Industrial Management Journal
Print ISSN: 2008-5885
Online ISSN: 2423-5369

Developing Stochastic Additive Utility Method (UTA) Considering the Possible Dependency among Criteria

Mahnaz Hosseinzadeh
Assistant Prof, Department of Industrial Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: mhosseinzadeh@ut.ac.it

Mohammad Reza Mehregan
*Corresponding author, Prof, Department of Industrial Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: mehregan@ut.ac.it

Leili Aghaei Meibodi
PhD Candidate, Department of Industrial Management, Alborz Campus, University of Tehran, Karaj, Iran. E-mail: aghaei.leili@yahoo.com

Ezatollah Abbasian
Associate Prof., Department of Public Management, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: e.abbasian@ut.ac.ir

Abstract

Objective: One of the well-known methods as to Multi Attribute Utility Theory (MAUT) in the field of decision making is Utility Additive Method (UTA), which has been developed over time. Two main deficiencies of such methods are first, ignoring the uncertainty embedded in the values of different criteria and second, disregarding the possibility of dependencies among various criteria. The uncertainty problem, either fuzzy or stochastic, has been discussed in various developments including, fuzzy UTA and stochastic UTA models, respectively. Although it seems unlikely to apply in real world problems, the criteria independency is the primary assumption of all these models. Thus, this paper is aimed at developing stochastic UTA model so as to consider the possibility of dependency among different criteria.

Methods: In this paper, conditional probability is applied in developing the UTA model, so that the probability of values of each criterion is considered with respect to probable values of other criteria.

Results: The developed model is presented in 12 steps, and its applicability in practice is shown using a real example based upon the data extracted from three main criteria of stock investments for three petrochemical companies.

Conclusion: The proposed model addresses the deficiency of ignoring the probable dependencies among criteria in stochastic UTA model, and covers the research gap posed by previous researchers.

Keywords: Multi Attribute Utility Theory (MAUT), Utility Additive method (UTA), Stochastic UTA model, Uncertainty, Dependency of Criteria.

Citation: Hosseinzadeh, M., Mehregan, M.R., Aghaei Meibodi, L., Abbasian, E. (2018). Developing Stochastic Additive Utility Method (UTA) Considering the Possible Dependency among Criteria. *Industrial Management Journal*, 10(4), 503-524. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2018, Vol. 10, No.4, pp. 503-524
DOI: 10.22059/imj.2019.269380.1007519
Received: June 09, 2018; Accepted: October 17, 2018
© Faculty of Management, University of Tehran

فصلنامه مدیریت صنعتی
شاپا چاپی: ۲۰۰۸-۵۸۸۵
شاپا الکترونیکی: ۲۴۲۳-۵۳۶۹

توسعه مدل مطلوبیت جمع‌پذیر (UTA) تصادفی با توجه به امکان وابستگی میان معیارها

مهناز حسین زاده
استادیار، گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: mhosseinzadeh@ut.ac.ir

محمدرضا مهرگان
* نویسنده مسئول، استاد، گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: mehregan@ut.ac.ir

لیلی آقائی میبدی
دانشجوی دکتری، گروه مدیریت تحقیق در عملیات، پردیس البرز، کرج، ایران. رایانامه: aghaei.leili@yahoo.com

عزت‌اله عباسیان
دانشیار، گروه مدیریت دولتی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: e.abbasian@ut.ac.ir

چکیده

هدف: یکی از روش‌های مطرح در حوزه تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر تئوری مطلوبیت، مدل مطلوبیت جمع‌پذیر (UTA) است که طی زمان با رفع نواقص بسیار توسعه یافته است. از مهم‌ترین مشکلات این روش‌ها عدم توجه به عدم اطمینان مقادیر معیارها و عدم توجه به امکان وجود وابستگی میان معیارهای مختلف است. درباره مشکل عدم اطمینان از انواع مختلف فازی و احتمالی، به‌ترتیب در توسعه‌های مختلف شامل مدل‌های فازی و تصادفی بحث و تبادل نظر شده است. با این حال از مفروضات اصلی تمامی این مدل‌ها استقلال معیارها از یکدیگر است، در حالی که در مسائل دنیای واقعی این امر تا حدی بعید به نظر می‌رسد. از این رو، هدف از این پژوهش توسعه مدل مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی به‌نحوی است که مشکل عدم توجه به وابستگی میان مقادیر گزینه‌ها در شاخص‌های مختلف را مد نظر قرار دهد.

روش: در این پژوهش از مفهوم احتمال شرطی برای توسعه مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی بهره گرفته شده است، به‌طوری که احتمال ارزش هر مقدار در هر شاخص با توجه به ارزش‌های محتمل در سایر شاخص‌ها مد نظر قرار می‌گیرد.

یافته‌ها: مدل توسعه‌یافته در قالب دوازده گام ارائه شده و قابلیت کاربرد آن با استفاده از یک مثال واقعی و بر اساس داده‌های مربوط به سه معیار اصلی در سرمایه‌گذاری سهام برای سه شرکت در حوزه پتروشیمی نشان داده شده است.

نتیجه‌گیری: مدل پیشنهادی حاصل مشکل عدم توجه به وابستگی محتمل میان شاخص‌ها در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی را برطرف می‌کند و شکاف تحقیقاتی مطرح‌شده توسط محققان پیشین را پوشش می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: تصمیم‌گیری چندمعیاره مبتنی بر تئوری مطلوبیت (MAUT)، مدل مطلوبیت جمع‌پذیر (UTA)، مدل مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی، عدم اطمینان و وابستگی بین معیارها.

استناد: مهرگان، محمدرضا؛ آقائی میبدی، لیلی؛ حسین‌زاده، مهناز؛ عباسیان، عزت‌اله (۱۳۹۷). توسعه مدل مطلوبیت جمع‌پذیر (UTA) تصادفی با توجه به امکان وابستگی میان معیارها. *فصلنامه مدیریت صنعتی*، ۱۰(۴)، ۵۰۳- ۵۲۴.

فصلنامه مدیریت صنعتی، ۱۳۹۷، دوره ۱۰، شماره ۴، صص. ۵۰۳- ۵۲۴
DOI: 10.22059/imj.2019.269380.1007519
دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۹، پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۵
© دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

مقدمه

فضای گفتمان صنعتی در قرن بیست‌ویکم مملو از واژه‌هایی همچون رقابت، تغییر، پیچیدگی و ابهام بوده است. در فضایی چنین ملتهب، نگاه سازمان‌ها و ذی‌نفعان آنها به مدیرانی است که می‌توانند با اخذ تصمیم‌های درست و به‌موقع، حفظ، بقا و حتی پیشرفت سازمان را به ارمغان آورند (سرورخواه، آذر، بابایی کفاکی و شفیعی نیک‌آبادی، ۱۳۹۶). تصمیم‌گیرندگان در انتخاب یک گزینه از میان گزینه‌های متعدد اغلب به‌طور همزمان چندین معیار را مد نظر قرار می‌دهند. معیارها گاه همراستا و گاهی متقابل و متضاد هستند (مهرگان، ۱۳۹۲). هدف تئوری تصمیم‌گیری کمک به تصمیم‌گیرندگان در راستای اتخاذ تصمیم مناسب در زمانی است که در مسائل پیچیده انتخاب‌های متعددی پیش روی آنها قرار دارد. نخستین تلاش برای حل مسائل تصمیم‌گیری و انتخاب با توجه به معیارهای چندگانه به رایفا و ادوارد باز می‌گردد که در واقع به تولد تئوری تصمیم منجر شد. مجموعه روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره[1] امروزه در انتخاب بهترین راه‌کارها در دو دسته مسائل ارزیابی و طراحی، جایگاه ویژه‌ای دارند (شانموگاناتان، کاجندران، سایسیکومار و ماهندران[2]، ۲۰۱۸). در مجموعه روش‌های تصمیم‌گیری در مسائل دسته ارزیابی که با عنوان روش‌های تصمیم‌گیری با چندین معیار[3] شناخته می‌شوند، ارزش گزینه‌ها به‌صورت کمی یا کیفی و عینی یا ذهنی توسط هر تصمیم‌گیرنده مشخص شده، سپس با روش‌های مختلف به محاسبه ارزش کلی هر گزینه پرداخته می‌شود. روش‌های متعددی از مجموعه روش‌های تصمیم‌گیری با چندین معیار از مفهوم مطلوبیت برای دستیابی به ارزش گزینه‌ها مبتنی بر ترجیحات تصمیم‌گیرندگان بهره می‌گیرند. در این مجموعه از روش‌ها که روش‌های مبتنی بر تئوری مطلوبیت چندمعیاره[4] خوانده می‌شوند، ایده اصلی بر این قرار دارد که صرف نظر از ارزش عینی هر گزینه در هر معیار، مطلوبیت یا رضایت خاطری که هر فرد از آن ارزش کسب می‌کند متفاوت است و به‌ویژه این تفاوت به میزان مخاطره‌پذیری افراد بسیار وابسته است. به‌عبارتی ارزش هر گزینه به ذهنیت و همچنین ریسک‌پذیری تصمیم‌گیرنده وابسته خواهد شد. بدین منظور، این دسته از روش‌ها به برآورد توابع مطلوبیت افراد مختلف می‌پردازند و ارزش نهایی هر گزینه را با توجه به مطلوبیت جمعی حاصل از مطلوبیت فرد در معیارهای مختلف محاسبه می‌کنند. توابع مطلوبیت ارزش خام عملکردی هر گزینه در هر معیار را چه کمی یا کیفی و چه عینی یا ذهنی به مقادیری با یک مقیاس مشترک و بدون بعد بین صفر تا یک تبدیل می‌کنند (پاتینیوتاکیس، آپوستولو و اسلووینسکی[5]، ۲۰۱۱). ایده کلی در روش‌های مبتنی بر تئوری مطلوبیت چندمعیاره چنین است که چنانچه بتوان تابع مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده را در یک زمینه ساده تصمیم برآورد کرد، می‌توان بر اساس آن امتیاز یا مطلوبیت گزینه‌ها در یک زمینه، تصمیم گسترده‌تری نیز به دست آورد. تا کنون روش‌های مختلفی برای تعیین توابع مطلوبیت از جمله ساخت یک مجموعه از توابع ارزشی جمع‌پذیر (فیگویرا، گرکو و اسلوینسکی[6]، ۲۰۰۹)، تخمین مطلوبیت غیرجمع‌پذیر (آنجیلا، گرکو، لامانتا و ماتارازو[7]، ۲۰۰۳) و استخراج توابع مطلوبیت با استفاده از بهینه‌یابی غیرخطی با بهترین برازش (ابرهارد، شرایدر و استاجکو[8]، ۲۰۰۷) توسعه یافته‌اند. تعیین توابع مطلوبیت معمولاً به تعامل با تصمیم‌گیرنده در راستای تعیین وزن هر یک از معیارها و شکل کلی توابع نهایی مطلوبیت برای هر یک از معیارها نیاز دارد. این مسئله به‌علت زمان‌بر بودن و وجود

1. Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
2. Shanmuganathan, Kajendran, Sasikumar & Mahendran
3. Multiple Attribute Decision Making (MADM)
4. Multiple Attribute Utility Theory (MAUT)
5. Patiniotakis, Apostolou & Mentzas
6. Figueira, Greco & Słowinski
7. Angilella, Greco, Lamantia & Matarazzo
8. Eberhard, Schreider & Stojkov

