تابع مفصل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)\,dC(u_1,u_2) - 1 \qquad (17)$$

از طرفی برای خانواده توابع مفصل بیضوی رابطه زیر بین τ کندال و ρ پیرسون برقرار است (نلسن ۲۰۰۷):

$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho). \qquad (18)$$

۵. یافته‌های پژوهش

در این پژوهش به بهینه‌سازی سبد سهام با چهار روش میانگین–واریانس (MV)، میانگین–نیم‌واریانس (MSV)،میانگین–انحراف مطلق (MAD) و میانگین–ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR) پرداخته و در ادامه چهار روش ریسک با هم مقایسه می‌شوند. پنج نماد مورد بررسی حکشتی، کچاد، وپارس، خودرو و شبندر می‌باشند که در دوره زمانی ۱۳۹۹/۹/۱ تا ۱۴۰۰/۳/۱ در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ میانگین و واریانس پنج نماد مورد نظر در بازه زمانی مشخص ارائه شده است.

جدول ۱. میانگین و انحراف‌معیار بازده سهم‌ها

منبع: یافته‌های پژوهش

	حکشتی	کچاد	وپارس	خودرو	شبندر
میانگین	-۰/۰۰۹۰۱	۰/۰۰۱۱۵	-۰/۰۰۳۳۱	-۰/۰۰۳۸۱	-۰/۰۰۳۱۱
انحراف‌معیار	۰/۰۵۴۳۵۷	۰/۰۲۵۵۷۴	۰/۰۲۹۴۰۸	۰/۰۳۴۳۱۸	۰/۰۳۱۸۸۵

در ادامه به محاسبه پارامترهای ریسک و بازده سبدهای سهام با معیارهای MV، MSV، MAD و CVaR پرداخته می‌شود. جدول۲ محاسبه پارامترهای گفته شده با استفاده از روش میانگین واریانس یا MV را نشان می‌دهد.

جدول ۲. محاسبه ریسک و بازدهی در روش MV

منبع: یافته‌های پژوهش

CVaR		MAD		MSV		MV	
ریسک	بازده	ریسک	بازده	ریسک	بازده	ریسک	بازده
۰,۰۰۳۲۴	-۰,۰۰۰۳۷	۰,۰۰۷۴۴۲	-۰,۰۰۰۱۸	۰,۰۰۱۶۷	-۰,۰۰۰۱۲	۰,۰۰۱۶۶۶	-۰,۰۰۰۱۱۵
۰,۰۰۳۲۴	-۰,۰۰۰۳۷	۰,۰۰۷۴۴۶	-۰,۰۰۰۱۸	۰,۰۰۱۶۷	-۰,۰۰۰۱۱	۰,۰۰۱۶۷۱	-۰,۰۰۰۱۱۲
۰,۰۰۳۲۴	-۰,۰۰۰۳۶	۰,۰۰۷۴۵۰	-۰,۰۰۰۱۷	۰,۰۰۱۶۸	-۰,۰۰۰۱۱	۰,۰۰۱۶۷۷	-۰,۰۰۰۱۰۹
۰,۰۰۳۲۶	-۰,۰۰۰۳۶	۰,۰۰۷۴۵۴	-۰,۰۰۰۱۷	۰,۰۰۱۶۸	-۰,۰۰۰۱۱	۰,۰۰۱۶۸۳	-۰,۰۰۰۱۰۶
۰,۰۰۳۲۶	-۰,۰۰۰۳۴	۰,۰۰۷۴۵۸	-۰,۰۰۰۱۶	۰,۰۰۱۶۹	-۰,۰۰۰۱۰	۰,۰۰۱۶۸۹	-۰,۰۰۰۱۰۲
۰,۰۰۳۵۶	-۰,۰۰۰۱۲	۰,۰۰۷۶۶۲	-۰,۰۰۰۰۲	۰,۰۰۱۹۹	-۰,۰۰۰۰۱	۰,۰۰۱۹۸۹	-۰,۰۰۰۰۰۵
۰,۰۰۳۵۶	-۰,۰۰۰۱۲	۰,۰۰۷۶۷۴	-۰,۰۰۰۰۲	۰,۰۰۲۰۰	۰,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۲۰۰۲	-۰,۰۰۰۰۰۲

