Research in Logic, Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)
Biannual Journal, Vol. 12, No. 2, Autumn and Winter 2021-2022, 149-173
Doi: 10.30465/lsj.2022.39376.1383

Modal companions for some subintuitionistic logics

Fatemeh Shirmohammadzadeh Maleki*

Abstract

Our main goal in this paper is to find modal companions for some subintuitionistic logics introduced by de Yongh and Shirmohammadzadeh. They introduced two types of neighbourhood frames, N-neighbourhood frames and NB-neighbourhood frames, in order to prove the completeness of these subintuitionistic logics. The structure of N-neighbourhood frames are similar to the neighborhood frames for non-normal modal logics. But the structure of NB- neighbourhood frames was introduced with a somewhat more complex definition than the neighbourhood semantics for non-normal modal logics. So in order to find out the modal companions of these subintuitionistic logics, we consider two types of translation, one from the language of intuitionistic propositional logic to the language of modal propositional logic, and the other from the language of intuitionistic propositional logic to the language of binary modal propositional logic, and compare the provability of a formula and its translation. Finally, using these two types of translations, we obtained the modal companions of desired subintuitionistic logics.

Keywords: Subintuitionistic Logic, Non-Normal Modal Logic, Binary Modal Logic, Modal Companion, Neighborhood Semantics

* Assistant Professor of Iranian Wisdom and Philosophy Research Institute,

Date received: 05/08/2021, Date of acceptance: 03/11/2021

منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامۀ علمی (مقالۀ علمی ـ پژوهشی)، سال ۱۲، شمارۀ ۲، پاییز و زمستان ۱۴۰۰، ۱۵۱ - ۱۷۳

همتاهای وجهی برای برخی منطق‌های زیر شهودی

فاطمه شیرمحمدزاده ملکی*

چکیده

هدف اصلی ما در این مقاله پیدا کردن همتاهای وجهی برای برخی منطق‌های زیر شهودی معرفی شده توسط دیانگ و شیر محمدزاده است. آنها برای اثبات تمامیت منطق‌های زیر شهودی معرفی شده، دو نوع قاب همسایگی، به نام‌های قاب **N**–همسایگی و قاب **NB**–همسایگی را معرفی کرده‌اند. ساختار قاب‌های **N**–همسایگی شبیه قاب‌های همسایگی شناخته شده برای منطق‌های وجهی غیرنرمال است و ساختار قاب‌های **NB**–همسایگی متفاوت و پیچیده‌تر از قاب‌های همسایگی استاندارد شناخته شده‌ی منطق‌های وجهی غیرنرمال است. لذا به منظور پیدا کردن همتای وجهی برای این منطق‌های زیر شهودی ما دو نوع ترجمه، یکی از زبان منطق گزاره‌ای شهودی به زبان منطق وجهی غیر–نرمال و دیگری از زبان منطق گزاره‌ای شهودی به زبان منطق وجهی دو موضعی را در نظر گرفته و به مقایسه اثبات‌پذیری یک فرمول و ترجمه‌ی آن خواهیم پرداخت. در نهایت و با استفاده از این دو نوع ترجمه، برای آن دسته از منطق‌های زیر شهودی که نسبت به کلاس خاصی از قاب‌های **N**–همسایگی درست و تمام هستند، همتاهای وجهی متناظر را پیدا کرده و برای آن دسته از منطق‌های زیر شهودی که نسبت به کلاس خاصی از قاب‌های **NB**–همسایگی درست و تمام هستند، همتاهای وجهی دوموضعی متناظر را بدست آوردیم.

کلیدواژه‌ها: منطق زیر شهودی، منطق وجهی غیر–نرمال، منطق وجهی دوموضعی، همتای وجهی، معناشناسی همسایگی

* استادیار موسسۀ پژوهشی حکمت و فلسفۀ ایران، f.shmaleki2012@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۲

۱. مقدمه

در سال ۱۹۳۳ گودل (Gödel) یک ترجمه از منطق شهودی گزاره‌ای (IPC) به منطق موجهات S_4 ارائه کرد. سپس در سال ۱۹۵۴ مک‌کینزی (Makinsey) و تارسکی (Tarski) کار گودل را با ارائه‌ی ترجمه‌ی جدیدی بهبود بخشیدند و اثبات کردند که هر فرمول گزاره‌ای A در زبان منطق شهودی اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر ترجمه A در منطق وجهی S_4 اثبات‌پذیر باشد. به بیانی دیگر آنها اثبات کردند که منطق وجهی S_4 همتای وجهی منطق IPC است.

منطق گزاره‌ای پایه (BPC) که منطقی ضعیف‌تر از منطق گزاره‌ای IPC است در ابتدا توسط ویسر (Albert Visser) [۱۷] معرفی شد. انگیزهی ویسر برای مطالعه‌ی چنین منطقی، یافتن یک دستگاه صوری گزاره‌ای غیر وجهی برای اثبات پذیری بوده است. هم‌چنین رویتنبرگ (Wim Ruitenburg) [۱۳] از منطق پایه از دیدگاه فلسفی دفاع کرده و آن را به‌عنوان یک صورت‌بندی برای تعبیر BHK در نظر گرفته است. همانطور که منطق IPC با منطق وجهی S_4 در ارتباط است، نشان داده شده است که منطق BPC نیز با منطق وجهی K_4 در ارتباط است. علاوه بر این، در [۱۴]، اثبات شده است که منطق وجهی wK۴، همتای وجهی منطق BPC است.

منطق زیر شهودی F توسط کرسی در سال ۱۹۸۷ [۱] معرفی شد، دستگاه F ضعیف‌تر از دستگاه BPC است و توانایی اثبات فرمول‌هایی مانند $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ را ندارد. کرسی از ترجمه‌ای شبیه ترجمه گودل استفاده کرد و با استفاده از این ترجمه ارتباط بین منطق زیر شهودی F و منطق وجهی نرمال K را بیان کرد، در حقیقت اثبات کرد که همتای وجهی منطق زیرشهودی ۴، کوچک‌ترین منطق وجهی نرمال، یعنی K است. دستگاه F منطق تعریف شده از اصل‌ها و قواعد زیر است:

۱. $A \rightarrow A \vee B$

۲. $B \rightarrow A \vee B$

۳. $A \wedge B \rightarrow A$

۴. $A \wedge B \rightarrow B$

۵. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$

۶. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

۷. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

۸. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

۹. $A \to A$

۱۰. $\frac{A \quad A\to B}{B}$

۱۱. $\frac{A \quad B}{A\wedge B}$

۱۲. $\frac{A}{B\to A}$

۱۳. $\bot\to A$

دستگاه WF که دستگاهی ضعیف‌تر از دستگاه زیر شهودی F است، توسط دیانگ و شیرمحمدزاده در سال ۲۰۱۷ [۱۵] معرفی و قضایای درستی و تمامیت برای این دستگاه نسبت به نوع خاصی از معناشناسی همسایگی، که متفاوت از معناشناسی همسایگی استاندارد منطق‌های وجهی است، اثبات شده است. همچنین آنها در [۴، ۱۵] منطق‌هایی را بین منطق‌های زیر شهودی WF و F، که نسبت به کلاس خاصی از قاب‌های همسایگی درست و تمام هستند را معرفی کردند. در این مقاله سعی خواهیم کرد تا با در نظر گرفتن دو نوع ترجمه، یکی از زبان منطق گزاره‌ای شهودی به زبان منطق وجهی کلاسیک و دیگری از زبان منطق گزاره‌ای شهودی به زبان منطق وجهی دوموضعی، به مقایسه اثبات‌پذیری یک فرمول و ترجمه‌ی آن پرداخته و با این روش همتای وجهی این منطق‌های زیر شهودی را بدست آوریم.