مسائلی همچون عدم تمایل و همکاری تصمیم‌گیرنده گاه بسیار مشکل‌ساز است. برای حل این مشکل رویکردهای تفکیک ترجیحات[1] تصمیم‌گیرنده توسعه یافته‌اند. این رویکردها برخلاف تئوری مطلوبیت چندمعیاره که نخست به‌طور مستقیم به تعریف توابع مطلوبیت از طریق توابع مطلوبیت نهایی اقدام می‌کند، به‌طور غیرمستقیم و از طریق تکنیک‌هایی بر پایه رگرسیون به تخمین توابع مطلوبیت اقدام می‌کند (نگوین[2]، ۲۰۱۳). به‌طور کلی توابع مطلوبیت نهایی در این روش به‌وسیله تفکیک ترجیحات کلی تصمیم‌گیرنده صورت می‌گیرد. بدین منظور از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود یک نمونه رتبه‌بندی یا دسته‌بندی مطابق با ترجیحات خود ارائه دهد، سپس از طریق تکنیک‌هایی بر پایه رگرسیون، مدل و تابع مطلوبیت به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که رتبه‌بندی و دسته‌بندی حاصل از مدل تا حد امکان با رتبه‌بندی و دسته‌بندی ارائه‌شده توسط تصمیم‌گیرنده تطابق داشته باشد (فیگویرا، سالوادور و ماتیاس[3]، ۲۰۰۵). تکنیک مطلوبیت جمع‌پذیر[4] از جمله تکنیک‌هایی است که بر پایه این رویکرد بنا شده است. این تکنیک نخستین بار توسط لاگرز و سیسکوس[5] (۱۹۸۲) مطرح شد. ورودی این مدل یک مجموعه مرجع از گزینه‌ها است که تصمیم‌گیرنده آنها را مطابق با ترجیحات خود اولویت‌بندی کرده است. اگر مطلوبیت حاصل از مدل مطلوبیت جمع‌پذیر عناصر مجموعه مرجع را تا حد امکان مطابق با رتبه‌بندی اولیه تصمیم‌گیرنده رتبه‌بندی کند، سازگاری مدل با سیستم ترجیحات تصمیم‌گیرنده تأیید می‌شود، بنابراین این مدل مبنای تصمیم‌گیری‌های بعدی قرار می‌گیرد. بعدها با رفع معایب مدل مطلوبیت جمع‌پذیر مدلی تحت عنوان یوتا استار[6] (سیسکوس و یاناکوپولوس[7]، ۱۹۸۵) توسعه یافت. در ادامه، انواع مختلفی از تکنیک‌های مطلوبیت جمع‌پذیر که دارای اشکال متفاوتی از ترجیحات در گروه مرجع هستند یا از شکل‌های مختلف شاخص‌های بهینگی، در فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌کنند، آورده شده که می‌توان به بسط‌های ایجادشده توسط سیسکوس و جاکوت[8] (۱۹۸۲)، دسپوزیت و زاپوندیس[9] (۱۹۹۳) و بیوت و اسکانلا[10] (۲۰۰۱) اشاره کرد. تمامی این مدل‌ها مقادیر ارزش هر گزینه در هر معیار را قطعی و غیروابسته به ارزش سایر معیارها در همین گزینه در نظر می‌گیرند. مدل‌سازی مسائل تصمیم‌گیری با فرض بی‌اثر بودن معیارها نسبت به یکدیگر، ساده‌ترین مدلی است که می‌توان برای یک مسئله تصمیم‌گیری چندمعیاره در نظر گرفت، اما با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری ممکن است معیارها بر یکدیگر تأثیر داشته باشند، وجود روش‌هایی که توانایی اعمال اثرهای متقابل معیارها در مسائل تصمیم‌گیری را داشته باشند، لازم است (امینی و راستی برزکی، ۱۳۹۵).

برای رفع مشکل عدم قطعیت در ارزش هر گزینه در هر معیار، بسته به نوع عدم اطمینان مدل‌های مطلوبیت جمع‌پذیر فازی[11] (پاتینیوتاکیس و همکاران، ۲۰۱۱) و مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی[12] (سیسکوس[13]، ۱۹۸۳ و سیسکوس، گریگرودیس و ماتساتسینیس[14]، ۲۰۱۶) توسعه یافته‌اند. در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی (با توجه به عدم اطمینان از نوع احتمالی مورد تمرکز در این پژوهش) ارزش هر یک از گزینه‌ها در هر معیار به‌جای یک مقدار قطعی و مشخص،

1. Disaggregation- approach
2. Nguyen
3. Figueira, Salvatore & Matthias
4. Utility Additive Method
5. Jacquet-Lagreze & Siskos
6. UTASTAR
7. Siskos & Yannacopoulos
8. Siskos & Jacquet
9. Despotis & Zopounidis
10. Beuthe & Scannella
11. Fuzzy Utility Additive Method
12. Stochastic Utility Additive Method
13. Siskos
14. Siskos, Grigoroudis & Matsatsinis

مقداری متغیر با یک توزیع احتمال مبتنی بر تجربیات گذشته در نظر گرفته می‌شود. در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی نیز مقادیر مختلف تصادفی ارزش هر گزینه در هر معیار، مستقل از مقادیر سایر معیارها در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با وجود اینکه این مدل مشکل عدم اطمینان در شرایط تصمیم‌گیری را حل می‌کند، در مسائلی که دارای معیارهای زیاد و گاهی اوقات با ارتباطات متقابل باشند با کاستی مواجه است. از این رو، برای رفع مشکل دوم در این پژوهش تلاش می‌شود مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی با استفاده از مفهوم احتمال شرطی برای شرایطی که مطلوبیت ارزش یک معیار به ارزش معیار یا معیارهای دیگر وابسته است توسعه یابد تا هم مشکل عدم قطعیت ارزش معیارها حل شود و هم مشکل وابستگی معیارها به‌صورت هم‌زمان در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر برطرف شود.

ساختار مقاله در بخش‌های بعد به‌صورت زیر است. در بخش دوم به‌طور خلاصه به مفهوم مطلوبیت و تئوری مطلوبیت چندمعیاره پرداخته می‌شود. در بخش سوم مدل مطلوبیت جمع‌پذیر شرح داده می‌شود. در بخش چهارم مدل یوتا استار مطرح می‌شود. مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی در بخش پنجم ارائه می‌شود. در بخش ششم مدل پیشنهادی مطرح شده و در بخش هفتم مثالی عددی مبتنی بر اطلاعات واقعی حاصل از داده‌های مربوط به سه معیار اصلی در سرمایه‌گذاری سهام برای سه شرکت در حوزه پتروشیمی با استفاده از مدل پیشنهادی حل می‌شود تا قابلیت کاربرد آن در عمل نشان داده شود. نتیجه‌گیری و پیشنهادهای حاصل از پژوهش در بخش آخر یعنی بخش هشتم ارائه می‌شوند.

پیشینه پژوهش

مطلوبیت و تئوری مطلوبیت چندمعیاره

رضایت خاطری که از مصرف کالاها و خدمات نصیب مصرف‌کننده می‌شود، مطلوبیت[1] نامیده می‌شود. کاربرد مطلوبیت در قالب ابزاری برای سنجش ارزش نتیجه حاصل از تصمیم، توسط نیومن و مورگن اشترن به‌کار گرفته شد. طبق باور آنها ترجیحات افراد برای انتخاب‌های مختلف با در نظر گرفتن شرایط ریسک و مخاطره‌پذیری آنان، قابل اندازه‌گیری است. آنها ترجیحات را مطلوبیت نامیدند و برای آن یک واحد اندازه‌گیری قراردادی به‌نام یوتیل[2] تعریف کردند. اعتقاد بر آن بود که با پرسش‌های مناسب امکان اندازه‌گیری مطلوبیت اشخاص برای ارزش‌های مختلف وجود دارد که تابع مطلوبیت با ترجیح نامیده می‌شود. بر اساس فرض نیومن و مورگن اشترن، هر تصمیم مستلزم میزان معینی ریسک است و تصمیم‌گیرنده از میان گزینه‌های مختلف تصمیم، تصمیمی را انتخاب می‌کند که مطلوبیت مورد انتظارش را به حداکثر برساند (مهرگان، ۱۳۹۲). با استفاده از این روش، برای اتخاذ تصمیم بهینه لازم است تابع مطلوبیت برای تمام پیامدهای مسئله تصمیم‌گیری محاسبه شده، سپس گزینه‌ای که بیشترین مطلوبیت مورد انتظار را دارد برای تصمیم‌گیری انتخاب شود.

در تئوری مطلوبیت چندمعیاره فرد تصمیم‌گیرنده ترجیح خود را با توجه به معیارهای چندگانه با یک تابع عددی فرمول‌بندی می‌کند که به این تابع، تابع مطلوبیت چندمعیاره[3] گفته می‌شود و با استفاده از این تابع چارچوبی را فراهم می‌آورد که به ارزیابی و اولویت‌بندی گزینه‌ها پرداخته می‌شود (اسچولز، فرنز و اینز[4]، ۲۰۱۷). تعیین توابع مطلوبیت معمولاً

1. Utility
2. Util
3. MAUF
4. Scholza, Franz & Hinz

به تعامل بسیار با تصمیم‌گیرنده در راستای تعیین وزن هر یک از معیارها و شکل کلی توابع نهایی مطلوبیت برای هر یک از معیارها نیاز دارد، بدین صورت که به‌ازای مقادیر مختلف در هر معیار مطلوبیت تصمیم‌گیرنده از وی پرسش شده و تابع جزئی وی در هر معیار و تابع مطلوبیت کلی او در تمامی معیارها برآورد می‌شود. در نهایت از تابع مطلوبیت وی برای تعیین ارزش نهایی هر گزینه استفاده می‌شود. نیاز به تعامل بسیار با تصمیم‌گیرنده برای برآورد توابع مطلوبیت وی، به‌علت زمان‌بر بودن و وجود مسائلی همچون عدم تمایل و همکاری تصمیم‌گیرنده، استفاده از روش مطلوبیت چندمعیاره را کمی دشوار می‌کند (پاچاوری، کومار و دهر[1]، ۲۰۱۴).

مدل مطلوبیت جمع‌پذیر

این تکنیک نخستین بار در سال ۱۹۸۲ توسط لاگرز و سیسکوس مطرح شد. مسئله اصلی در تصمیم‌گیری چندمعیاره، این است که تصمیم نهایی باید با چه روشی اتخاذ شود. اما در فلسفه تفکیک ترجیحات در تحلیل چندمعیاری این مسئله به صورت برعکس مطرح می‌شود، بدین صورت که فرض می‌شود تصمیم مد نظر اتخاذ شده، حال چطور می‌توان مبنای منطقی این تصمیم را به دست آورد؟ به‌عبارتی، چطور می‌توان مدل ترجیح تصمیم‌گیرندگان را تعیین کرد که تصمیم‌های حاصل از آن دقیقاً مانند تصمیم‌های واقعی آنها باشد یا حداقل با تصمیم‌های واقعی آنها بیشترین مشابهت را داشته باشد. بنابراین در رویکردهای تفکیک ترجیحات و به‌طور خاص مدل مطلوبیت جمع‌پذیر، هدف تعیین مدل‌های ترجیح از ساختارهای ترجیحی و پشتیبانی تصمیم‌گیری از طریق مدل‌های عملیاتی در چارچوب نام‌برده است (فیگویرا و همکاران، ۲۰۰۵). ورودی مدل مطلوبیت جمع‌پذیر مجموعه مرجعی از گزینه‌ها است، به‌طوری که تصمیم‌گیرنده آنها را مطابق با ترجیحات خود رتبه‌بندی کرده است. در صورتی که تابع مطلوبیت حاصل از مدل مطلوبیت جمع‌پذیر عناصر مجموعه مرجع را تا حد امکان مطابق با رتبه‌بندی اولیه تصمیم‌گیرنده رتبه‌بندی کند، سازگاری مدل با سیستم ترجیحات تصمیم‌گیرنده تأیید می‌شود. بنابراین می‌توان از این مدل در زمینه گسترده‌تر تصمیم مربوط به تصمیم‌گیرنده مد نظر استفاده کرد (فیگویرا و همکاران، ۲۰۰۵). از معایب این روش می‌توان به محاسبات پیچیده آن اشاره کرد که با استفاده از نرم‌افزارهایی که بدین منظور طراحی شده‌اند (مانند نرم‌افزار لینگو[2]) حل مدل بسیار ساده می‌شود. همچنین ممکن است به چندین جواب بهینه برسد که این مشکل نیز با ایجاد اخلال‌هایی برطرف می شود (سلاطی و ماکویی، ۱۳۹۳).