۰،۰۳۵۸	-۰،۰۰۱۱	۰،۰۷۶۸۸	-۰،۰۰۰۱	۰،۰۲۰۱	۰،۰۰۰۰	۰،۰۲۰۱۵	۰،۰۰۰۰۱
۰،۰۳۶۰	-۰،۰۰۱۰	۰،۰۷۷۰۵	-۰،۰۰۰۱	۰،۰۲۰۳	۰،۰۰۰۰	۰،۰۲۰۲۸	۰،۰۰۰۰۵

در جدول ۲ با استفاده از هر چهار معیار وزن‌های مختلفی نشان داده می‌شود. در سطوح مختلف بازدهی مشاهده می‌شود که نماد کچاد دارای بیشترین وزن و نماد حکشتی کم‌ترین وزن سبد را دارا می‌باشد. همچنین در سطوح بالای بازدهی با افزایش بازده، مشاهده می‌شود که ریسک به میزان قابل توجهی افزایش نمی‌یابد.

در محاسبه وزن‌های سبد نتایجی که به دست آمد بدین شرح است که وزن‌ها از نظم ثابتی پیروی نمی‌کنند. در سطوح پایین بازدهی نماد کچاد دارای بیشترین وزن و بعد از آن نماد خودرو و شبندر وزن بیشتری نسبت به سایر نمادها دارند. ریسک در این سطح از بازدهی تقریبا ثابت است. همچنین با افزایش بازدهی ریسک نیز به میزان کم افزایش می‌یابد. در سطوح بالای بازدهی نماد کچاد وزن غالب را برخوردار می‌باشد و سهم نماد خودرو و شبندر کمتر شد. در سطوح بالای بازدهی خرید نماد خودرو و حکشتی پیشنهاد نمی‌شود. در سطوح بالای بازدهی با افزایش بازده ریسک با سرعت کمتری افزایش می‌یابد. وزن نمادهای خودرو، شبندر، خپارس و حکشتی در هر چهار معیار ریسک در حال کاهش و وزن نماد کچاد در هر چهار معیار ریسک در حال افزایش می‌باشد. هم‌چنین وزن‌های پیشنهاد شده از طرف معیارهای ریسک در نماد خودرو به نسبت سایر نمادها با نوسان بیشتری ارائه شده است.

در ادامه به شبیه‌سازی بازده‌هایی با ساختار وابستگی مشابه در داده‌های اصلی و با چولگی و کشیدگی از پیش تعیین شده پرداخته می‌شود. این شبیه‌سازی‌ها برای بررسی تجربی میزان چولگی و کشیدگی در حداقل ریسک سبد استفاده می‌شوند.

بازده پنج سهم فرضی با میانگین‌ها و کوواریانس‌های مشابه با نمادهای خودرو، شبندر، خپارس، حکشتی و کچاد شبیه سازی شده است تا نتایج مقادیر مختلف چولگی و کشیدگی به وضوح مقایسه شود. برای مشابه بودن با داده های داده شده از تحلیل تجربی، داده های شبیه سازی شده شامل پنج ستون است که هر ستون از ۱۰۰۰ نقطه داده تشکیل شده است. در اینجا مقادیر چولگی و کشیدگی از پیش تعیین می‌شود. شبیه‌سازی‌ها اساساً از دو بخش اصلی تشکیل شده‌اند که در یک در بخش بازده داده‌های حاشیه‌ای شبیه‌سازی می‌شوند و در بخش دیگر وابستگی بازده‌های تاریخی داده‌ها اعمال می‌شود.

جدول ۳ سه مورد چولگی و سه مورد کشیدگی تعیین شده برای شبیه سازی را نشان می‌دهد.