در بخش ۲، تعاریف و قضایای مربوط به منطق وجهی کلاسیک (غیر–نرمال) را که در سایر بخش‌های این مقاله نیاز خواهیم داشت را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، ابتدا هشت منطق زیر شهودی، که آنها را مکعب زیر شهودی می‌نامیم را معرفی کرده و سپس برای چهار نوع از این منطق‌های زیر شهودی که نسبت به کلاسی از قاب‌های همسایگی (مشابه قاب‌های همسایگی منطق‌های وجهی کلاسیک) درست و تمام هستند، همتاهای وجهی متناظرشان را با ارائه‌ی ترجمه‌ای از زبان منطق گزاره‌ای شهودی به زبان منطق وجهی کلاسیک، به‌دست می‌آوریم. در بخش ۴، چند منطق وجهی دوموضعی را معرفی و قضایای درستی و تمامیت را برای آنها اثبات خواهیم کرد و در نهایت نشان خواهیم داد که این منطق‌های

وجهی دو موضعی، همتاهـای وجهـی منطـق‌هـای زیـر شـهودی معرفـی شـده در بخـش قبلی هستند.

۲. منطق‌های وجهی کلاسیک

در این بخش به معرفی منطق‌های وجهی کلاسیک (غیر–نرمال) خواهیم پرداخت.

منطق وجهی با افزودن عملگر $\Box$ به منطق کلاسیک به دست می‌آید. در این منطق تعبیر $\Box$ ضرورت می‌باشد. امروزه با در نظر گرفتن تعبیرهای جدیدی برای $\Box$ منطق‌های وجهـی متفاوتی به دست می‌آیند. به ویژه با پیشرفت علوم کامپیوتر و هوش مصنوعی این منطق‌هـا نیز گسترش بیشتری یافته‌اند.

$\mathbb{P}$ را مجموعه‌ای شمارا از متغیرهای گزاره‌ای قـرار مـی‌دهـیم. همچنـین $L(\mathbb{P})$ را زبـان وجهـی گـزاره‌ای اسـتاندارد (زبـان گـزاره‌ای بـه همـراه نمـاد $\Box$) قـرار مـی‌دهـیم. در این‌صورت $A \in L(\mathbb{P})$ اگر و فقط A به یکی از صورت‌های نحوی زیر باشد:

$$A \coloneqq p|\neg A|A \wedge B|\Box A$$

برای بقیه‌ی رابطهای گزارهای $\{\leftrightarrow, \rightarrow, \vee\}$ نیز تعاریف استاندارد را به کار می‌بریم.

یکی از معروفترین معناشناسی‌های منطق وجهی معناشناسی کریپکی یا رابطه‌ای است که توسط کریپکی معرفی شده است. او گـزاره‌ای را ضـرورتاً درسـت مـی‌دانـد کـه در تمـام جهان‌های در دسترس درست باشد. یک قاب کریپکی دوتایی $\langle W, R\rangle$ اسـت کـه در آن W مجموعه‌ی جهان‌های ممکن و R یک رابطه‌ی دوتایی روی W می‌باشد.

در قـاب‌هـای کریپکـی تعـدادی از اصـولی معتبرنـد کـه اگـر تعبیرهـای دیگـر $\Box$ را درنظر بگیریم اعتبار آنها نقض می‌شود. به عنـوان مثـال $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ در تمـام قاب‌های کریپکی معتبر می‌باشد که اگر $\Box$ را به عنوان عملگر احتمال بـالا در نظـر بگیـریم رد می‌شود. زیرا ممکن است A و B دو پیشامد با احتمال بـالا باشـند ولـی احتمـال وقـوع ترکیب عطفی آنها کم باشد. از این رو برای بررسی منطق‌های وجهی کلاسیک، معناشناسی همسایگی توسط دینا اسکات و ریچـارد مونتـاگ در ۱۹۷۰ معرفـی شـد. (منطـق عملگـر احتمال بالا با استفاده از معناشناسی همسایگی در [۸] و [۹] بررسی شده است).

تعریف ۱.۲ منظور از یک قاب همسایگی برای منطق وجهی، یک دوتایی $\langle W, N\rangle$ است. در اینجا W مجموعه جهان‌ها و $N: W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ تابع همسایگی می‌باشد ($\mathcal{P}(W)$: مجموعه توانی W). برای هر $w \in W$، $N(w)$ مجموعه‌ای از مجموعه جهان‌ها است.

تعریف ۲.۲ مدل همسایگی دوتایی $\langle F, V\rangle$ است که در آن F یک قاب همسایگی است و $V: \mathbb{P} \to \mathcal{P}(W)$ تابع ارزش‌گذاری می‌باشد.

تعریف ۳.۲ $M = \langle W, N, V\rangle$ را مدل همسایگی دلخواهی قرار می‌دهیم. تعریف درست‌بودن فرمول $A \in L(\mathbb{P})$ در حالت $w \in W$ در مدل M به صورت استقرایی زیر می‌باشد:

۱. $M, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $M, w \nVdash \bot$،

۳. $M, w \Vdash \neg A$ اگر و تنها اگر $M, w \nVdash A$،

۴. $M, w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $M, w \Vdash A$ و $M, w \Vdash A$،

۵. $M, w \Vdash \Box A$ اگر و تنها اگر $(A)^M \in N(w)$.

$(A)^M = \{w \in W | M, w \Vdash A\}$ مجموعه درستی‌های فرمول A است.

در ادامه اصول و قواعد زیر را در نظر می‌گیریم:

PC. هر اصل‌بندی از منطق گزاره‌ای

M. $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

C. $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$

N. $\Box \top$

K. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Nec. $\dfrac{A}{\Box A}$

RE. $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$

RM. $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$

MP. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

به سادگی می‌توان دید که تمام اصول بالا در کلاس همه‌ی مدل‌های کریپکی معتبرند، اما در همه‌ی مدل‌های همسایگی معتبر نیستند.

برای مثال یک سیستم از منطق وجهی را کلاسیک گوییم هرگاه تحت RE بسته باشد. E را کوچک‌ترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت جانشینی‌های PC و قوانین RE و MP قرار می‌دهیم. E کوچکترین منطق وجهی کلاسیک است. منطق EC، گسترش منطق E با افزودن اصل C است، مشابهاً برای EM، EC، EMC و $E_{Nec}MC$. در [۲] نشان داده شده است که هیچ یک از سیستم‌های E، EC، EM، EMC و $E_{Nec}MC$ با هم یکسان نیستند. هم‌چنین در [۱۱] اثبات شده است که در منطق وجهی کلاسیک E، اصل N با قاعده Nec و اصل M با قاعده RM هم ارز هستند.

تعریف ۴.۲ برای هر قاب همسایگی $F = \langle W, N \rangle$ ، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، فرض کنید Y, X و Z زیر مجموعه‌هایی از W باشند:

۱. F تحت اشتراک بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $X \in N(w)$ و $Y \in N(w)$، آنگاه $X \cap Y \in N(w)$.