در ادامه مفاهیم، مفروضات، تعاریف و ملاحظات اصلی در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر مبتنی بر پیشنه ارائه می‌شوند (برگرفته از پاتینیوتاکیس، ۲۰۱۱ و فیگویرا و همکاران، ۲۰۰۵).

- مجموعه معیارهای تصمیم به‌صورت $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ تعریف می‌شوند، به‌طوری که n تعداد معیارها را نشان می‌دهد.
- مجموعه مرجع شامل مجموعه‌ای از گزینه‌های تصمیم است که برای رتبه‌بندی اولیه مرجع توسط تصمیم‌گیرنده پیش از مدل‌سازی از میان مجموعه گزینه‌ها انتخاب می‌شوند و با A_R نشان داده می‌شوند، به‌طوری که $a \in A_R$ یک گزینه از مجموعه A_R است.
- مجموعه مقادیر ممکن برای گزینه‌های مختلف در معیار iام در بازه حقیقی $[g_{i^*}, g_i^*]$ قابل تعریف است، به‌طوری

1. Pachauri, Kumar & Dhar 2. Lingo

که g_{i^*} و g_i^* به‌ترتیب بدترین و بهترین سطح معیار iام را نشان می‌دهند. این بازه یک بازه حقیقی نانزولی است، به‌طوری که مطابق با رابطه ۱ داریم:

رابطه ۱) $$g_i: A \to [g_{i^*}, g_i^*] \subset R \;/\; a \to g(a) \in R$$

- ارزش یا عملکرد گزینه a در معیار iام با $g_i(a)$ نشان داده می‌شود و $g(a)$ به‌طور کلی بردار عملکرد گزینه a در n معیار را نمایش می‌دهد.
- با فرض اینکه با افزایش امتیاز عملکرد یک گزینه ارزش یا ترجیح آن افزایش می‌یابد، آن‌گاه می‌توان روابط ترجیحی ۲ را تعریف کرد.

رابطه ۲) $$\begin{cases} g_i(a) > g_i(b) \Leftrightarrow a \succ b \\ g_i(a) = g_i(b) \Leftrightarrow a \sim b \end{cases}$$

- تابع مطلوبیت معیار iام که در پیشنه به‌عنوان تابع مطلوبیت نهایی[1] شناخته می‌شود با u_i و تابع مطلوبیت کلی۲ با u تعریف می‌شود. هر دو نوع تابع مطلوبیت نهایی و کلی، توابعی مثبت، نانزولی، یک به یک و متعلق به مجموعه اعداد حقیقی هستند. تابع مطلوبیت کلی در دامنه $[۰,۱]$ قرار دارد، در حالی که تابع مطلوبیت نهایی به‌عنوان کسری از آن تعریف می‌شود. به‌طور کلی توابع مطلوبیت به‌صورت رابطه ۳ تعریف می‌شوند.

رابطه ۳) $$u_i: [g_{i^*}, g_i^*] \to [0,1]$$

- مطلوبیت گزینه a در معیار iام با $u_i[g_i(a)]$ تعریف شده و مطلوبیت کلی گزینه a با $u[g(a)]$ ارائه می‌شود. از آنجا که توابع مطلوبیت به‌عنوان توابعی نانزولی تعریف می‌شوند، بنابراین شرایط رابطه ۴ برقرار است:

رابطه ۴) $$\begin{cases} u[g(a)] > u[g(b)] \Leftrightarrow a \succ b \\ u[g(a)] = u[g(b)] \Leftrightarrow a \sim b \end{cases}$$

- فرض می‌شود تابع مطلوبیت کلی تابعی جمع‌پذیر به‌صورت رابطه ۵ است.

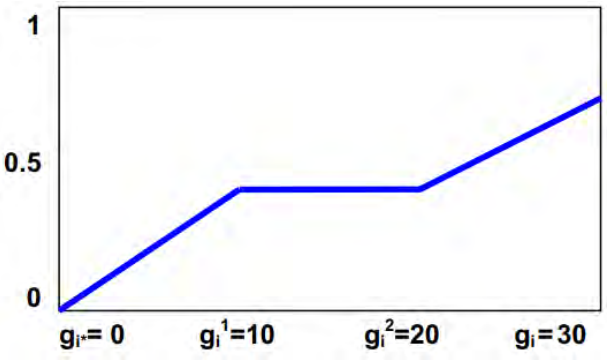
رابطه ۵) $$u[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)]$$

- که این تابع با محدودیت‌های زیر مقید می‌شود.

رابطه ۶) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i^*] = 1 \\ u_i[g_{i^*}] = 0, \;\; \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

- هر تابع مطلوبیت نهایی به‌عنوان یک تابع منکسر خطی پیوسته در نظر گرفته می‌شود، بدین معنا که از یک سری بخش‌های با ضوابط خطی تشکیل شده که به هم پیوسته‌اند (مانند شکل ۱).

1. Marginal utility function
2. Global utility function



شکل ۱. تابع مطلوبیت نهایی

- به‌علاوه فرض می‌شود بازه $[g_{i^*}, g_i^*]$ برای معیار iام به $(\alpha_i - 1)$ فاصله مساوی تقسیم می‌شود، به‌طوری که نقطه پایانی هر بازه برای معیار iام و زیربازه jام یعنی g_i^j به‌صورت رابطه ۷ تعریف می‌شود.

$$g_i^j = g_i + \frac{j-1}{\alpha_i - 1}(g_i^* - g_{i^*}) \quad \forall j = 1, \dots, \alpha_i$$ رابطه ۷)

- ارزش نهایی گزینه a توسط یک میانه‌یابی خطی به‌صورت رابطه ۸ برآورد می‌شود.

$$u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j}[u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)]$$ رابطه ۸)

- این روش از برنامه‌ریزی خطی به‌منظور رسیدن به توابع مطلوبیت استفاده می‌کند، به‌طوری که رتبه‌بندی‌های حاصل از این توابع تا حد ممکن مطابق با رتبه‌بندی اولیه انجام‌شده روی مجموعه مرجع A_R باشند. از آنجا که ممکن است در مجموعه جوابی که با آن مطلوبیت نهایی حاصل از رتبه‌بندی مدل دقیقاً مطابق با ترجیحات اولیه تصمیم‌گیرنده باشد، وجود نداشته باشد، مقداری خطا در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که تابع مطلوبیت تعریف‌شده در رابطه ۵ به‌صورت رابطه ۹ تغییر می‌کند.

$$\acute{u}[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] + \sigma(a) \quad \forall a \in A_R$$ رابطه ۹)

به‌طوری که $\sigma(a)$ خطای بالقوه مربوط به $u[g(a)]$ است.

- در ادامه گزینه‌های مجموعه مرجع A_R به‌گونه‌ای مرتب می‌شوند که در آن a_1 در بالای رتبه‌بندی (بهترین گزینه) و a_n در انتهای رتبه‌بندی (بدترین گزینه) قرار داشته باشند. در این شرایط برای هر جفت گزینه متوالی (a_k, a_{k+1}) که ممکن است a_k بر a_{k+1} برتری داشته باشد $(a_k \succ a_{k+1})$ یا دو گزینه نسبت به هم بی‌تفاوت باشند $(a_k \sim a_{k+1})$ بر اساس رابطه ۱۰ داریم:

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u[g(a)] - u[g(a_{k+1})]$$ رابطه ۱۰)

به‌طوری که یکی از روابط زیر برقرار است:

رابطه ۱۱)
$$\begin{cases}\Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta & if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = \delta & if \;\; a_k \sim a_{k+1}\end{cases}$$

δ یک عدد مثبت بسیار کوچک است که تفاوت معنادار میان دو گزینه متوالی را به‌خوبی نشان می‌دهد.

- با توجه به فرض یک‌به‌یک بودن ترجیحات، ارزش نهایی $u_i(g_i)$ باید مجموعه محدودیت‌های رابطه ۱۲ را ارضا کند.

رابطه ۱۲)
$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq \delta_i \quad \forall j = 1,2,\dots,\alpha_i - 1, \;\; i = 1,\dots,n$$

- در نهایت تابع ارزش نهایی با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی ۱۳ محاسبه می‌شود.

رابطه ۱۳)
$$[min]F = \sum_{a \in A_R} \sigma(a)$$

$$subject\ to$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta \;\; if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 \;\; if \;\; a_k \sim a_{k+1}\end{matrix}\right\} \quad \forall k$$

$$u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall i \text{ و } j \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i^*] = 1$$

$$u_i[g_{i^*}] = 0, u_i(g_i^j) \geq 0, \sigma(a) \geq 0 \quad \forall a \in A_R, \forall i \text{ و } j$$

- اگر $F^* = 0$ باشد یعنی مجموعه جوابی برای مقادیر مطلوبیت نهایی یافت شد که به‌ازای آن رتبه‌بندی حاصل از مدل با رتبه‌بندی اولیه مجموعه مرجع کاملاً مطابق است و اگر چنین نشد بدین معناست که مجموعه مقادیری که دقیقاً رتبه‌بندی اولیه مجموعه مرجع را مطابق با نظر تصمیم‌گیرنده برای ما ایجاد کند وجود ندارد، بنابراین رتبه‌بندی حاصل از مدل با مقداری خطا نسبت به دیدگاه تصمیم‌گیرنده ایجاد شده است. اشکال مهم این است که مدل مطلوبیت جمع‌پذیر فقط خطاهای مثبت را در نظر می‌گیرد، در حالی که چون این خطا به‌صورت قدرمطلق تعریف نشده ممکن است مقداری منفی داشته باشد.

مدل یوتا استار

مدل یوتا استار نسخه بهبودیافته‌ای از مدل مطلوبیت جمع‌پذیر است که توسط سیسکوس و یاناکوپلس (۱۹۸۵) ارائه شده است. همان‌طور که گفته شد در نسخه اصلی مطلوبیت جمع‌پذیر برای هر گزینه $a \in A_R$ یک خطای $\sigma(a)$ برای بیان تفاوت میان مطلوبیت نهایی حاصل از مدل و مطلوبیت نهایی مربوط به تصمیم اولیه واقعی تصمیم‌گیرندگان تعریف می‌شود که همواره مقداری مثبت دارد و این خطا باید حداقل شود. به‌عبارتی این خطا فقط انحراف منفی مدل با واقعیت را نشان می‌دهد، در حالی که انحراف مثبت را نادیده می‌گیرد. بدین منظور این کاستی در مدل یوتا استار با تعریف دو خطا یا انحراف مثبت و منفی اصلاح شده است، به‌طوری که مقدار مطلوبیت نهایی گزینه a با استفاده از رابطه ۱۴ تعریف می‌شود (فیگویرا و همکاران، ۲۰۰۵).

$$\acute{u}[g(a)] = \sum_{i=1}^{n} u_i[g_i(a)] + \sigma^-(a) - \sigma^+(a) \quad \forall a \in A_R$$ رابطه ۱۴)

$\sigma^+(a)$ و $\sigma^-(a)$ به‌ترتیب خطاهای مثبت و منفی را نشان می‌دهند.