جدول ۳. مقادیر چولگی و کشیدگی هر سهم

منبع: یافته‌های پژوهش

	شبندر	خودرو	وپارس	کچاد	حکشتی
چولگی سبد	۰،۳۵۳	۰،۴۶۵	۰،۳۶۷	۰،۵۹۱	-۱،۸۹۰
چولگی به راست دوبرابر	۰،۷۰۶	۰،۹۳۰	۰،۷۳۴	۱،۱۸۲	-۳،۷۸۰
چولگی به چپ دوبرابر	-۰،۷۰۶	-۰،۹۳۰	-۰،۷۳۴	-۱،۱۸۲	۳،۷۸۰
کشیدگی سبد	۲،۰۴۱	۲،۶۴۰	۲،۴۶۸	۳،۰۴۷	۴،۴۲۵
کشیدگی نصف	۱،۰۲۰	۱،۳۲۰	۱،۲۳۴	۱،۵۲۳	۲،۲۱۲
کشیدگی دو برابر	۴،۰۸۲	۵،۲۲۰	۴،۹۳۶	۶،۰۹۴	۸/۸۵۰

برای ساختار وابستگی ارائه شده توسط τ کندال و مفصل گاوسی، اعداد تصادفی حاشیه‌ای با چولگی و کشیدگی داده شده شبیه سازی می‌شوند. بدون ارائه فرمول های صریح، روش استفاده از مفصل گاوسی شرح داده خواهد شد. ابتدا اعداد تصادفی نرمال استاندارد وابسته پنج بعدی تولید و به اعداد تصادفی یکنواخت پنج بعدی در جعبه واحد [۰،۱][5] تبدیل می‌شوند. از آنجایی که τ کندال تحت توابع اکیداً صعودی پایا است، و تابع توزیع نرمال استاندارد صعودی است، τ کندال برای اعداد تصادفی یکنواخت مانند بازده‌های تاریخی خواهد بود. سپس اعداد تصادفی یکنواخت را به اعداد تصادفی پیرسون تبدیل می‌کنیم به گونه‌ای که با پارامترهایی که میانگین و واریانس آن با بازده تجربی منطبق باشد و مقادیر چولگی و کشیدگی گفته شده برای آن در نظر گرفته می‌شود. تبدیل اعداد تصادفی یکنواخت به اعداد تصادفی پیرسون با اتصال اعداد تصادفی یکنواخت به معکوس تابع توزیع تجمعی پیرسون به دست می‌آید. همچنین در اینجا اعداد تصادفی پیرسون همان وابستگی τ کندال که در بازده تاریخی مشاهده شده را دارند. برای جزییات بیش‌تر به ناگاهارا (۲۰۰۴) مراجعه شود.

در جدول ۴ ماتریس همبستگی τ کندال سهم‌ها ارائه می‌شود.

جدول شماره ۴. ماتریس همبستگی τ کندال بازده سهم‌ها

منبع: یافته‌های پژوهش

سهام	حکشتی	کچاد	وپارس	خودرو	شبندر
حکشتی	۱	۰٫۱۰۶۵۰۱	۰٫۰۵۴۸۴۳	۰٫۰۴۰۱۶۸	۰٫۱۱۷۷۸۹
کچاد	۰٫۱۰۶۵۰۱	۱	۰٫۰۴۹۷۶۵	-۰٫۰۳۲۲۲	۰٫۰۴۸۰۴۷
وپارس	۰٫۰۵۴۸۴۳	۰٫۰۴۹۷۶۵	۱	۰٫۱۰۷۷	۰٫۲۴۳۴۴۷
خودرو	۰٫۰۴۰۱۶۸	-۰٫۰۳۲۲۲	۰٫۱۰۷۷	۱	۰٫۰۰۷۴۰۷
شبندر	۰٫۱۱۷۷۸۹	۰٫۰۴۸۰۴۷	۰٫۲۴۳۴۴۷	۰٫۰۰۷۴۰۷	۱

برای شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی از توزیع پیرسون و ساختار وابستگی با استفاده از مفصل گوسی روش زیر به کار گرفته می‌شود. اگر ماتریس M معین مثبت تعریف شده باشد، آن‌گاه بعضی ماتریس‌های $n \times n$، A وجود دارند به‌طوری‌که $M = AA^T$. هم‌چنین فرض می‌شود که متغیرهای تصادفی $Z_1, \dots, Z_n$ نرمال استاندارد مستقل هستند. بنابراین بردار تصادفی $\mu + AZ$ (که در آن $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ و بردار $\mu \in R^n$) نرمال چندمتغیره با بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس M خواهد بود. از این‌رو می‌توان متغیرهای تصادفی از مفصل نرمال nـ بعدی را با الگوریتم زیر تولید کرد:

الگوریتم

تجزیه چولسکی Aی ماتریس τ را پیدا کنید.

n تا متغیر تصادفی نرمال استاندارد مستقل $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ را شبیه‌سازی کنید.