۲. F تحت ابرمجموعه بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $X \in N(w)$ و $X \subseteq Y$، آنگاه $Y \in N(w)$.

۳. F شامل واحد است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$, $W \in N(w)$.

اثبات قضیه‌ی زیر را می‌توان در [۱۱] یافت.

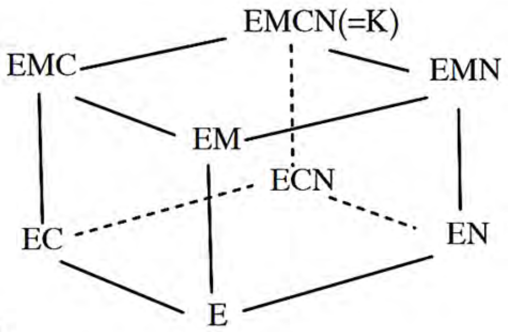
قضیه ۵.۲ (a) منطق وجهی EM، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های همسایگی که تحت ابرمجموعه بسته هستند، درست و تمام است.

(b) منطق وجهی EC، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های همسایگی که تحت اشتراک بسته هستند، درست و تمام است.

(c) منطق وجهی E_{Nec}، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های همسایگی که شامل واحد هستند درست و تمام است.

یک مجموعه از فرمول‌های منطق وجهی را یک منطق وجهی نرمال گوییم هرگاه شامل تمام راستگوها و قالب اصل موضوعی K بوده و تحت قواعد وضع مقدم (MP) و ضرورت (Nec) بسته باشد. کوچکترین منطق وجهی نرمال را K می‌نامیم. به سادگی می‌توان نشان داد که منطق $E_{Nec}MC$ با منطق وجهی نرمال K هم‌ارز است.

در انتها منطق‌های وجهی کلاسیک معرفی شده در این بخش را منطق‌های مکعب وجهی کلاسیک نامیده و به شکل زیر نمایش می‌دهیم:



مکعب وجهی کلاسیک

۳. منطق‌های زیر شهودی

در این بخش به معرفی منطق‌هایی خواهیم پرداخت که ضعیف‌تر از منطق زیر شهودی F هستند. در حقیقت معناشناسی کریپکی یا رابطه‌ای برای مطالعه چنین دستگاه‌هایی مناسب نیست، زیرا معناشناسی کریپکی اصولی را معتبر می‌سازد که برای دستگاه‌های موردنظر ما در حالت کلی معتبر نیستند. برای این منظور، در ادامه دو نوع معناشناسی همسایگی را معرفی خواهیم کرد.

۱.۳ معناشناسی NB–همسایگی

ابتدا منطق زیر شهودی WF را معرفی خواهیم کرد که ضعیف‌ترین منطق زیر شهودی است که تاکنون معرفی شده و قضایای درستی و تمامیت برای آن اثبات شده است. برای اطلاعات بیشتر راجع به این بخش می‌توان به [۱۵] مراجعه کرد. زبان منطق WF همان زبان منطق گزارهای شهودی یعنی $\{\vee,\wedge,\rightarrow,\bot,\top\}$ است.

دستگاه WF، منطق تعریف شده از اصل‌ها و قوانین زیر است:

۱. $A \rightarrow A \vee B$ ۸. $A \rightarrow A$

۲. $B \rightarrow A \vee B$ ۹. $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$

۳. $A \wedge B \rightarrow A$ ۱۰. $\frac{A \quad B}{A \wedge B}$

۴. $A \wedge B \rightarrow B$

۵. $\dfrac{A\rightarrow B \quad A\rightarrow C}{A\rightarrow B\wedge C}$

۶. $\dfrac{A\rightarrow C \quad B\rightarrow C}{A\vee B\rightarrow C}$

۷. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

۱۱. $\dfrac{A}{B\rightarrow A}$

۱۲. $\dfrac{A\rightarrow B \quad B\rightarrow C}{A\rightarrow C}$

۱۳. $\dfrac{A\leftrightarrow B \quad C\leftrightarrow D}{(A\rightarrow C)\leftrightarrow(B\rightarrow D)}$

۱۴. $\bot \rightarrow A$

تعریف ۱.۳ (قاب NB–همسایگی) دوتایی $\mathfrak{F} = \langle W, NB \rangle$ یک قاب NB–همسایگی منطق زیر شهودی نامیده می‌شود در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و NB یک تابع همسایگی از W به $\mathcal{P}\left(\left(\mathcal{P}(W)\right)^2\right)$ باشد، به طوریکه به ازای هر $w \in W$ و $Y \in \mathcal{P}(W)$ و X، اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $(X, Y) \in NB(w)$. مدل NB–همسایگی منطق زیرشهودی، سه تایی $\mathfrak{M} = \langle W, NB, V \rangle$ است که در آن $\langle W, NB \rangle$ یک قاب NB–همسایگی منطق زیر شهودی است و $V\colon \mathbb{P} \rightarrow 2^W$ تابع ارزشگذاری است.

تعریف ۲.۳ (درستی) فرض کنید $\mathfrak{M} = \langle W, NB, V \rangle$ یک مدل NB–همسایگی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \wedge B$ **اگر و تنها اگر** $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ **و** $\mathfrak{M}, w \Vdash B$ ،

۳. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \vee B$ **اگر و تنها اگر** $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ **و** $\mathfrak{M}, w \Vdash B$ ،

۴. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \rightarrow B$ اگر و تنها اگر $(A^{\mathfrak{M}}, B^{\mathfrak{M}}) \in NB(w)$،

۵. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$.

فرمول A در مدل $\mathfrak{M} = \langle W, NB, V \rangle$ معتبر(درست)است، $\mathfrak{M} \Vdash A$،اگر برای هر $w \in W$، $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ و گوییم فرمول A روی قاب $\mathfrak{F} = \langle W, NB \rangle$ معتبر است، $\mathfrak{F} \Vdash A$، اگر به ازای هر مدل $\mathfrak{M}$ روی $\mathfrak{F}$، $\mathfrak{M} \Vdash A$. فرمول A را معتبر گوییم، $\Vdash A$، هرگاه در هر مدلی معتبر باشد.

قاب‌های NB–همسایگی برای منطق‌های زیرشهودی، با قاب‌های همسایگی استانداردی که برای منطق‌های وجهی غیر–نرمال معرفی شده است، متفاوت است. در [۱۵] با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات شده است که منطق زیر شهودی WF، نسبت به کلاس قاب‌های NB–همسایگی درست و تمام است.

منطق‌های زیر شهودی زیادی بین منطق WF و F توسط دیانگ و شیرمحمدزاده در [۳، ۴، ۱۵] معرفی شده‌اند، ولی در این بخش ما تنها به ذکر مواردی خواهیم پرداخت که برای ادامه کار به آنها نیاز داریم. ابتدا تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم:

تعریف ۳.۳ برای هر قاب NB–همسایگی $\mathfrak{F} = \langle W, NB \rangle$، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، ($X, Y, Z \in \mathcal{P}(W)$):

۱. $\mathfrak{F}$ تحت NB–اشتراک بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$ ، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ و $(X, Z) \in NB(w)$ آنگاه $(X, Y \cap Z) \in NB(w)$.

۲. $\mathfrak{F}$ تحت NB–ابر مجموعه بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ و $Y \subseteq Z$ آنگاه $(X, Z) \in NB(w)$.