به‌علاوه در مدل یوتا استار تعدیل مهم دیگری با توجه به محدودیت یک به یک بودن معیارها با استفاده از تغییر متغیر رابطه ۱۵ انجام می‌شود.

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \; \forall i = 1, \dots, n \; , j = 1, \dots, \alpha_i - 1$$ رابطه ۱۵)

با استفاده از تغییر متغیر بالا، می‌توان گام‌های روش یوتا استار را در قالب گام‌های زیر فرموله کرد.

۱. تعیین مطلویت کلی گزینه‌های مجموعه مرجع $u[g(a_k)]$ برای $k = 1, \dots, m$ نخست بر اساس مطلوبیت نهایی $u_i(g_i)$ و سپس بر اساس تغییر متغیر انجام‌شده در رابطه ۱۵ و با استفاده از عبارات رابطه ۱۶.

$$\begin{cases} u_i(g_i^1) = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, n \\ u_i(g_i^j) = \sum_{t=1}^{j-1} w_{it} \;\; \forall i = 1, \dots, n \; , j = 1, \dots, \alpha_i - 1 \end{cases}$$ رابطه ۱۶)

۲. تعیین مقادیر خطای $\sigma^+(a)$ و $\sigma^-(a)$ روی مجموعه مرجع A_R با نوشتن رابطه ۱۷ برای هر جفت گزینه متوالی در رتبه‌بندی.

$$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u[g(a_k)] - \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k) - u[g(a_{k+1})] + \sigma^+(a_{k+1}) - \sigma^-(a_{k+1})$$ رابطه ۱۷)

۳. حل مدل برنامه‌ریزی خطی رابطه ۱۸.

رابطه ۱۸)

$$[min] Z = \sum_{k=1}^{m} [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

$$subject\ to$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta \;\; if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 \;\; if \;\; a_k \sim a_{k+1} \end{matrix}\right\} \; \forall k$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i - 1} w_{ij} = 1$$

$$w_{ij} \geq 0, \sigma^+(a_k) \geq 0, \sigma^-(a_k) \geq 0 \;\; \forall i, j, \text{و } k$$

به صورتی که σ عدد مثبت بسیار کوچکی است (سیسکوس و همکاران، ۲۰۱۶).

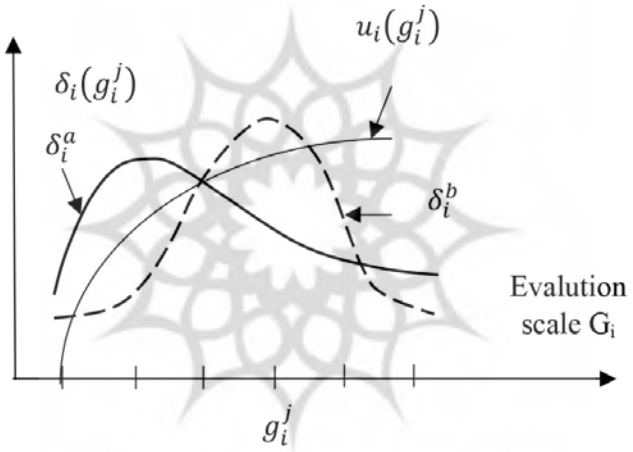
همان‌طور که مشاهده شد در مدل مطلوبیت جمع‌پذیر و یوتا استار ارزش گزینه‌ها در هر معیار قطعی و غیراحتمالی و همچنین مستقل از سایر معیارها در نظر گرفته می‌شوند و به‌عبارتی معیارها مستقل از یکدیگر مفروض‌اند، در حالی که در مسائل دنیای واقعی این امر معمولاً به‌ندرت اتفاق می‌افتد.

مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی

سیکوس، برای رفع مشکل عدم اطمینان مربوط به ارزش گزینه‌ها در معیارهای مختلف هنگامی که عدم اطمینان از نـوع احتمال است، نسخه جدیدی از مدل مطلوبیت جمع‌پذیر با نام مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی ارائه کـرد. در مـدل مطلوبیـت جمع‌پذیر تصادفی ارزش هر گزینه در هر معیار با یک تابع احتمال نمایش داده می‌شود، به‌طوری که تابع مطلوبیت نهایی برای گزینه a با استفاده از رابطه ۱۹ قابل محاسبه است (سیسکوس و همکاران، ۲۰۱۶).

$$u(\delta^a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \delta_i^a(g_i^j)u_i(g_i^j) \qquad \text{رابطه ۱۹)}$$

به‌طوری که، δ_i^a ارزیابی توزیعی از گزینه a در i امین معیار را نشان می‌دهد. $\delta_i^a(g_i^j)$ نشان‌دهنـده احتمـال وقـوع پیامد g_i^j برای گزینه a در معیارiام و $u_i(g_i^j)$ مطلوبیت نهایی پیامد g_i^j است. $u(\delta^a)$ مطلوبیت کلی گزینه a را نشان می‌دهد (شکل ۲).



شکل ۲. تابع توزیع ارزش و تابع ارزش نهایی

بدیهی است اگر g_i دارای مقادیر گسسته باشد، رابطه ۲۰ همواره برقرار است.

$$\sum_{j=1}^{\alpha_i} \delta_i^a(g_i^j) = 1 \qquad \text{رابطه ۲۰)}$$

تابع مطلوبیت جمع‌پذیر در این روش دارای خواص ذکرشده در روش‌های پیشین است، بنابراین رابطه ۲۱ را خواهیم داشت.

$$\begin{cases} u[\delta^a] > u[\delta^b] \Leftrightarrow a \succ b \\ u[\delta^a] = u[\delta^b] \Leftrightarrow a \sim b \end{cases} \qquad \text{رابطه ۲۱)}$$

مراحل انجام کار در این روش کاملاً با روش یوتا استار مشابه است و تنها تفاوت در تعریف تابع مطلوبیت به شکلی که بیان شده، است (سیسکوس و همکاران، ۲۰۱۶). بنابراین گام‌های روش مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی بـه‌طـور خلاصـه عبارت است از:

۱. تعیین مطلوبیت مورد انتظار کلی گزینه‌های مجموعه مرجع $u(\delta^{a_k})$ برای تمامی مقادیر $k = 1, \dots, m$ با توجه به متغیرهای رابطه ۲۲.

رابطه ۲۲) $$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0$$

۲. تعیین مقادیر خطای $\sigma^+(a)$ و $\sigma^-(a)$ روی مجموعه مرجع A_R با نوشتن رابطه ۲۳ برای هر جفت گزینه متوالی در رتبه‌بندی.

رابطه ۲۳) $$\Delta(a_k, a_{k+1}) = u[\delta^{a_k}] - \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k) - u[\delta^{a_{k+1}}] + \sigma^+(a_{k+1}) - \sigma^-(a_{k+1})$$

۳. حل مدل برنامه‌ریزی خطی رابطه ۱۸ با جای‌گذاری روابط ۲۲ و ۲۳ در آن.

روش‌شناسی پژوهش: مدل توسعه‌یافته پیشنهادی

همان‌طور که گفته شد، در مدل‌های پیشین ارزش هر گزینه در هر معیار و مطلوبیت ناشی از آن مستقل از سایر معیارها در نظر گرفته می‌شود، در حالی که در واقعیت چنین نیست. برای مثال در تصمیم‌گیری برای خرید خودرو مطلوبیت یک ارزش خاص در معیار قیمت، به ارزش معیار کیفیت آن نیز بستگی دارد، در نتیجه در تعیین مطلوبیت مربوط به یک ارزش مشخص در معیار قیمت خودرو، باید همزمان به ارزش معیار کیفیت نیز توجه شود. برای اینکه هم مفهوم احتمالی بودن ارزش معیارها و هم وابستگی میان معیارها از نظر ارزش گزینه‌های مختلف در آن به‌صورت همزمان مد نظر قرار گیرد، از مفهوم احتمال شرطی بهره گرفته شده است. بدین صورت که علاوه بر برآورد توزیع احتمال مقادیر مختلف ممکن برای یک معیار، در صورت وابستگی یک معیار به معیار دیگر، احتمال وقوع مقادیر معیار وابسته به شرط وقوع مقادیر مختلف ممکن معیار مستقل مد نظر قرار می‌گیرد. برای توسعه مدل پیشنهادی به مفاهیم و تعاریف زیر را توجه کنید.

- گزینه a در معیار i دارای α_i پیامد محتمل است.
- وقوع پیامدهای محتمل برای گزینه a در معیار i به وقوع پیامدهای محتمل برای معیار s وابسته است، به‌طوری که $s \in \{1, \dots, n\}$ و $s \neq i$.
- گزینه a در معیار s دارای α_s پیامد محتمل است.
- در این صورت تابع مطلوبیت کلی با استفاده از رابطه ۲۴ تعریف می‌شود.

رابطه ۲۴)
$$u(\delta^a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \delta_i^a(g_i^j \,|\, g_{s_1}^{l_{s_1}}, g_{s_2}^{l_{s_2}}, \dots, g_{s_n}^{l_{s_n}} for\ s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\}\ and\ l_{s_i} = 1, \dots, \alpha_{s_i},\quad s_i \neq i) u_i(g_i^j)$$

به‌طوری که، δ_i^a ارزیابی توزیعی از گزینه a در iامین معیار را نشان می‌دهد.

$\delta_i^a(g_i^j \,|\, g_{s_1}^{l_{s_1}}, g_{s_2}^{l_{s_2}}, \dots, g_{s_n}^{l_{s_n}} for\ s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\} and\ l_{s_i} = 1, \dots, \alpha_{s_i},\ s_i \neq i)$ نشان‌دهنده احتمال وقوع پیامد g_i^j برای گزینه a در معیار iام به شرط وقوع پیامد $g_{s_i}^{l_{s_i}}$ در معیارهای دیگر است که باید تمامی حالت‌های ممکن ترکیب پیامدهای $g_{s_i}^{l_{s_i}}$ در معیارهای مختلف s_i که $s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$، $and\ l_{s_i} = 1, \dots, \alpha_{s_i}$

و $s_i \neq i$ در نظر گرفته شوند. $u_i(g_i^j)$ مطلوبیت نهایی پیامد g_i^j است. $u(\delta^a)$ مطلوبیت کلی گزینه a را نشان می‌دهد.

- در این تابع مطلوبیت کلی به‌ازای هر معیار رابطه ۲۵ برقرار خواهد بود.

رابطه ۲۵)
$$\sum_{j=1}^{\alpha_i} \delta_i^a(g_i^j \left| g_{s_1}^{l_{s_1}}, g_{s_2}^{l_{s_2}}, \dots, g_{s_n}^{l_{s_n}} for\ s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\}\ and\ l_{s_i} = 1, \dots, \alpha_{s_i}, s_i \neq i\right) = 1 \ , i = 1, \dots, n$$

رابطه ۲۵ نشان می‌دهد که یکی از پیامدهای g_i^j در معیار در هر معیار i به ازای $j = 1, \dots, \alpha_i$ حتماً اتفاق می‌افتد.

- با توجه به تعاریف بالا و مشابه روش یوتا استار رابطه ۲۶ برقرار خواهد بود.

رابطه ۲۶)
$$\acute{u}(\delta^a) = u(\delta^a) - \sigma^+(a) + \sigma^-(a)$$

با توجه به موارد گفته‌شده، الگوریتم مدل پیشنهادی به‌صورت مشروح عبارت است از:

۱. تعریف مجموعه معیارهای تصمیم به‌صورت $g_i = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$، به‌طوری که n تعداد معیارها را نشان می‌دهد، به‌عبارتی $i = 1, \dots, n$.