$x = Az$ در نظر گرفته می‌شود.

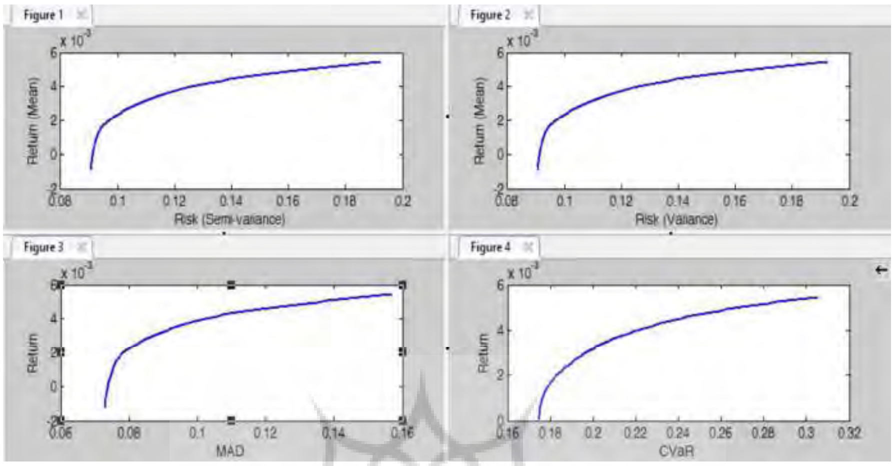
$u_i = \Phi(x_i)$، $i = 1, \dots, n$ محاسبه می‌گردد.

$y_i = F^{-1}(u_i)$، داده‌های تصادفی با چولگی و کشیدگی موردنظر محاسبه می‌گردد.

سبد بهینه با بردار $Y = \left(y_1, y_2, \dots, y_n\right)$ به دست می‌آید.

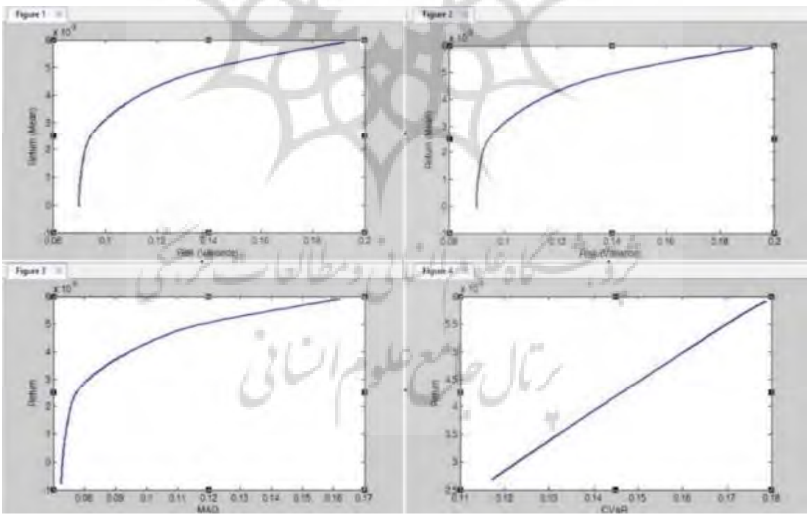
در ادامه به کمک الگوریتم بالا به بررسی اثر چولگی و کشیدگی برروی سبدهای بهینه پرداخته می‌شود. خم‌کارای سبدهای بهینه بر اساس چولگی و کشیدگی در شکل ۱ تا شکل ۵ ارائه می‌شود، بنابراین هنگام تغییر مقادیر مختلف چولگی، مقدار کشیدگی منطبق با

داده‌های واقعی و ثابت نگه داشته می‌شود و هنگام تغییر مقـادیر مختلـف کشـیدگی، مقـدار چولگی منطبق با داده‌های واقعی و ثابت نگه داشته می‌شود.