اصل C و قاعده I_L که در منطق زیر شهودی F درست هستند ولی در منطق زیرشهودی WF درست نیستند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$(A \to B) \land (A \to C) \to (A \to B \land C)$ C

$\frac{A \to B}{(C \to A) \to (C \to B)}$ I_L

توجه داشته باشیم که منظور از WFΓ منطقی است که از اضافه کردن اصل یا قاعده Γ به منطق WF به دست آمده است. با استفاده از مدل‌های کانونی ثابت می‌شود که منطق WFC، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های NB–همسایگی که تحت NB–اشتراک بسته هستند درست و تمام است. همچنین منطق WFI_L، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های NB–همسایگی که تحت NB–ابر مجموعه بسته هستند درست و تمام است.

اگر اصل $\hat{C}$ را به صورت $(A \to B \land C) \to (A \to B) \land (A \to C)$ تعریف کنیم، آنگاه لم زیر حاصل می‌شود.

لم ۴.۳ در منطق WF، اصل $\hat{C}$ با قاعده I_L هم ارز است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اصل $\hat{C}$ از قاعده I_L به صورت زیر بدست می‌آید:

۱. $B \land C \to C$ طبق اصل 4

۲. $(A \to B \land C) \to (A \to C)$ طبق 1 و قاعده I_L

۳. $B \land C \to C$ طبق اصل 4

.4 $(A \to B \wedge C) \to (A \to B)$ طبق 3 و قاعده I_L

.۵ $(A \to B \wedge C) \to (A \to B) \wedge (A \to C)$ طبق 4،2 و قاعده 5

در نهایت قاعده I_L از اصل $\hat{C}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

.۱ $B \to C$ فرض

.۲ $B \leftrightarrow B \wedge C$ طبق ۱

.۳ $A \leftrightarrow A$ راستگو

.۴ $(A \to B) \leftrightarrow (A \to B \wedge C)$ طبق ۲، ۳ و قاعده ۱۳

.۵ $(A \to B \wedge C) \to (A \to B) \wedge (A \to C)$ اصل $\hat{C}$

.۶ $(A \to B) \to (A \to B) \wedge (A \to C)$ طبق ۵، ۴ و قاعده 12

.۷ $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to C)$

.۸ $(A \to B) \to (A \to C)$ طبق 6،7 و قاعده 12

طبق لم بالا و اطلاعاتی که در مورد تمامیت منطق‌های WFC و WFI_L داریم، می‌توان نتیجه گرفت که:

نتیجه ۵.۳

۱. منطق $WF\hat{C}$، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های NB–همسایگی که تحت NB–ابر مجموعه بسته هستند درست و تمام است.

۲. منطق $WFC\hat{C}$، نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های NB–همسایگی که تحت NB–ابر مجموعه و NB–اشتراک بسته هستند درست و تمام است.

۲.۳ معناشناسی N–همسایگی

در ادامه به معناشناسی N– همسایگی خواهیم پرداخت، که نخستین بار توسط دیانگ و شیرمحمدزاده در [۳،۴] برای منطق‌های زیر شهودی بالای WF معرفی شده است. از آن‌جایی که این معناشناسی شبیه معناشناسی همسایگی استاندارد معرفی شده برای منطق‌های وجهی غیر– نرمال است، لذا به نظر میرسد که برای بررسی رابطه بین منطق‌های

وجهی کلاسیک و زیر شهودی مناسب باشند، علی‌الخصوص جهت پیدا کردن همتاهای وجهی برخی منطق‌های زیر شهودی سودمندتر جلوه می‌کنند.

تعریف ۶.۳ (قاب N–همسایگی) دوتایی $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$ یک قاب N–همسایگی منطق زیر شهودی نامیده می‌شود در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و N یک تابع همسایگی از W به $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ است، به طوری که به ازای هر $w \in W$ ، $W \in N(w)$. مدل N–همسایگی منطق زیر شهودی، سه تایی $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$، است که در آن $\langle W, N \rangle$ یک قاب N–همسایگی منطق زیرشهودی است و $V: \mathbb{P} \to 2^W$ تابع ارزشگذاری است.

تعریف۷.۳ (درستی) فرض کنید $\mathfrak{M} = \langle W, V \rangle$ ، یک مدل N–همسایگی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ و $\mathfrak{M}, w \Vdash B$ ،

۳. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \vee B$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ یا $\mathfrak{M}, w \Vdash B$ ،

۴. $\mathfrak{M}, w \Vdash A \to B$ اگر و تنها اگر $\overline{A^{\mathfrak{M}}} \cup B^{\mathfrak{M}} \in N(w)$ $\{\upsilon | \upsilon \Vdash A \Rightarrow \upsilon \Vdash B\} =$،

۵. $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$.

تفاوت درستی در قاب‌های NB–همسایگی و N–همسایگی در قانون N است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{A \to B \vee C \quad C \to A \vee D \quad A \wedge C \wedge D \to B \quad A \wedge C \wedge B \to D}{(A \to B) \leftrightarrow (C \to D)} \; N$$

به بیانی دیگر، مجموعه فرمول‌های درست روی قاب‌های N–همسایگی، توسط سیستم WF_N اصل‌بندی شده است که این سیستم با افزودن قانون N به سیستم WF به‌دست می‌آید. با استفاده از مدل‌های کانونی در [۴] اثبات شده است که منطق زیرشهودی WF_N نسبت به کلاس قاب‌های N–همسایگی درست و تمام است.

در ادامه و برای معرفی برخی منطق‌های بالای WF_N، نیاز به تعریف زیر داریم:

تعریف ۸.۳ برای هر قاب N–همسایگی $\mathfrak{F} = \langle W, N \rangle$، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم، ($X, Y, Z \in \mathcal{P}(W)$):

۱. $\mathfrak{F}$ تحت N–اشتراک بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $\overline{X} \cup Y \in N(w)$، $\overline{X} \cup Z \in N(w)$ آنگاه $\overline{X} \cup (Y \cap Z) \in N(w)$.

۲. $\mathfrak{F}$ تحت N–ابر مجموعه بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $X \in N(w)$ و $X \subseteq Y$ آنگاه $Y \in N(w)$.

با استفاده از مدل‌های کانونی اثبات شده است که منطق زیر شهودی WF_NC، نسبت به کلاسی از قاب‌های N–همسایگی که تحت N–اشتراک بسته هستند درست و تمام است [۴].

حال قانون N_2 که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{C\to A\vee D \quad A\wedge C\wedge B\to D}{(A\to B)\to(C\to D)} \quad N_2$$

با توجه به اینکه قانون N به سادگی از قانون N_2 استنتاج می‌شود، لذا در ادامه منطق WF_{N_2} را به جای منطق $WF_N N_2$ خواهیم نوشت.

لم ۹.۳ اصل $\hat{C}$ در منطق WF_{N_2} اثبات‌پذیر است.