۲. تعریف مجموعه مرجع A_R شامل مجموعه‌ای از گزینه‌های تصمیم و رتبه‌بندی اولیه عناصر این مجموعه توسط تصمیم‌گیرنده پیش از مدل‌سازی. به‌طوری که $a_k \in A_R$، $k = 1, \dots, m$ یک گزینه از مجموعه A_R است.

۳. شناسایی مجموعه مقادیر ممکن برای گزینه‌های مختلف در معیار iام یعنی مقادیر g_i^j $(j = 1, \dots, \alpha_i)$ در بازه نانزولی حقیقی $[g_{i^*}, g_i^*]$، به‌طوری که g_{i^*} و g_i^* به ترتیب بدترین و بهترین سطح مقادیر محتمل در معیار iام را نشان می‌دهند و سپس محاسبه احتمال وقوع هر یک از این مقادیر با استفاده از داده‌های گذشته مربوط به مقادیر هر گزینه در هر معیار.

۴. تعیین وابستگی یا عدم وابستگی مقادیر گزینه‌ها در معیارهای مختلف به یکدیگر با استفاده از آزمون‌های آماری بر اساس داده‌های آماری گذشته مربوط به مقادیر گزینه‌ها در معیارها. برای تعیین وابستگی معیارها آزمون‌های مختلفی وجود دارد که گروهی از آنها با محاسبه ضریب همبستگی و واریانس و کوریانس به تعیین روابط همبستگی می‌پردازند، اما گروه دیگر بر پایه رگرسیون داده در پی تعیین روابط علیت بین متغیرها هستند و برای انجام آزمون وابستگی در این مدل به این گروه از آزمون‌ها نیاز است. از جمله آزمون‌های تعیین وابستگی علی بر پایه رگرسیون، آزمون علیت گرنجر است که در این پژوهش برای تعیین روابط وابستگی علی بین معیارها از آن استفاده خواهد شد.

۵. در صورتی که در نتیجه آزمون‌های مرحله ۴ معیار i وابسته به معیارهای s_i $(s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\})$ شناخته شود، آنگاه احتمال وقوع g_i^j برای هر گزینه $a_k \in A_R$ به‌شرط وقوع تمامی ترکیبات محتمل در سایر معیارهای s_i به‌صورت رابطه ۲۷ محاسبه شود.

رابطه ۲۷)
$$\delta_i^{a_k}(g_i^j \left| g_{s_1}^{l_{s_1}}, g_{s_2}^{l_{s_2}}, \dots, g_{s_n}^{l_{s_n}}, for\ s_i \in \{g_1, g_2, \dots, g_n\}\ and\ l_{s_i} = 1, \dots, \alpha_{s_i}, s_i \neq i\right)$$

۶. محاسبه تابع مطلوبیت کلی برای هر گزینه $a_k \in A_R$ با استفاده از رابطه ۲۴.

۷. تقسیم بازه $[g_{i^*}, g_i^*]$ به $(\alpha_t - 1)$ فاصله مساوی، به‌طوری که نقطه پایانی هر بازه برای معیار iام و زیربازه tام یعنی g_i^t به‌صورت رابطه ۲۸ تعریف می‌شود.

$$g_i^t = g_{i^*} + \frac{t-1}{\alpha_t - 1}(g_i^* - g_{i^*}) \quad \forall\, t = 1, \dots, \alpha_t$$ رابطه ۲۸)

۸. محاسبه مطلوبیت مقادیر g_i^j بر حسب مقادیر g_i^t با استفاده از رابطه ۲۹.

$$u_i[g_i^j] = u_i(g_i^t) + \frac{g_i(a) - g_i^t}{g_i^{t+1} - g_i^t}[u_i(g_i^{t+1}) - u_i(g_i^t)]$$ رابطه ۲۹)

۹. تعریف متغیرهای w_{it}، به‌طوری که $w_{it} = u_i(g_i^{t+1}) - u_i(g_i^t)$، $i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, \alpha_i$.

۱۰. جای‌گذاری متغیرهای w_{it} در تابع مطلوبیت کلی ۲۴.

۱۱. تشکیل رابطه ۲۳ برای هر دو جفت گزینه متوالی در رتبه‌بندی اولیه مجموعه مرجع.

۱۲. حل مدل برنامه‌ریزی خطی ۳۰.

رابطه ۳۰)

$$[min]Z = \sum_{k=1}^{m}[\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

$$subject\ to$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta & if\ \ a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 & if\ \ a_k \sim a_{k+1}\end{array}\right\} \ \forall k$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{\alpha_t - 1} w_{it} = 1$$

$$w_{it} \geq 0, \sigma^+(a_k) \geq 0, \sigma^-(a_k) \geq 0 \qquad \forall i, t, \text{و } k$$

یافته‌های پژوهش: مثال عددی

در این بخش برای نشان دادن قابلیت کاربرد مدل ارائه‌شده، کاربرد آن را در مثالی واقعی بررسی می‌کنیم. تصمیم‌گیری در رابطه با سرمایه‌گذاری سهام از جمله مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره است که در محیطی نامطمئن اتفاق می‌افتد، به‌طوری که نه تنها مقادیر ارزش هر معیار در هر گزینه قطعی نیست و از طرف دیگر بر اساس شاخص‌هایی تصمیم‌گیری صورت می‌گیرد، بلکه مقادیر ارزش برخی از آنها به برخی دیگر وابسته است. از همین رو فرض می‌کنیم سرمایه‌گذاری بخواهد در یکی از شرکت‌های پتروشیمی آبادان، پتروشیمی خارک و پتروشیمی شازند سرمایه‌گذاری کند. در ادامه مراحل بهره‌گیری از مدل در مثال با توجه به گام‌های ارائه‌شده در بخش ۶ ارائه می‌شوند.

گام ۱. در این مثال بر اساس رتبه‌بندی صورت‌گرفته در تحقیق آبادیان و شجری (۱۳۹۴) از سه معیار سود هر سهم (EPS)[1]، سود تقسیمی هر سهم (DPS)[2] و نرخ بازده دارایی‌ها (ROA)[3] که بر اساس این تحقیق دارای بیشترین اهمیت در انتخاب پرتفلیو سهام هستند، بهره گرفته می‌شود.

1. Earnings Per Share
2. Dividend Per Share
3. Return on assets

گام ۲. همان‌طور که در بخش‌های قبل گفته شد در انواع روش‌های مطلوبیت جمع‌پذیر، پیش از انجام مدل‌سازی، به رتبه‌بندی اولیه از گزینه‌های تصمیم توسط تصمیم‌گیرندگان نیاز است. در تحقیق آبادیان و شجری (۱۳۹۴) برای انتخاب سبد بهینه سرمایه‌گذاری به رتبه‌بندی شرکت‌های پتروشیمی عضو بورس پرداخته شده است. در این مثال از رتبه‌بندی ارائه‌شده در این تحقیق برای سه گزینه سرمایه‌گذاری پتروشیمی آبادان، پتروشیمی خارک و پتروشیمی شازند به‌عنوان گروه مرجع استفاده شده است.

گام۳. برای تعیین احتمال برای ارزش هر معیار در هر گزینه فضای نمونه برای هر شاخص سوابق ارزش هر معیار در سال‌های گذشته است. جدول ۱ اطلاعات موجود در سازمان بورس و اوراق بهادار، مربوط به مقادیر هر معیار برای ۲۴ سال متوالی (از سال ۱۳۷۳ تا۱۳۹۶) در این شرکت‌ها را نشان می‌دهد. این اطلاعات واقعی بوده و از نرم‌افزار ره‌آورد نوین استخراج شده است.

جدول ۱. اطلاعات موجود در سازمان بورس و اوراق بهادار، مربوط به سه معیار برای (۱۳۷۳تا ۱۳۹۶)