شکل ۱. خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی و چولگی سبد

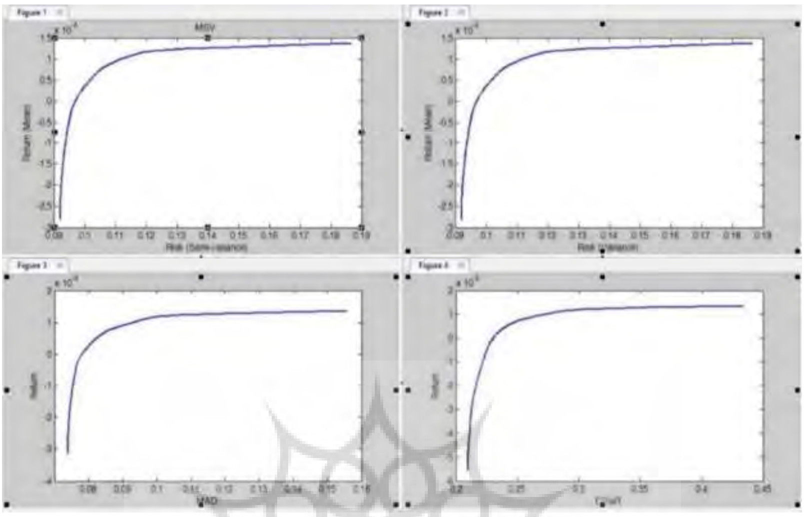
منبع: یافته‌های پژوهش



شکل ۱. خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی سبد و چولگی دوبرابر

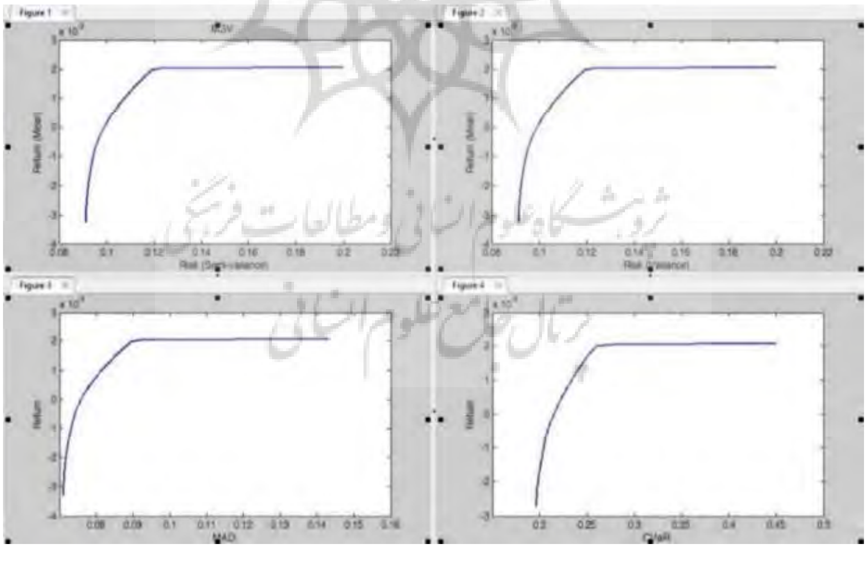
منبع: یافته‌های پژوهش

در شکل ۲ که خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده بـا کشـیدگی سـبد و چولگی دوبرابر ارائه شده است، خم‌کارای CVaR از فرم استاندارد خود خارج شده است.



شکل ۲. خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی سبد و چولگی دوبرابر منفی