۱. $A \to A \wedge B$ راستگو

۲. $A \wedge A \wedge (B \wedge C) \to B$ راستگو

۳. $(A \to B \wedge C) \to (A \to B)$ طبق ۱، ۲ و قاعده N_2

۴. $A \to A \vee C$ راستگو

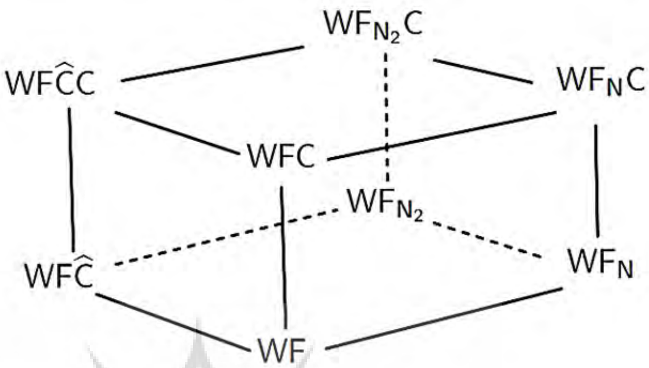
۵. $A \wedge A \wedge (B \wedge C) \to C$ راستگو

۶. $(A \to B \wedge C) \to (A \to C)$ طبق ۴، ۵ و قاعده N_2

۷. $(A \to B \wedge C) \to (A \to B) \wedge (A \to C)$ طبق ۶،۳ و قانون ۵

با استفاده از مدل‌های کانونی ثابت شده است که منطق WF_{N_2}، نسبت به کلاسی از قاب‌های N–همسایگی که تحت N–ابر مجموعه بسته هستند، درست و تمام است [۴]، لذا نتیجه می‌گیریم که منطق زیر شهودی $WF_{N_2}C$ ، نسبت به کلاسی از قاب‌های N–همسایگی که تحت N–ابر مجموعه و N–اشتراک بسته هستند، درست و تمام هستند.

منطق زیر شهودی WF، کوچکترین منطق زیر شهودی شناخته شده‌ای است کـه سـایر منطق‌های زیر شهودی با اضافه کردن اصل‌ها یا قانون‌هایی به این منطق به دست مـی‌آینـد. مکعب منطق‌های زیر شهودی را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:



مکعب زیرشهودی

همانطور که قبلاً نیز بیان شد، منطـق‌هـای WF_N، WF_NC، WF_{N_2} و $WF_{N_2}C$ نسـبت بـه کلاس‌های خاصی از قاب‌های N-همسایگی درست و تمـام هسـتند و از آنجـایی‌کـه ایـن قاب‌های N-همسایگی شبیه قاب‌های همسایگی منطق‌های وجهی غیر- نرمال هسـتند لـذا در قسمت بعدی تلاش خواهیم کرد تا همتای وجهی این منطق‌ها را بدست آوریم.

۳.۳ همتای وجهی

در این بخش ترجمه‌ی □، که ترجمه‌ای از زبان منطق گزاره‌ای زیر شهودی به زبان منطـق وجهی است را در نظر می‌گیـریم. لازم بـه ذکـر اسـت کـه ایـن ترجمـه همـان ترجمـه‌ی استفاده‌شده توسط کرسی [۱] است و تفاوت ترجمه کرسی با ترجمه گودل تنها در ترجمه اتم‌ها است، به این معنا که در ترجمه گودل گزاره اتمی p به صورت □p ترجمه می‌شـود، در حالی‌که در ترجمه کرسی گزاره اتمی p به صورت □p ترجمه می‌شود.

تعریـف ۱۰.۳ ترجمــه‌ی □ از زبـان منطـق گـزاره‌ی ($\mathcal{L}$)، بـه زبـان منطـق گـزاره‌ای وجهی ($\mathcal{L}_{\Box}$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $p^{\Box} = p$،

۲. $(A \wedge B)^{\Box} = A^{\Box} \wedge B^{\Box}$

۳. $(A \vee B)^{\square} = A^{\square} \vee B^{\square}$

۴. $(A \to B)^{\square} = \square(A^{\square} \to B^{\square})$

تعریف ۱۱.۳ منطق $L_{\square}$ در زبان $\mathcal{L}_{\square}$ همتای وجهی منطق L نامیده می‌شود در صورتی که برای هر فرمول A در $\mathcal{L}$، $\vdash_L A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{L_{\square}} A^{\square}$.

از آنجایی که ساختار مدل‌های N–همسایگی و مدل‌های وجهی همسایگی که شامل واحد هستند یکسان است، لذا در این بخش، جهت متمایز ساختن درستی این دو مدل، درستی در مدل‌های N–همسایگی را با $\Vdash$ و درستی در مدل‌های وجهی همسایگی که شامل واحد هستند را با $\vDash$ نمایش خواهیم داد.

لم ۱۲.۳ فرض کنید $\mathfrak{M} = \langle W, N, V \rangle$ یک مدل N–همسایگی باشد. آنگاه به ازای هر $w \in W$،

$\mathfrak{M}, w \Vdash A$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \vDash A^{\square}$

اثبات. اثبات با استقراء روی A انجام می‌شود. اثبات حالت‌های اتمی، عطفی و فصلی ساده می‌باشد. در مرحله‌ی استقراء، حالت شرطی $(C \to D)$ را بررسی می‌کنیم. بنابراین فرض کنید $A = C \to D$ ، در این صورت،

$$\mathfrak{M}, w \Vdash C \to D \Leftrightarrow \{\upsilon | \upsilon \nVdash C\} \cup \{\upsilon | \upsilon \Vdash D\} \in N(w)$$
$$\Leftrightarrow_{\text{طبق فرض استقراء}} \{\upsilon | \upsilon \nvDash C^{\square}\} \cup \{\upsilon | \upsilon \vDash D^{\square}\} \in N(w)$$
$$\Leftrightarrow \{\upsilon | \upsilon \vDash \neg C^{\square}\} \cup \{\upsilon | \upsilon \vDash D^{\square}\} \in N(w)$$
$$\Leftrightarrow \{\upsilon | \upsilon \vDash \neg C^{\square} \vee D^{\square}\} \in N(w)$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \vDash \square(\neg C^{\square} \vee D^{\square})$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \vDash (C \to D)^{\square}.$$

همانطور که در فصل ۲ بیان کردیم منطق E_{Nec} نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های همسایگی که شامل واحد هستند درست و تمام است، لذا با توجه به مشابه بودن کلاس‌هایی که منطق وجهی E_{Nec} و WF_N نسبت به آنها تمامیت دارند، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۳ به ازای هر فرمول A،

(a) $\vdash_{WF_N} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{E_{Nec}} A^{\square}$.

(b) $\vdash_{WF_NC} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{E_{Nec}C} A^{\square}$.

(c) $\vdash_{WF_{N_2}} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{E_{Nec}M} A^{\Box}$.

(d) $\vdash_{WF_{N_2C}} A$ اگر و تنها اگر $\vdash_{E_{Nec}MC} A^{\Box}$.

اثبات. اثبات همه موارد طبق لم ۱۲.۳و قضایای تمامیت برای همه منطق‌های زیرشهودی و وجهی ذکر شده در قضیه واضح است.

طبق قضیه بالا می‌توان نتیجه گرفت که همتای وجهی منطق‌های زیر شهودی WF_N، WF_NC ، WF_{N_2} و $WF_{N_2}C$ به ترتیب برابر با منطق‌های وجهی E_{Nec}، $E_{Nec}C$، $E_{Nec}M$ و $E_{Nec}MC(K)$ است. از آنجایی که همتای وجهی منطق‌های زیر شهودی F و $WF_{N_2}C$ ، منطق وجهی K است لذا می‌توان نتیجه گرفت که این دو منطق یکسان هستند.