اطلاعات مربوط به معیارهای شرکت پتروشیمی آبادان				اطلاعات مربوط به معیارهای شرکت پتروشیمی خارک				اطلاعات مربوط به معیارهای شرکت پتروشیمی شازند			
سال مالی	EPS	DPS	ROA	سال مالی	EPS	DPS	ROA	سال مالی	EPS	DPS	ROA
۱۳۹۶/۱۲/۲۹	-۶۳۰	۰	-۶/۰۴	۱۳۹۶/۱۲/۲۹	۴۸۱۶	۳۸۰۰	۴۱/۱۸	۱۳۹۶/۱۲/۲۹	۶۲۶	۶۰۰	۲۱/۹۷
۱۳۹۵/۱۲/۲۹	-۶۳۴	۰	-۶/۹	۱۳۹۵/۱۲/۲۹	۱۹۳۴	۱۸۰۰	۲۵/۳۱	۱۳۹۵/۱۲/۲۹	۷۵۴	۶۰۰	۲۰/۰۲
۱۳۹۴/۱۲/۲۹	-۴۷۱	۰	-۱۱/۱۰	۱۳۹۴/۱۲/۲۹	۲۱۴۶	۲۱۰۰	۲۸/۸۲	۱۳۹۴/۱۲/۲۹	۱۶۰۴	۱۳۵۰	۲۹/۵۰
۱۳۹۳/۱۲/۲۹	۵۲۵	۴۰۰	۱۳/۲۱	۱۳۹۳/۱۲/۲۹	۳۴۳۳	۳۵۰۰	۲۴/۱۵	۱۳۹۳/۱۲/۲۹	۱۱۲۸	۱۰۰۰	۲۱/۱۸
۱۳۹۲/۱۲/۲۹	۲۴۸۸	۲۰۰۰	۱۹/۵۵	۱۳۹۲/۱۲/۲۹	۹۱۴۵	۷۸۰۰	۶۲/۱۶	۱۳۹۲/۱۲/۲۹	۵۳۸۳	۵۰۰۰	۱۳.۳۵
۱۳۹۱/۱۲/۲۹	۱۴۹۲	۱۴۰۰	۱۳/۹۹	۱۳۹۱/۱۲/۲۹	۷۵۲۳	۷۵۰۰	۵۹/۲۲	۱۳۹۱/۱۲/۲۹	۳۳۶۳	۳۰۰۰	۲۴/۷۲
۱۳۹۰/۱۲/۲۹	۵۷۴	۵۰۰	۶/۷۲	۱۳۹۰/۱۲/۲۹	۵۹۱۴	۵۲۰۰	۶۲/۰۴	۱۳۹۰/۱۲/۲۹	۱۱۹۴	۱۱۰۰	۱۴/۰۶
۱۳۸۹/۱۲/۲۹	۹۰۷	۶۰۰	۱۰/۵۱	۱۳۸۹/۱۲/۲۹	۲۲۵۳	۲۵۰۰	۳۶/۳۴	۱۳۸۹/۱۲/۲۹	۷۳۰	۶۵۰	۹/۰۴
۱۳۸۸/۱۲/۲۹	۷۳۷	۳۷۰	۹/۸۴	۱۳۸۸/۱۲/۲۹	۲۹۳۶	۴۲۰۰	۳۹/۹۲	۱۳۸۸/۱۲/۲۹	۷۲۸	۱۰۰۰	۸/۲۹
۱۳۸۷/۱۲/۲۹	۸۳۷	۷۳۵	۱۳/۵۵	۱۳۸۷/۱۲/۲۹	۳۳۵۲	۳۲۰۰	۴۶/۸۰	۱۳۸۷/۱۲/۲۹	۶۱۳	۵۵۰	۷/۹۸
۱۳۸۶/۱۲/۲۹	۱۰۴۵	۸۷۵	۲۱/۷۲	۱۳۸۶/۱۲/۲۹	۳۳۶۰	۳۲۰۰	۵۱/۶۶	۱۳۸۶/۱۲/۲۹	۱۱۱۹	۶۷۵	۱۷/۸۲
۱۳۸۵/۱۲/۲۹	۹۶۳	۸۵۰	۲۴/۱۹	۱۳۸۵/۱۲/۲۹	۳۰۶۲	۲۸۰۰	۴۷/۱۰	۱۳۸۵/۱۲/۲۹	۱۵۶۲	۱۱۵۰	۲۸/۸۲
۱۳۸۴/۱۲/۲۹	۹۶۶	۸۰۰	۲۷/۴۱	۱۳۸۴/۱۲/۲۹	۲۰۹۱	۲۰۰۰	۵۴/۳۴	۱۳۸۴/۱۲/۲۹	۱۸۳۹	۱۵۰۰	۲۷/۹۶
۱۳۸۳/۱۲/۲۹	۱۰۰۷	۶۰۰	۲۳/۴۷	۱۳۸۳/۱۲/۲۹	۱۷۴۰	۱۵۰۰	۴۴/۲۵	۱۳۸۳/۱۲/۲۹	۱۸۴۶	۱۵۰۰	۲۸/۲۱
۱۳۸۲/۱۲/۲۹	۱۷۹۳	۱۳۰۰	۲۰/۰۵	۱۳۸۲/۱۲/۲۹	۱۳۳۰	۱۲۰۰	۴۱/۷۳	۱۳۸۲/۱۲/۲۹	۱۵۳۰	۱۲۵۰	۲۵/۸۷
۱۳۸۱/۱۲/۲۹	۱۶۴۹	۱۳۰۰	۲۰/۷۳	۱۳۸۱/۱۲/۲۹	۱۰۰۱	۸۵۰	۳۶/۴۴	۱۳۸۱/۱۲/۲۹	۱۰۰۲	۷۰۰	۲۰/۴۰
۱۳۸۰/۱۲/۲۹	۱۵۳۶	۱۴۷۵	۲۷/۳۸	۱۳۸۰/۱۲/۲۹	۱۴۴۸	۱۴۰۰	۱۸/۴۲	۱۳۸۰/۱۲/۲۹	۱۲۴۸	۱۲۰۰	۲۹/۸۶
۱۳۷۹/۱۲/۲۹	۱۴۰۱	۱۳۷۵	۲۹/۳۸	۱۳۷۹/۱۲/۲۹	۱۳۰۱	۱۲۲۰	۱۶/۲۱	۱۳۷۹/۱۲/۲۹	۱۲۴۶	۱۲۰۰	۲۶/۹۸
۱۳۷۸/۱۲/۲۹	۱۵۵۷	۱۴۵۰	۳۷/۳۲	۱۳۷۸/۱۲/۲۹	۵۴۰	۴۹۰	۶/۹۵	۱۳۷۸/۱۲/۲۹	۸۵۶	۹۰۰	۱۶/۷۲
۱۳۷۷/۱۲/۲۹	۸۴۹	۷۸۰	۲۶/۰۱	۱۳۷۷/۱۲/۲۹	۱۵۳۲۸	۱۵۲۵۸	۴/۱۳	۱۳۷۷/۱۲/۲۹	۲۶۶	۳۱۵	۸/۲۷
۱۳۷۶/۱۲/۲۹	۶۹۷	۶۷۵	۲۱/۴۰	۱۳۷۶/۱۲/۲۹	۲۶۸۴۷	۱۰۳۱۴	۲۱/۷۰	۱۳۷۶/۱۲/۲۹	۳۳۱	۲۵۵	۹/۱۶
۱۳۷۵/۱۲/۲۹	۸۲۴	۷۱۵	۲۱/۴۵	۱۳۷۵/۱۲/۲۹	۱۰۰۰۱۹	۳۸۴۲۲	۲۶/۶۲	۱۳۷۵/۱۲/۲۹	۱۴۷	۶	۱/۲۳
۱۳۷۴/۱۲/۲۹	۷۷۶	۵۶	۶/۳۵	۱۳۷۴/۱۲/۲۹	۱۱۳۱۶۹	۴۳۴۷۱	۱۵/۸۲	۱۳۷۴/۱۲/۲۹	۱۹۶	۱۱	۱/۵۴
۱۳۷۳/۱۲/۲۹	۱۸۰۱	۶۵۸	۱۵/۲۵	۱۳۷۳/۱۲/۲۹	۱۷۴۲۵۰	۹۱۸۰۹	۳۶/۹۲	۱۳۷۳/۱۲/۲۹	۱۳۳	۶	۰/۸۴

برای شناسایی مقادیر محتمل در هر معیار با طبقه‌بندی داده‌های مشاهده‌شده هر معیار (مقادیر این معیارها در ۲۴ سال) در چهار طبقه، از میانگین هر طبقه به‌عنوان نماینده مقادیر آن طبقه استفاده می‌کنیم. جدول ۲ مقادیر احتمال در هر یک از طبقات را نشان می‌دهد.

جدول ۲. مقادیر احتمال در هر یک از طبقات داده‌های مشاهده‌شده هر معیار

طبقه‌بندی معیار EPS در پتروشیمی آبادان				طبقه‌بندی معیار EPS در پتروشیمی خارک				طبقه‌بندی معیار EPS در پتروشیمی شازند			
حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال
-۶۳۴	۱۴۶/۵۰	-۲۴۴	۰/۱۲	۵۴۰	۴۳۹۶۷/۵	۲۲۲۵۴	۰/۸۸	۱۳۳	۱۴۴۵/۵	۷۸۹	۰/۷۱
۱۴۶/۶	۹۲۷/۱	۵۳۷	۰/۳۸	۴۳۹۶۷/۶	۸۷۳۹۵/۱	۶۵۶۸۱	۰	۱۴۴۵/۶	۲۷۵۸/۱	۲۱۰۲	۰/۲۱
۹۲۷/۲	۱۷۰۷/۶	۱۳۱۷	۰/۳۸	۸۷۳۹۵/۲	۱۳۰۸۲۲/۷	۱۰۹۱۰۹	۰/۰۸	۲۷۵۸/۲	۴۰۷۰/۷	۳۴۱۴	۰/۰۴
۱۷۰۷/۷	۲۴۸۸/۲	۲۰۹۸	۰/۱۲	۱۳۰۸۲۲/۸	۱۷۴۲۵۰/۳	۱۵۲۵۳۶	۰/۰۴	۴۰۷۰/۸	۵۳۸۳/۱	۴۷۲۷	۰/۰۴
طبقه‌بندی معیار DPS در پتروشیمی آبادان				**طبقه‌بندی معیار DPS در پتروشیمی خارک**				**طبقه‌بندی معیار DPS در پتروشیمی شازند**			
حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال
۰	۵۰۰	۲۵۰	۰/۲۹	۴۹۰	۲۳۳۱۹/۷	۱۱۹۰۵	۰/۸۸	۶	۱۲۵۴/۵	۶۳۰	۰/۷۹
۵۰۰/۱	۱۰۰۰/۱	۷۵۰	۰/۴۲	۲۳۳۱۹/۸	۴۶۱۴۹/۵	۳۴۷۳۵	۰	۱۲۵۴/۶	۲۵۰۳/۱	۱۸۷۸	۰/۱۳
۱۰۰۰/۲	۱۵۰۰/۲	۱۲۵۰	۰/۲۵	۴۶۱۴۹/۶	۶۸۹۷۹/۳	۵۷۵۶۴	۰/۰۸	۲۵۰۳/۲	۳۷۵۱/۷	۳۱۲۷	۰/۰۴
۱۵۰۰/۳	۲۰۰۰/۳	۱۷۵۰	۰/۰۴	۶۸۹۷۹/۴	۹۱۸۰۹/۱	۸۰۳۴۹	۰/۰۴	۳۷۵۱/۸	۵۰۰۰/۱	۴۳۷۵	۰/۰۴
طبقه‌بندی معیار ROA در پتروشیمی آبادان				**طبقه‌بندی معیار ROA در پتروشیمی خارک**				**طبقه‌بندی معیار ROA در پتروشیمی شازند**			
حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال	حد پایین	حد بالا	میانگین طبقه	احتمال
-۱۱/۱۰	۱/۰۱	-۵/۰۵	۰/۱۳	۴/۱۳	۱۸/۶۴	۱۱/۳۸	۰/۲۰	۰/۸۴	۹/۴۱	۵/۱۳	۰/۳۳
۱/۰۲	۱۳/۱۲	۷/۰۷	۰/۱۷	۱۸/۶۵	۳۳/۱۶	۲۵/۹	۰/۱۷	۹/۴۲	۱۸	۱۳/۷۱	۰/۱۳
۱۳/۱۳	۲۵/۲۴	۱۹/۱۸	۰/۵۰	۳۳/۱۷	۴۷/۶۷	۴۰/۴۲	۰/۴۶	۱۸/۰۱	۲۶/۵۸	۲۲/۲۹	۰/۲۵
۲۵/۲۵	۳۷/۳۵	۳۱/۳۰	۰/۲۱	۴۷/۶۸	۶۲/۱۹	۵۴/۹۴	۰/۱۷	۲۶/۵۹	۳۵/۱۶	۳۰/۸۷	۰/۲۹

مجموعه مقادیر ممکن برای گزینه‌های مختلف در هر یک از سه معیار با در نظر گرفتن میانگین طبقات در جدول ۲ و بر اساس رتبه‌بندی صورت‌گرفته در مجموعه مرجع در جدول ۳ ارائه شده است. رتبه‌بندی استفاده‌شده بر اساس رتبه‌بندی انجام‌شده در تحقیق تحقیق آبادیان و شجری (۱۳۹۴) است که در تحقیق ذکرشده این رتبه بندی‌ها از میانگین رتبه‌های به‌دست‌آمده از تکنیک‌های الکتره[1]، تاپسیس[2] و مجموع ساده وزنی[3] به دست آمده است.

1. ELECTRE
2. TOPSIS
3. SAW

جدول۳. اطلاعات مسئله بر اساس رتبه‌بندی ارائه‌شده در تحقیق آبادیان و شجری (۱۳۹٤)

	پتروشیمی آبادان	پتروشیمی خارک	پتروشیمی شازند
EPS	-۲۴۴	۲۲۲۵۴	۷۸۹
	۵۳۷	۶۵۶۸۱	۲۱۰۲
	۱۳۱۷	۱۰۹۱۰۹	۳۴۱۴
	۲۰۹۸	۱۵۲۵۳۶	۴۷۲۷
DPS	۲۵۰	۱۱۹۰۵	۶۳۰
	۷۵۰	۳۴۷۳۵	۱۸۷۸
	۱۲۵۰	۵۷۵۶۴	۳۱۲۷
	۱۷۵۰	۸۰۳۴۹	۴۳۷۵
ROA	-۵/۰۵	۱۱/۳۸	۵/۱۳
	۷/۰۷	۲۵/۹	۱۳/۷۱
	۱۹/۱۸	۴۰/۴۲	۲۲/۲۹
	۳۱/۳۰	۵۴/۹۴	۳۰/۸۷
رتبه	۳	۱	۲

گام ٤. برای تعیین وابستگی یا عدم وابستگی مقادیر گزینه‌ها در معیارهای مختلف به یکدیگر از آزمون علیت گرنجر[1] روی داده‌های موجود برای این سه معیار استفاده شده و نتایج به‌دست‌آمده از این آزمون در جدول ۴ نشان داده شده است. شایان ذکر است در این آزمون طول وقفه بهینه یک محاسبه شده است. بر اساس نتایج حاصل از این آزمون مقادیر معیار سود هر سهم (EPS) و مقادیر معیار سود تقسیمی هر سهم (DPS) به مقادیر معیار نرخ بازده دارایی‌ها (ROA) وابسته علی است.