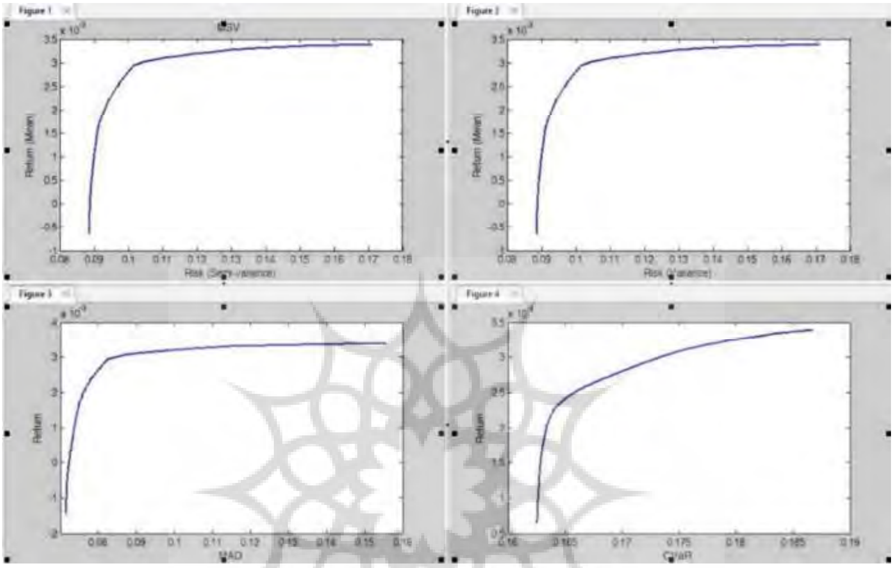
منبع: یافته‌های پژوهش



شکل ۳. خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی دوبرابر و چولگی برابر سبد

منبع: یافته‌های پژوهش

در شکل ۴ که خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی دوبرابر و چولگی برابر ارائه شده است، برای هر چهار خم‌کارا در بازده ۰٫۰۰۰۲ نقطه تیزی ایجاد شده است که همواری نمودارها را از بین برده است و نقطه مطلوبی برای سرمایه‌گذاری می‌باشد.



شکل ۵. خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی نصف و چولگی برابر سبد

منبع: یافته‌های پژوهش

در شکل ۵ خم‌کارای سبدهای بهینه با داده‌های شبیه‌سازی شده با کشیدگی نصف شده و چولگی برابر ارائه شده است. برای این حالت نیز نقطه تیزی ایجاد شده نقطه مطلوبی برای سرمایه‌گذاری می‌باشد.

جدول ۵. ریسک سبد بهینه به ازای بازده ۰٫۰۰۰۱۳۷ در سبد

منبع: یافته‌های پژوهش

کشیدگی نصف	کشیدگی دوبل	چولگی دوبل منفی	چولگی دوبل	چولگی و کشیدگی سبد	
۰٫۱۶۲۸۰	۰٫۲۴۱۷۹	۰٫۴۳۴۳۷	۰٫۲۲۷۰۳	۰٫۱۷۸۲۸۰	CVaR
۰٫۰۷۴۳۵	۰٫۰۸۴۲۲۸	۰٫۱۵۵۸۷	۰٫۰۷۴۵۱	۰٫۰۷۶۰۰۹	MAD
۰٫۰۹۰۵۴	۰٫۱۱۱۳۶	۰٫۱۸۶۷۴	۰٫۰۹۱۱۰	۰٫۰۹۳۵۵۲	MV

MSV	۰,۰۰۹۳۵۵۲	۰,۰۰۹۱۱۰	۰,۰۱۸۶۷۱	۰,۰۱۱۰۱۵	۰,۰۰۹۰۴۹

در جدول ۵ نشان داده شده است که حداقل ریسک بهینه سازی MAD، MV و MSV بـا افزایش تا دوبرابر چولگی، کاهش یافته، در حالی که ریسـک بهینـه سـازی CVaR بـرعکس بیش‌تر می شود. بنابراین چولگی بر روی حداقل ریسـک بهینـه‌سـازی MAD، MV و MSV تاثیر منفی دارد و بر روی حداقل ریسک بهینه سازی CVaR تاثیر مثبت دارد.

هـم‌چنـین در جـدول ۵ نشـان داده شـده اسـت کـه حـداقل ریسـک بهینـه سـازی در هر چهار روش MAD، MV، MSV و CVaR با افزایش تا دوبرابر کشیدگی، بیشتر مـی شـود و ریسک بهینـه سـازی CVaR از همـه مقـادیر ریسـک بیشـتر افـزایش یافتـه و و ریسـک بهینه‌سازی MSV کمتر افزایش یافتـه اسـت. بنـابراین کشـیدگی بـر روی حـداقل ریسـک بهینه‌سازی هر چهار روش تاثیر مثبت دارد.