۴. منطق وجهی دوموضعی

دیک و شیرمحمدزاده در [۵] معناشناسی همسایگی با عملگر دو موضعی را معرفی و دستگاهی منطقی را ارئه کرده‌اند که نسبت به این معناشناسی درست و تمام است. در این بخش ابتدا این سیستم و معناشناسی متناظر آن را معرفی می‌کنیم و سپس با استفاده از مدل‌های کانونی منطق معرفی شده، منطق‌های دو موضعی دیگری را معرفی و تمامیت آنها را اثبات خواهیم کرد.

تعریف ۱.۴ زبان وجهی دوموضعی کوچکترین مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط دستور زبان زیر است (p متغیر اتمی است):

$p|\neg A|A \wedge B|A \Rightarrow B.$

توجه داشته باشیم که نمادهای $\leftrightarrow$ ، $\rightarrow$ و $\vee$ طبق معمول و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$A \vee B \coloneqq \neg A \wedge \neg B, A \rightarrow B \coloneqq \neg A \vee B, A \leftrightarrow B \coloneqq (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$

تعریف ۲.۴ (قاب همسایگی دوموضعی) دوتایی $F = \langle W, NB \rangle$ یک قاب همسایگی دوموضعی منطق وجهی دوموضعی نامیده می‌شود در صورتی که W یک مجموعه ناتهی از جهان‌ها و NB یک تابع همسایگی از W به $\mathcal{P}((\mathcal{P}(W))^2)$ باشد، به طوری که به ازای هر $w \in W$ و $X, Y \in \mathcal{P}(W)$ اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $(X, Y) \in NB(w)$. مدل همسایگی دو موضعی منطق وجهی دوموضعی، سه تایی $M = \langle W, NB, V \rangle$ است که در آن $\langle W, NB \rangle$

یک قاب همسایگی منطق وجهی دوموضعی است و $V: \mathbb{P} \to \mathcal{P}(W)$ تابع ارزش‌گذاری است.

تعریف ۳.۴ (درستی) فرض کنید $M = \langle W, NB, V \rangle$، یک مدل همسایگی دوموضعی و $w \in W$ باشد. درستی فرمول A به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $M, w \vDash p$ اگر و تنها اگر $w \in V(p)$،

۲. $M, w \vDash \neg A$ اگر و تنها اگر $M, w \nvDash A$،

۳. $M, w \vDash A \wedge B$ اگر و تنها اگر $M, w \vDash A$، $M, w \vDash B$،

۴. $M, w \vDash A \Rightarrow B$ اگر و تنها اگر $(A^M, B^M) \in NB(w)$.

در ادامه اصول و قواعد زیر را در نظر می‌گیریم:

PC هر اصل بندی از منطق گزاره‌ای

$$\frac{A \leftrightarrow B \quad C \leftrightarrow D}{(A \Rightarrow C) \leftrightarrow (B \Rightarrow D)} \quad E^2$$

$$\frac{A \to B}{A \Rightarrow B} \quad Imp$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad MP$$

تعریف ۴.۴. منطق E^2_{Imp} را کوچکترین مجموعه از فرمول‌های بسته تحت جانشینی‌های PC و قوانین Imp , E^2 و MP قرار می‌دهیم.

برای اثبات تمامیت چند منطق وجهی دوموضعی، در ادامه مدل کانونی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۴ فرض کنید $W_{E^2_{Imp}}$ مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های سازگار ماکسیمال از فرمول‌های E^2_{Imp} باشد. برای فرمول A، مجموعه‌ی $[\![A]\!]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[\![A]\!] = \{\Delta \,|\, \Delta \in W_{E^2_{Imp}}, A \in \Delta\}.$$

لم ۶.۴ فرض کنید C و D فرمول‌های دل‌خواهی باشند. آنگاه

(الف) $[\![C \wedge D]\!] = [\![C]\!] \cap [\![D]\!]$.

(ب) $[\![C \vee D]\!] = [\![C]\!] \cup [\![D]\!]$.

(ج) $[\![C]\!] \subseteq [\![D]\!]$ اگر و تنها اگر $\vdash C \to D$.

(د) $⟦C⟧ = ⟦D⟧$ اگر و تنها اگر $\vdash C \leftrightarrow D$.

اثبات. برای اثبات به [۵] مراجعه شود.

تعریف ۷.۴ مدل $M^{E^2_{Imp}} = \langle W_{E^2_{Imp}}, NB_{E^2_{Imp}}, V\rangle$ ، را مدل کانونی برای E^2_{Imp} نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. به ازای هر $\Gamma \in W$ و همه‌ی فرموله‌ای A و B،

$$NB_{E^2_{Imp}}(\Gamma) = \{(⟦A⟧, ⟦B⟧) | A \Rightarrow B \in \Gamma\} \cup \{(X, Y) | X \subseteq Y\}.$$

۲. اگر $p \in \mathbb{P}$، آنگاه $V(p) = ⟦p⟧ = \left\{\Gamma \middle| \Gamma \in W_{E^2_{Imp}} \text{ و } p \in \Gamma\right\}$.

با استفاده از مدل کانونی قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۸.۴ منطق E^2_{Imp} نسبت به کلاس همه‌ی قاب‌های NB–همسایگی دو موضعی درست و تمام است.

اثبات. برای اثبات به [۵] مراجعه شود.

در ادامه برخی از فرمول‌های دوموضعی را که کلاس‌های خاصی از قاب‌ها را مشخص می‌کنند را معرفی می‌کنیم و سپس برخی از این فرمول‌ها که منطق‌های خاصی را معین می‌کنند را در نظر گرفته و قضیه‌ی تمامیت را برای آنها اثبات می‌کنیم.

تعریف ۹.۴ برای هر قاب همسایگی دوموضعی $F = \langle W, NB\rangle$، بعضی ویژگی‌های مرتبط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $X, Y, Z \in P(W)$:

۱. F تحت اشتراک دوموضعی بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ و $(X, Z) \in NB(w)$ آنگاه $(X, Y \cap Z) \in NB(w)$.

۲. F تحت ابر مجموعه دوموضعی بسته است اگر و تنها اگر برای هر $w \in W$، اگر $(X, Y) \in NB(w)$ و $Y \subseteq Z$ آنگاه $(X, Z) \in NB(w)$.

لم ۱۰.۴ فرمول $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$ کلاسی از قاب‌های $F = \langle W, NB\rangle$ را که تحت اشتراک دو موضعی بسته هستند را مشخص می‌کند.

اثبات. فرض کنید F تحت اشتراک بسته باشد و $M = \langle W, NB, V\rangle$ مدلی دلخواه روی این قاب باشد. بایستی ثابت کنیم برای هر $w \in W$، اگر $w \Vdash (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$، آنگاه $w \Vdash p \Rightarrow q \wedge r$. فرض کنید $w \in W$، $w \Vdash p \Rightarrow q$ و $w \Vdash p \Rightarrow r$ در این صورت،

$(V(p), V(q)) \in NB(w)$ (۱)

$(V(p), V(r)) \in NB(w)$ (۲)

طبق فرض قاب تحت اشتراک دوموضعی بسته است، لذا از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که، $(V(p), V(q) \cap V(r)) \in NB(w)$ است. بنابراین، $w \Vdash p \Rightarrow q \wedge r$.