جدول ٤. نتایج به‌دست‌آمده از آزمون علیت گرنجر روی داده‌های موجود با استفاده از نرم‌افزار ایویوز[2]

Pairwise Granger Causality Tests			
		Lags: 1	
Prob.	F-Statistic	Obs	Null Hypothesis:
۱- E-۱۵	۱۰۷/۵۳۵	۷۱	EPS does not Granger Cause DPS
۲-E-۱۴	۹۳/۴۵۶۷	DPS does not Granger Cause EPS	
۰/۴۹۳۳	۰/۴۷۴۵۰	۷۱	ROA does not Granger Cause DPS
۰/۶۹۵۶	۰/۱۵۴۳۴	DPS does not Granger Cause ROA	
۰/۳۵۳۵	۰/۸۷۲۶۵	۷۱	ROA does not Granger Cause EPS
۰/۷۶۷۳	۰/۰۸۸۲۸	EPS does not Granger Cause ROA	

گام ۵. برای محاسبه تابع مطلوبیت کلی از آنجا که بر اساس آزمون علیت معیار نرخ بازده (ROA) علت معیار سود هر سهم (EPS) است، باید برای هر گزینه احتمال وقوع سود هر سهم (EPS) در هر یک از طبقات به شرط وجود معیار نرخ بازده (ROA) در هر یک از طبقات ممکن در همان گزینه محاسبه شود. به‌طور مثال احتمال وقوع سود هر سهم (EPS)

1. Granger causality
2. Eviews

در طبقه اول در گزینه اول ($P(-634 \le EPS \le 146.5)$) به‌صورت رابطه۳۱ محاسبه می‌شود.

رابطه ۳۱)
$$\begin{matrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +\left[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \left\langle P\begin{pmatrix} -634 \le E \\ PS \le 146.5 \end{pmatrix} \middle| (25.25 \le ROA \le 37.35)\right\rangle\right]\end{matrix}$$

احتمال وقوع در هر یک از طبقات سود تقسیمی هر سهم (DPS) به شرط مقادیر ممکن برای معیار نرخ بازده دارایی‌ها (ROA) در همان گزینه محاسبه می‌شود. به‌طور مثال احتمال وقوع سود تقسیمی هر سهم (DPS) در طبقه اول در گزینه اول ($0 \le DPS \le 500$) به‌صورت رابطه ۳۲ به دست می‌آید.

رابطه ۳۲)
$$\begin{matrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{matrix}$$

گام٦. با محاسبه احتمال وقوع سایر ارزش‌ها در هر سه معیار در گزینه اول تابع مطلوبیت کلی این گزینه بر اساس فرمول ارائه‌شده در رابطه **۲۴**، به‌صورت رابطه ۳۳ به دست می‌آید. در این رابطه در شاخص‌های وابسته برای هر مقدار محتمل در هر گزینه، احتمال وقوع به شرط پیامدهای مختلف در شاخص علت محاسبه شده و در مطلوبیت آن مقدار محتمل ضرب شده و در نهایت مطلوبیت کلی گزینه از جمع این موارد محاسبه شده است.

رابطه ۳۳)
$$\delta_1^{a_1} = \begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(-634 \le EPS \le 146.5) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_1(-244)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(146.51 \le EPS \le 927.01) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(146.51 \le EPS \le 927.01) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(146.51 \le EPS \le 927.01) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(146.51 \le EPS \le 927.01) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_1(537)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(927.02 \le EPS \le 1707.52) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(927.02 \le EPS \le 1707.52) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(927.02 \le EPS \le 1707.52) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(927.02 \le EPS \le 1707.52) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_1(1317)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(1707.53 \le EPS \le 2488.03) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(1707.53 \le EPS \le 2488.03) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(1707.53 \le EPS \le 2488.03) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(1707.53 \le EPS \le 2488.03) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_1(2098)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(0 \le DPS \le 500) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_2(250)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(500.01 \le DPS \le 1000.01) | (-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(500.01 \le DPS \le 1000.01) | (1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(500.01 \le DPS \le 1000.01) | (13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(500.01 \le DPS \le 1000.01) | (25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_2(750)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(1000.02 \le DPS \le 1500.02)|(-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(1000.02 \le DPS \le 1500.02)|(1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(1000.02 \le DPS \le 1500.02)|(13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(1000.02 \le DPS \le 1500.02)|(25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_2(1250)$$

$$+\begin{Bmatrix}[P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * \langle P(1500.03 \le DPS \le 2000.03)|(-11.1 \le ROA \le 1.01)\rangle] \\ +[P(1.02 \le ROA \le 13.12) * \langle P(1500.03 \le DPS \le 2000.03)|(1.02 \le ROA \le 13.12)\rangle] \\ +[P(13.13 \le ROA \le 25.24) * \langle P(1500.03 \le DPS \le 2000.03)|(13.13 \le ROA \le 25.24)\rangle] \\ +[P(25.25 \le ROA \le 37.35) * \langle P(1500.03 \le DPS \le 2000.03)|(25.25 \le ROA \le 37.35)\rangle]\end{Bmatrix} * u_2(1750)$$

$$+P(-11.1 \le ROA \le 1.01) * u_3\ (-5.05) + P(1.02 \le ROA \le 13.12) * u_3\ (7.07)$$
$$+P(13.13 \le ROA \le 25.24) * u_3(19.18) + P(25.25 \le ROA \le 37.35) * u_3(31.30)$$
$$= 0.125 * u_1(-244) + 0.375 * u_1(537) + 0.42 * u_2(750) + 0.375 * u_1(1317)$$
$$+0.125 * u_1(2098) + 0.292 * u_2(250) + 0.25 * u_2(1250) + 0.042 * u_2(1750)$$
$$+0.125 * u_3(-5.05) + 0.167 * u_3(7.07) + 0.5 * u_3(19.18) + 0.21 * u_3(31.30)$$

گام ۷. برای هر معیار، بازه $[g_{i^*}, g_i^*]$ را به سه فاصله مساوی تقسیم می‌کنیم. نقاط مرزی در فواصل تعیین‌شده برای هر معیار (g_i^t) عبارت‌اند از:

$$[g_{1^*}, g_1^*] = [-244 \quad 50683 \quad 101609 \quad 152536]$$
$$[g_{2^*}, g_2^*] = [250 \quad 26965 \quad 53679 \quad 80394]$$
$$[g_{3^*}, g_3^*] = [-5.05 \quad 14.95 \quad 34.94 \quad 54.94]$$

گام ۸. در این مرحله می‌توانیم مطلوبیت مقادیر محتمل برای هر معیار $(u_i(g_i^j))$ را بر حسب مقادیر مطلوبیت نقاط مرزی برای هر معیار$(u_i(g_i^t))$ محاسبه کنیم (مقادیر جدول ۵). محاسبه مطلوبیت مقادیر محتمل هر معیار، با توجه به اینکه مقادیر محتمل این معیار در کدام زیربازه قرار داشته باشد، با استفاده از رابطه ۲۹ صورت می‌گیرد.

جدول۵. مطلوبیت مقادیر محتمل بر حسب مقادیر مطلوبیت نقاط مرزی برای هر معیار

$u_1(-244) = 0$	$u_2(250) = 0$	$u_3(-5.05) = 0$
$u_1(537) = 0.02u_1(50683)$	$u_2(750) = 0.02u_2(26965)$	$u_3(7.07) = 0.6u_3(14.95)$
$u_1(1317) = 0.03u_1(50683)$	$u_2(1250) = 0.04u_2(26965)$	$u_3(19.18) = 0.79u_3(14.95) + 0.21u_3(34.94)$
$u_1(2098) = 0.05u_1(50683)$	$u_2(1750) = 0.06u_2(26965)$	$u_3(31.30) = 0.18u_3(14.95) + 0.82u_3(34.94)$

گام ۹. متغیرهای w_{it} بر اساس فاصله بین مطلوبیت‌های نقاط مرزی متوالی این فاصله‌ها به شرح جدول ۶ است.

جدول ٦. مقادیر متغیر های w_{it} بر اساس فاصله بین مطلوبیت‌های نقاط مرزی متوالی

$w_{11} = u_1(50683) - u_1(-244)$	$w_{21} = u_2(26965) - u_2(250)$	$w_{31} = u_3(14.95) - u_3(-5.05)$
$w_{12} = u_1(101609) - u_1(50683)$	$w_{22} = u_2(53679) - u_2(26965)$	$w_{32} = u_3(34.94) - u_3(14.95)$
$w_{13} = u_1(152536) - u_1(101609)$	$w_{23} = u_2(80394) - u_2(53679)$	$w_{33} = u_3(54.94) - u_3(34.94)$

گام ۱۰. با جای‌گذاری مقادیر $u_i(g_i^j)$، مقدار تابع ارزش نهایی گزینه اول (پتروشیمی آبادان) بر حسب متغیرهای w_{it} به‌صورت رابطه ۳۴ به دست می‌آید.

رابطه ۳۴) $$u(a_1) = 0.25w_{11} + 0.02w_{21} + 0.81w_{31} + 0.28w_{32}$$

به همین ترتیب تابع ارزش نهایی برای سایر گزینه‌ها نیز، به روش توضیح‌داده‌شده برای گزینه اول محاسبه می‌شود (رابطه‌های ۳۵ و ۳۶).

رابطه ۳۵) $$u(a_2) = 0.51w_{11} + 0.125w_{12} + 0.05w_{13} + 0.51w_{21} + 0.06w_{22} + 0.04w_{23} + 0.79w_{31} + 0.71w_{32} + 0.29w_{33}$$

رابطه ۳۶) $$u(a_3) = 0.03w_{11} + 0.48w_{21} + 0.83w_{31} + 0.33w_{32}$$

با در نظر گرفتن خطاهای $\sigma^+(a_k)$ و $\sigma^-(a_k)$ ارزش هر گزینه به شکل روابط (۳۷ـ۳۹) محاسبه می‌شود.

رابطه ۳۷) $$\acute{u}(a_1) = 0.25w_{11} + 0.02w_{21} + 0.81w_{31} + 0.28w_{32} - \sigma^+(a_1) + \sigma^-(a_1)$$

رابطه ۳۸) $$\acute{u}(a_2) = 0.51w_{11} + 0.125w_{12} + 0.05w_{13} + 0.51w_{21} + 0.06w_{22} + 0.04w_{23} + 0.79w_{31} + 0.71w_{32} + 0.29w_{33} - \sigma^+(a_2) + \sigma^-(a_2)$$

رابطه ۳۹) $$\acute{u}(a_3) = 0.03w_{11} + 0.48w_{21} + 0.83w_{31} + 0.33w_{32} - \sigma^+(a_3) + \sigma^-(a_3)$$

گام ۱۱. در ادامه $\Delta(a_k, a_{k+1})$ از تفاضل توابع ارزش نهایی گزینه‌ها (برای هر دو گزینه مجاور) محاسبه می‌شود (روابط ۴۰ و ۴۱).

رابطه ۴۰) $$\Delta(a_3, a_1) = -0.22w_{11} + 0.46w_{21} + 0.02w_{31} + 0.05w_{32} + \sigma^+(a_1) - \sigma^-(a_1) - \sigma^+(a_3) + \sigma^-(a_3)$$

رابطه ۴۱) $$\Delta(a_3, a_1) = -0.22w_{11} + 0.46w_{21} + 0.02w_{31} + 0.05w_{32} + \sigma^+(a_1) - \sigma^-(a_1) - \sigma^+(a_3) + \sigma^-(a_3)$$

مقادیر $\Delta(a_k, a_{k+1})$ برای مواردی که گزینه a_k بر گزینه مجاور a_{k+1} برتری داشته باشد صفر نبوده و همواره از عدد ثابت کوچک δ بزرگ‌تر است. این موضوع در مدل نهایی در قالب محدودیت اعمال می‌شود.