۶. نتیجه‌گیری

تاثیرگذاری عوامل محیطی مثل مذاکرات سیاسی بر بازار سرمایه می‌تواند منجـر بـه تغییـر در شکل توزیع بازده سهام گردد. این تاثیر ممکن است با تغییر در چـولگی و کشـیدگی توزیـع داده‌ها همراه باشد. در این پژوهش اثرپـذیری معیارهـای ریسـک در سـبد بهینـه بـا وجـود چولگی و کشیدگی در ساختار داده‌ها مورد بررسی قرار گرفـت. در ایـن راسـتا چهـار سـبد میانگین- واریانس، بهینه‌سازی میانگین–نیم‌واریانس، بهینه‌سازی میانگین–قـدرمطلق انحـراف از میانگین و بهینه‌سازی میانگین–ارزش در معرض خطر مشروط در نظر گرفته و سبد بهینـه سهام با استفاده از این چهار مدل بهینه‌سازی تعیـین شـد. وجـه تمـایز ایـن مطالعـه از سـایر مطالعات صورت گرفته در پژوهش‌های داخلی و خارجی این است که چهار معیـار ریسـک با چولگی و کشیدگی‌های مختلف در داده‌های شبیه‌سازی شده بررسی شدند. نتـایج تحقیـق حاضر نشان داد که در صورت تغییر چولگی و کشیدگی، ریسک CVaR بیش‌تـرین تغییـر و ریسک MAD کمترین تغییر را دارد. همچنین ریسـک MAD در بعضـی نقـاط تحـت تـأثیر چولگی نیست.

برای بررسی چولگی و کشیدگی در بهینه‌سازی‌های سبد، میـانگین و واریـانس داده‌هـای تاریخی با در نظر گرفتن وابستگی کنـدال و چـولگی و کشـیدگی‌هـای متفـاوت بـا توزیـع پیرسون شبیه‌سازی می‌شوند. چون سیستم توزیع پیرسون بـرای تولیـد محـدوده وسـیعی از

توزیع‌ها با چولگی‌ها و کشیدگی‌های مختلف به کار می‌رود، بازده‌های حاشیه‌ای با چولگی و کشیدگی‌های داده شده و با شبیه سازی اعداد تصادفی از توزیع شده پیرسون حاصل می‌شوند که با حفظ وابستگی سهم‌ها توسط یک مفصل گاوسی به دست می‌آیند. با توجه به نتیجه‌ای که از داده‌های شبیه‌سازی شده به دست آمد مشاهده می‌شود که در بهینه‌سازی سبدها کمترین ریسک با نصف کردن کشیدگی ایجاد می‌شود. همچنین در بهینه‌سازی با CVaR به بالاترین سطح ریسک برای سبد در چولگی دوبرابر منفی حاصل می‌شود. برای مطالعات بعدی می‌توان عوامل دیگری غیر از چولگی و کشیدگی را برای تأثیرات در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر گرفت و بررسی کرد.

کتاب‌نامه

پاک مرام، ع. بحری ثالث، ج. و ولی زاده، م. (۱۳۹۶). انتخاب و بهینه سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک، با بهره گیری از مدل میانگین-نیمه واریانس مارکویتز، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۸(۳۱)، ۱۹-۴۲.

تهرانی، ر. فلاح تفتی، س. و سپهر، الف. (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبد سهام به کمک الگوریتم فراابتکاری دسته‌های میگو با استفاده از معیارهای مختلف از ریسک در بازار اوراق بهادار تهران، نشریه تحقیقات مالی. ۱۹(۲)، ۲۶۳ -۲۸۰.

حدادی، م. ر. جلیلی، پ. و گودرزی، س. (۱۳۹۹). استراتژی تنوع سازی سبد سهام بهینه با استفاده از معیارهای ریسک WCVaR و β مقایسه آن با روش مونت کارلو، مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۱۱(۴۵)، ۱۰۱-۱۲۶.

حدادی، م. ر. نادمی، ی. طافی، ف.(۱۴۰۰). بهینه سازی سبد سهام با معیارهای MAD و CVaR با مقایسه چهار روش‌های کلاسیک و فراابتکاری، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۱۲(۴۷)، ۵۱۴-۵۳۳ .

خالوزاده، ح. و امیری، ن. (۱۳۸۵). تعیین سبد سهام بهینه در بازار در معرض ریسک ،مجله تحقیقات اقتصادی. شماره ۷۳، ص ۲۳۱-۲۱۱.

راعی، ر. تلنگی، ا. (۱۳۸۳). مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته، چاپ اول. انتشارات سمت.