برای اثبات جهت دیگر از تناقض استفاده می‌کنیم. فرض کنید کلاس تحت اشتراک دوموضعی بسته نباشد. آنگاه قاب F و $w \in F$ وجود دارد به طوری که $(X, Y) \in NB(w)$ و $(X, Z) \in NB(w)$، اما $(X, Y \cap Z) \notin NB(w)$.

تابع ارزش‌گذاری V روی قاب F را طوری در نظر می‌گیریم که $V(q) = Y, V(p) = X, V(r) = Z$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\big(V(p), V(q)\big) \in NB(w) \Rightarrow w \Vdash p \Rightarrow q,$$
$$\big(V(p), V(r)\big) \in NB(w) \Rightarrow w \Vdash p \Rightarrow r,$$
$$\big(V(p), V(q \wedge r)\big) \notin NB(w) \Rightarrow w \nVdash p \Rightarrow q \wedge r.$$

آنگاه طبق تعریف قاب‌های همسایگی $w \nVdash (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$ و درنتیجه، $F \nVdash (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$.

لم ۱۱.۴ قانون $\frac{A \Rightarrow B}{(C \Rightarrow A) \rightarrow (C \Rightarrow B)}$ کلاسی از قاب‌های $F = \langle W, NB \rangle$ را که تحت ابر مجموعه دو موضعی بسته هستند را مشخص می‌کند.

اثبات. فرض کنید برای هر مدل M روی قاب F که تحت ابر مجموعه دوموضعی بسته هستند، $M \Vdash A \Rightarrow B$. بایستی ثابت کنیم که برای هر مدل M روی F، $M \Vdash (C \Rightarrow A) \rightarrow (C \Rightarrow B)$. برای این منظور نشان خواهیم داد که برای هر مدل M روی F، و هر $w \in M$ اگر $w \Vdash C \Rightarrow A$ آنگاه $w \Vdash C \Rightarrow B$. اگر $w \Vdash C \Rightarrow A$ آن‌گاه $(V(C), V(A)) \in NB(w)$. طبق فرض $V(A) \subseteq V(B)$ و قاب تحت ابر مجموعه دوموضعی بسته است لذا $(V(C), V(B)) \in NB(w)$ و در نتیجه $w \Vdash C \Rightarrow B$. در نتیجه برای هر مدل M روی F، $M \Vdash (C \Rightarrow A) \rightarrow (C \Rightarrow B)$.

برای اثبات جهت دیگر از تناقض استفاده می‌کنیم. فرض کنید کلاس تحت ابر مجموعه دوموضعی بسته نباشد. یعنی قاب F و $w \in F$، موجود است به طوری که $(X, Y) \in NB(w)$، $Y \subseteq Z$ اما $(X, Z) \notin NB(w)$. از آنجاییکه $q \Rightarrow p \vee q$ اثبات پذیر است، کافی است

$(r \Rightarrow q) \to (r \Rightarrow p \vee q)$ روی قـاب درسـت نباشـد. تـابع ارزشـگذاری V را طـوری درنظر می‌گیریم که،

$V(p) = Y, V(q) = Z, V(r) = X$

در این صورت $V(p \vee q) = v(q) = Z$. بنابراین

$\big(V(r), V(p)\big) \in NB(w), (V(r), V(p \vee q)) \notin NB(w)$

درنتیجه $M, w \Vdash r \Rightarrow p$ و $M, w \nVdash r \Rightarrow p \vee q$. درنهایـت $M \nVdash (r \Rightarrow q) \to (r \Rightarrow p \vee q)$.

قاعده و اصولی را که در ادامه به مطالعه‌ی آنها خـواهیم پرداخـت را بـه صـورت زیـر نام‌گذاری می‌کنیم:

$(C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B) \to (C \Rightarrow A \wedge B) \qquad \overrightarrow{C}$

$(C \Rightarrow A \wedge B) \to (C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B) \qquad \overrightarrow{M}$

$\dfrac{A \Rightarrow B}{(C \Rightarrow A) \to (C \Rightarrow B)} \qquad \overrightarrow{R_M}$

لم ۱۲.۴. در منطق E^2_{Imp} اصل $\overrightarrow{M}$ با قاعده $\overrightarrow{R_M}$ برابر است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که قاعده $\overrightarrow{R_M}$ از منطق $E^2_{Imp}\overrightarrow{M}$ قابل استنتاج است:

۱. $A \to B$ فرض

۲. $A \leftrightarrow A \wedge B$ طبق ۱

۳. $C \leftrightarrow C$ راستگو

۴. $(C \Rightarrow A) \leftrightarrow (C \Rightarrow A \wedge B)$ طبق ۲، ۳ و قاعده E^2

۵. $(C \Rightarrow B \wedge B) \to (C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B)$ اصل $\overrightarrow{M}$

۶. $(C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B) \to (C \Rightarrow B)$ راستگو

۷. $(C \Rightarrow A \wedge B) \to (C \Rightarrow B)$ طبق ۵ و ۶

۸. $(C \Rightarrow A) \to (C \Rightarrow A)$ طبق ۴،۷

حال نشان می‌دهیم که اصل $\overrightarrow{M}$ از منطق $E^2_{Imp}\overrightarrow{R_M}$ قابل استنتاج است:

۱. $A \wedge B \to A$ راستگو

۲. $(C \Rightarrow A \wedge B) \to (C \Rightarrow A)$ طبق ۱ و $\overrightarrow{R_M}$

۳. $A \wedge B \to B$ راستگو

۴. $(C \Rightarrow A \wedge B) \to (C \Rightarrow B)$ طبق ۳ و قاعده $\overrightarrow{R_M}$

۵. $(C \Rightarrow A \wedge B) \to (C \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow B)$ طبق ۲ و ۴

لم۱۳.۴ (الف) اگر $E^2_{Imp}\vec{C} \subseteq L$، آنگاه مدل کانونی منطق L، تحت اشتراک دوموضعی بسته است.

(ب) اگر $E^2_{Imp}\vec{M} \subseteq L$، آنگاه مدل کانونی منطق L تحت ابر مجموعه دوموضعی بسته است.

اثبات. فقط به اثبات قسمت (الف) می‌پردازیم، اثبات قسمت (ب) مشابه همین اثبات است.

(الف) فرض کنید در مدل کانونی منطق L داشته باشیم $(X,Y) \in NB(\Gamma)$ و $(X,Z) \in NB(\Gamma)$. آنگاه طبق تعریف NB در مدل کانونی نتیجه می‌گیریم که فرمول‌های A، B و C وجود دارند به طوری که $(X,Y) = (\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$ و $(X,Z) = (\llbracket A \rrbracket, \llbracket C \rrbracket)$ که در آن $A \Rightarrow B \in \Gamma$ و $A \Rightarrow C \in \Gamma$. در نتیجه $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \in \Gamma$ و بنابراین با استفاده از $\vec{C}$ خواهیم داشت، $A \Rightarrow B \wedge C \in \Gamma$. دراین صورت $(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \wedge C \rrbracket) \in NB(\Gamma)$. حال از آن‌جایی‌که $\llbracket B \rrbracket \cap \llbracket C \rrbracket = \llbracket B \wedge C \rrbracket$، نتیجه می‌گیریم که $(X, Y \cap Z) \in NB(w)$. بنابراین NB تحت اشتراک دو موضعی بسته است.