راعی، ر.، و علی بیکی، ه. (۱۳۸۹). بهینه‌سازی نمونه کارها با استفاده از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات. تحقیقات مالی، ۲ (۲۹)، ۲۱-۴۰.

رضایی، ا.، فلاحتی، ع. و سهیلی، ک. (۱۳۹۷). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم تجمع ذرات سه هدفه. فصلنامه علمی نظریه های کاربردی اقتصاد, ۵(۴), ۳۱-۵۲.

روغنیان، ع.، همایی‌فر، س. (۱۳۹۵). به کارگیری الگوهای بهینه سازی پایدار و برنامه ریزی آرمانی در مسئله انتخاب سبد سرمایه گذاری چند دوره‌ای. فصل‌نامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۷(۲۸)، ۱۵۳–۱۶۷.

سروش، الف. عطرچی، ر. و رامتین‌نیا، ش. (۱۳۹۶). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم بهینه سازی مبتنی بر آموزش و یادگیری (TLBO) در بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه تحقیقات مالی، ۲(۱۹)، ۲۸۰–۲۶۳.

عبدی، م. (۱۳۸۹). بررسی بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری،با مرور مدل‌های سرمایه‌گذاری در پرتفوی اوراق بهادار. پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی.

علی پور جورشری، ا. یاکیده، ک. و محفوظی، غ. (۱۳۹۶). بهینه‌سازی سبد سهام با حداقل میانگین انحرافات مطلق کارایی‌های متقاطع، مدیریت صنعتی، ۹(۳)، ۴۷۵-۴۹۶.

گرکز، م. عباسی، الف. و مقدسی، م. (۱۳۸۹). انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک بر اساس تعاریف متفاوتی از ریسک. فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سنندج، سال پنجم، ۱۱، ۱۳۶–۱۱۵.

نریمانی، ا. و نریمانی، ر. (۱۳۹۲). مدیریت سبد دارایی با استفاده از MATLAB و GAMS، تهران، انتشارات ناقوس.

Ali, H. O., & Jilani, F. (2014). Mean-VAR model with stochastic volatility. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 109, 558-566.

Bower, B., and Wentz, P. (2005). Portfolio optimization: MAD vs. Markowitz. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 6(2), 3, 1-17.

Fernando G., Guijarro F., and Oliver J. (2018). Index tracking optimization with cardinality constraint: A performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics. Neural Computing and Applications 30: 2625-41.

Henriques, C. O., & Neves, M. E. D. (2019). A multiobjective interval portfolio framework for supporting investor’s preferences under different risk assumptions. Journal of the Operational Research Society, 70(10), 1639-1661.

Hunjra, A. I., Alawi, S. M., Colombage, S., Sahito, U., & Hanif, M. (2020). Portfolio Construction by Using Different Risk Models: A Comparison among Diverse Economic Scenarios. Risks, 8(4), 1-23.

Jorion, P. (1992). Portfolio optimization in practice. Financial analysts journal, 48(1), 68-74.

Krokhmal, P., Uryasev, S., Zrazhevsky, G. (2003). Numerical comparison of CVaR and CDaR approaches: Application to hedge funds, The Stochastic Programming Approach to Asset-Liability and Wealth Management. AIMR/Blackwell.

Li, D., and Ng, W. L. (2000). Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean variance formulation, Math Finance, 10(3): 387-406.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, Journal of Finance, 7, 77-91.

Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993). Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. Annals of Operations Research, 45(1), 307-317.

Moon, Y., & Yao, T. (2011). A robust mean absolute deviation model for portfolio optimization. Computers & Operations Research, 38(9), 1251-1258.

Nelsen, R. B. (2007). An introduction to copulas. Springer Science & Business Media.

Nagahara, Y. (2004). A method of simulating multivariate nonnormal distributions by the Pearson distribution system and estimation. Computational statistics & data analysis, 47(1), 1-29.

Richard O M. (1998). Efficient asset management. Harvard Business School Press.

Rockfeller, T., Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distribution, Journal of Banking and Finance, 26(7), 1443-73.

Wie, S. Z., and Ye, Z. X. (2007). Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market, Appl Math Comput, 186(1): 414-425.

Zhu, S. S., Li, D., and Wang, S. Y. (2004). Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation., IEEE transactions on Automatic Control, 49(3), 457-447.