توجه داشته باشیم که اگر $\Gamma \subseteq \{\vec{C}, \vec{M}, \overrightarrow{R_M}\}$ آنگاه $E^2_{Imp}\,\Gamma$ منطقی است که از اضافه‌کردن اصل یا قاعده T به منطق E^2_{Imp} به دست آمده است.

قضیه ۱۴.۴ اگر $\Gamma \subseteq \{\vec{C}, \vec{M}, \overrightarrow{R_M}\}$ آنگاه $E^2_{Imp}\Gamma$ نسبت به کلاسی از قاب‌های همسایگی دو موضعی با ویژگی‌های نسبت داده شده به اصول یا قاعده موجود در Γ درست و تمام است.

اثبات. اثبات طبق لم ۱۳.۴، بدیهی است.

۱.۴ همتای وجهی دو موضعی

در این بخش با استفاده از ترجمه $\Rightarrow$، که ترجمه‌ای از زبان منطق گزاره‌ای زیر شهودی به زبان منطق وجهی دوموضعی است، همتای وجهی برخی منطق‌های زیر شهودی معرفی‌شده در بخش ۳ را بدست خواهیم آورد.

تعریف ۱۵.۴ ترجمه‌ی $\Rightarrow$ از زبان منطق گزاره‌ای شهودی $(\mathcal{L})$ به زبان منطق وجهی دوموضعی $(\mathcal{L}^{\Rightarrow})$را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. $p^{\Rightarrow} := p$،

۲. $\bot^{\Rightarrow} := \bot$،

۳. $(A \wedge B)^{\Rightarrow} := A^{\Rightarrow} \wedge B^{\Rightarrow}$،

۴. $(A \vee B)^{\Rightarrow} := A^{\Rightarrow} \vee B^{\Rightarrow}$،

۵. $(A \to B)^{\Rightarrow} := A^{\Rightarrow} \Rightarrow B^{\Rightarrow}$،

از آن‌جایی که ساختار مدل‌های NB–همسایگی و مدل‌های وجهی همسایگی دوموضعی یک‌سان است، لذا در این بخش، جهت متمایز ساختن درستی این دو مدل، درستی در مدل‌های NB–همسایگی را با $\Vdash$ و درستی در مدل‌های وجهی همسایگی دوموضعی را با $\Vdash$ نمایش خواهیم داد.

لم ۱۶.۴ فرض کنید $\mathfrak{M} = \langle W, NB, V\rangle$ یک مدل NB–همسایگی باشد. آنگاه به ازای هر $w \in W$،

$\mathfrak{M}, w \Vdash A^{\Rightarrow}$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}, w \Vdash A$.

اثبات. اثبات با استقراء روی A انجام می‌شود. اثبات حالت‌های اتمی، عطفی و فصلی ساده می‌باشد. در مرحله‌ی استقراء، حالت شرطی $(C \to D)$ را بررسی می‌کنیم. بنابراین فرض کنید $A = C \to D$، در این صورت،

$\mathfrak{M}, w \Vdash C \to D \Leftrightarrow \left(C^{\mathfrak{M}}, D^{\mathfrak{M}}\right) \in NB(w)$

$\Leftrightarrow \left(\left(C^{\Rightarrow}\right)^{\mathfrak{M}}, \left(D^{\Rightarrow}\right)^{\mathfrak{M}}\right) \in NB(w)$ طبق فرض استقراء

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \vDash C^{\Rightarrow} \Rightarrow D^{\Rightarrow}$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \vDash (C \to D)^{\Rightarrow}$

قضیه ۱۷.۴ به ازای هر فرمول A،

(a) $\vdash_{WF} A$ اگر و تنها اگر $A^{\Rightarrow}$ $\vdash_{E^2_{Imp}}$.

(b) $\vdash_{WFC} A$ اگر و تنها اگر $A^{\Rightarrow}$ $\vdash_{E^2_{Imp}\vec{C}}$.

(c) $\vdash_{WF\hat{C}} A$ اگر و تنها اگر $A^{\Rightarrow}$ $\vdash_{E^2_{Imp}\vec{M}}$.

(d) $\vdash_{WF\hat{C}C} A$ اگر و تنها اگر $A^{\Rightarrow}$ $\vdash_{E^2_{Imp}\overrightarrow{MC}}$.

اثبات. اثبات همه موارد طبق لم ۱۶.۴، قضیه ۱۴.۴ و قضایای تمامیت برای منطق‌های زیر شهودی ذکر شده واضح است.

طبق قضیه بالا می‌توان نتیجه گرفت که همتای وجهی منطق‌های زیر شهودی WF، WFC، $WF\hat{C}$ و $WF\hat{C}C$ به ترتیب برابر با منطق‌های وجهی دوموضعی E^2_{Imp}، $E^2_{Imp}\vec{C}$ ، $E^2_{Imp}\vec{M}$ و $E^2_{Imp}\overrightarrow{MC}$ است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله برای هر یک از منطق‌های زیر شهودی بیان شده در مکعب زیر شهودی، با درنظرگرفتن دو نوع ترجمه، همتای وجهی متناظر آن را بدست آوردیم.

کتاب‌نامه

G. Corsi, Weak Logics with strict implication, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematic, 33:389-406, 1987.

B. Chellas, Modal logic: An Introduction, Cambridge University Press, 1980.

4. D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Subintuitionistic Logics and the Implications they Prove, Indagationes Mathematicae, 10.1016/j.indag.2018.01.013.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Two neighborhood Semantics for Subintuition istic Logics, In 12th International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, TbiLLC 2018, LNCS, pp 64-85, Volume 11456, Springer 2019.

D. de Jongh, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Binary Modal Companions for Subintuitionistic Logics, Mathematics, Logic and their Philosophies, pp 35-52, 2021.

K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionischen Aussagenkalküls. Ergebnisse Math. Colloq 4, 39–40, 1933.

H. H. Hansen, Monotonic Modal Logics, Master thesis, University of Amsterdam, 2003.

H. E. Jr. Kyberg, C. M. Teng, The Logic of Risky Knowledge, Proceeding of WOLLIC, Brazil, 2002.

Zh. Liu, Neighborhood Semantics of Modal Predicate Logic, Journal of Peking University, 1998.

M. Moniri, F. Shirmohammadzadeh Maleki, Neighborhood Semantics for Basic and Intuition istic Logic, Logic and Logical Philosophy, pp 339-355, Volume 24, 2015.

E. Pacuit, Neighborhood Semantics for Modal Logic, Springer 2017.

G. Restall, Subintuitionistic Logics, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 35, Number 1, Winter 1994.

W. Ruitenburg, Constructive Logic and the Paradoxes, Modern Logic 1, No. 4, 271-301,1991.

K. Sano, M. Ma, Alternative Semantics for Visser's Propositional Logics, In M. Aher, et al. (Eds.), 10th International Tbilisi Symposiumon Logic, Language and Computation, TbiLLC 2013. LNCS (Vol. 8984, pp. 257-275). Springer.

F. Shirmohammadzadeh Maleki, D. de Jongh, Weak Subintuitionistic Logics, Logic Journal of the IGPL, 25 (2), pp. 214-231, 2017.

D. Van Dalen, Logic and Structure, Fourth Edition, Springer, 2004.

A. Visser, A propositional logic with explicit fixed points, Studia Logica, vol. 40, pp. 155-75, 1981.