گام ۱۲. در مرحله آخر مدل نهایی برنامه‌ریزی خطی به‌صورت مدل رابطه ۴۲ ایجاد می‌شود.

رابطه ۴۲)

$$[min]Z = \sum_{k=1}^{k=3} [\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)]$$

$$subject\ to$$

$$-0.22w_{11} + 0.46w_{21} + 0.02w_{31} + 0.05w_{32} - \sigma^+(a_3) + \sigma^-(a_3) + \sigma^+(a_1) - \sigma^-(a_1) + \geq \delta$$

$$0.48w_{11} + 0.125w_{12} + 0.05w_{13} + 0.03w_{21} + 0.06w_{22} + 0.04w_{23} - 0.04w_{31} + 0.38w_{32} + 0.29w_{33}$$

$$-\sigma^+(a_2) + \sigma^-(a_2) + \sigma^+(a_3) - \sigma^-(a_3) \geq \delta$$

$$w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{31} + w_{32} + w_{33} = 1$$

$$w_{it} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \ \ t = 1,2,3$$

$$\sigma^+(a_k) \geq 0 \quad \sigma^-(a_k) \geq 0 \ \ \ k = 1,2,3$$

با فرض $\delta = 0.05$ و حل مدل در نرم‌افزار لینگو مقادیر به‌دست‌آمده برای متغیرهای مدل به مقادیر جدول ۷ حاصل می‌شود.

جدول۷. مقادیر به‌دست‌آمده برای هر یک از متغیرهای مدل

$\sigma^+(a_1)=0$	$\sigma^+(a_2)=0$	$\sigma^+(a_3)=0$	$\sigma^-(a_1)=0$	$\sigma^-(a_2)=0$	$\sigma^-(a_3)=0$
$w_{11}=0.15$	$w_{21}=0.15$	$w_{31}=0.7$	$w_{12}=0$	$w_{22}=0$	$w_{32}=0$
$w_{13}=0$	$w_{23}=0$	$w_{33}=0$			

با جای‌گذاری مقادیر خطای به‌دست‌آمده از حل مدل مقدار بهینه تابع هدف صفر حاصل می‌شود و با جای‌گذاری مقادیر w_{it} مطلوبیت کلی برای هر سه گزینه عبارت است از:

$$u(a_1) = 0.25 * 0.15 + 0.02 * 0.15 + 0.81 * 0.7 = 0.6$$
$$u(a_2) = 0.51 * 0.15 + 0.51 * 0.15 + 0.79 * 0.7 = 0.7$$
$$u(a_3) = 0.03 * 0.15 + 0.48 * 0.15 + 0.83 * 0.7 = 0.65$$

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در دنیای امروز اغلب مسائلی که برای تصمیم‌گیری به مدیران عرضه می‌شوند، دارای ابعاد متنوعی بوده و با چندین معیار فرموله می‌شوند. از طرفی از آنجا که سازمان‌ها معمولاً در محیط تجاری نامطمئن و با تغییرات زیاد فعالیت می‌کنند، اغلب پیامدهای یک مسئله تصمیم‌گیری با عدم قطعیت همراه است و در تصمیم‌گیری برای این مسائل از یک طرف با معیارهای زیادی که ارتباطات چندسویه دارند روبه‌رو هستند و از طرف دیگر به‌علت ناکافی بودن برخی از داده‌ها، این تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان صورت می‌گیرد. یکی از مدل‌های ارائه‌شده با توجه به مفهوم مطلوبیت در تصمیم‌گیری چندشاخصه مدل مطلوبیت جمع‌پذیر است که کاستی‌های بسیاری از مدل‌های پیشین در حوزه تئوری مطلوبیت چندمعیاره را برطرف می‌کند. با این حال این مدل نارسایی‌هایی دارد که عبارت‌اند از: ۱. عدم توجه به عدم قطعیت رخداد ارزش گزینه‌ها در شاخص‌های مختلف و ۲. عدم توجه به وابستگی میان ارزش گزینه‌ها در شاخص‌های مختلف به یکدیگر. نارسایی نخست با توسعه مدل مطلوبیت جمع‌پذیر تصادفی تا حدی پوشش داده شده اما مورد دوم همچنان وارد است. در این پژوهش تلاش شد مدلی ارائه شود که امکان وجود این وابستگی را در محاسبات خود لحاظ می‌کند. بدین منظور از مفهوم احتمال شرطی در توسعه مدل بهره گرفته شد، بدین صورت که ارزش هر گزینه در هر شاخص با توجه به احتمال وقوع مقادیر مختلف دیگر در شاخص‌های دیگر محاسبه شده و بدین ترتیب تمامی حالات ممکن وابستگی در محاسبه مقدار مطلوبیت نهایی هر گزینه مد نظر قرار می‌گیرد. نتایج کاربرد مدل در یک مثال عددی واقعی و هماهنگی حاصل از نتایج با مجموعه مرجع که در واقع بر اساس اطلاعات واقعی حاصل‌شده نشان از قابلیت کاربرد و اعتبار مدل پیشنهادی دارد. شایان ذکر است از این مدل در مثال‌های مختلفی استفاده شده که در تحقیق حاضر فقط یک مورد برای نمونه ارائه شده است. بنابراین پژوهش حاضر، شکاف تحقیقاتی ارائه‌شده پژوهش سیسکوس، یانسیس و دنیس (۲۰۱۶) را پوشش می‌دهد.

با این حال یکی از محدودیت‌های مدل پیشنهادی عدم بررسی امکان وجود جواب بهینه چندگانه در مدل است که ممکن است رتبه‌بندی‌های مختلفی ایجاد کند. بر این اساس، این وضعیت قلمرویی برای انجام پژوهش‌های بیشتر در این زمینه برای آینده ایجاد می‌کند. همچنین با توجه به تأثیر نحوه انجام تقسیمات دامنه توابع جزئی مطلوبیت در نتیجه مدل و اینکه این امر در مدل UTA به‌طور کلی قانونی ندارد، پیشنهاد می‌شود در آینده ضمن یک تحقیق، برای انجام تقسیمات بازه‌ای از روش‌های مختلف استفاده شده و نتایج مدل با هم مقایسه شود یا روشی منطقی بدین منظور ارائه شود. از طرفی مدل‌های UTA و سایر توسعه‌های صورت‌گرفته و از جمله مدل مقاله حاضر با توجه به اصول موضوعه تئوری مطلوبیت انتظاری طراحی شده‌اند. با مبنا قرار دادن تئوری چشم‌انداز در مطلوبیت برخی از مفروضات تئوری مطلوبیت انتظاری کنار گذاشته می‌شوند. یکی از موارد تأکیدشده در تئوری چشم‌انداز امکان وابستگی مطلوبیت‌ها است. بنابراین می‌توان در تحقیقات بعدی با ملاک قرار دادن تئوری چشم‌انداز در مطلوبیت، مدل‌های دسته UTA و به‌ویژه مدل پژوهش حاضر را که به وابستگی به‌صورت کلیدی توجه می‌کند، توسعه داد.

منابع

آبادیان، مرضیه؛ شجری، هوشنگ (۱۳۹۵). روش چندشاخصه برای انتخاب سبد سهام بهینه با استفاده از متغیرهای تحلیل بنیادی در شرکت‌های پتروشیمی عضو بورس. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۲۶، ۱-۲۶.

امینی، حامد؛ راستی برزکی، مرتضی (۱۳۹۵). ارائه دو روش جدید برای مسائل تصمیم‌گیری با معیارهای چندگانه با وجود برهم‌کنش بین معیارها. *مدیریت صنعتی*، ۸(۴)، ۵۱۵-۵۳۲.

سرورخواه، علی؛ آذر، عادل؛ بابایی کفاکی، سامان؛ شفیعی نیک‌آبادی، محسن (۱۳۹۶). استفاده از تحلیل استواری وزنی در انتخاب استراتژی (مورد مطالعه: مرکز تحقیقات و نوآوری صنایع خودروی سایپا). *مدیریت صنعتی*، ۹(۴)، ۶۶۵-۶۹۰.

سلاطی، فاطمه؛ ماکویی، احمد (۱۳۹۳). ارائه تابع ارزش (مطلوبیت) اولویت‌بندی پروژه‌های تحقیقاتی در مراکز تحقیق و توسعه با استفاده از روش UTA (مطالعه موردی شرکت منابع آب ایران). *مطالعات مدیریت صنعتی*، ۱۱(۳۱)، ۱۹-۳۳.

مهرگان، محمدرضا (۱۳۹۲). *مدلهای تصمیم‌گیری با اهداف چندگانه*. تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

References

Abadian, M., Shajari, H. (2017). Multi-attribute method for selecting the optimal stock portfolio using fundamental analysis variables in the petrochemical companies members of Stock Exchange. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 7(26), 1-26. (*in Persian*)

Amini, H., Rasti, B.M. (2017). The interactivity between the criteria in MCDM problem. *Journal of Indusrial Management*, 8(4), 515-532. (*in Persian*)

Angilella, S., Greco, S., Lamantia, F., & Matarazzo, B. (2003). Assessing non-additive utility for multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research*, 3(158), 734–744.

Beuthe, M. Scannella, G. (2001). Comparative analysis of UTA multi-criteria methods. *European Journal of Operational Research*, (130), 246-262.

Despotis, D.K., Zopounidis, C. (1993). *Building additive utilities in the presence of non-monotonic.: Building additive utilities in the presence of non-monotonic preference. In: Pardalos*, P.M.,

Siskos, Y, Zopounidis, C. (eds.) Advances in Multicriteria Analysis, 101–114. Kluwer Academic, Dordrecht.

Eberhard, A., Schreider, S., & Stojkov, L. (2007). Construction of the utility function using a non-linear best fit optimisation approach In Proceedings of the International congress on modelling and simulation MODSIM07. *Christchurch*, 10–14, December 2007.

Figueira, J., Salvatore, G., & Matthias, E. (2005). *Multiple Criteria Decision Analysis*. Springer, New York, NY.

Figueira, J. R, Greco, S., & Słowinski, R. (2009). Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method. *European Journal of Operational Research*, (195), 460–486.

Jacquet-Lagreze, E., Siskos, J. (1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. *European journal of operational research*, 10 (2), 151-164.

Mehregan, M. R. (2013), *Multiple Objective Decision Making Models*, University of Tehran Press, Tehran. (*in Persian*)

Nguyen, D.V. (2013). Global maximization of UTA functions in multi-objective optimization. *European Journal of Operational Research*, (228), 397–404.

Pachauri, B., Kumar, A., Dhar, J. (2014). Oftware reliability growth modeling with dynamic faults and release time optimization using GA and MAUT. *Applied Mathematics and Computation,* (242), 500–509.

Patiniotakis, I., Apostolou, D., Mentzas, G. (2011). Fuzzy UTASTAR: A method for discovering utility functions from fuzzy data. *Expert Systems with Applications*, (38), 15463–15474.

Salati, M., Makoui, A. (2015). Offer the value function (utility) to prioritize research projects in R & D centers using the UTA method (Case of Water Resources company in Iran). *Industrial Management Studies*, 11(31), 19-33. (*in Persian*)

Scholza, M., Franz, N., Hinz, O. (2017). Effects of decision space information on MAUT-based systems that support purchase decision processes. *Decision Support Systems*, (97), 43–57.

Shanmuganathan, M., Kajendran, K., Sasikumar, A.N., Mahendran, M. (2018). Multi Attribute Utility Theory – An Over View. *International Journal of Scientific & Engineering Research,* 9(3), 698-706.

Siskos, J. (1983). Analyse de systèmes de décision multicritère en univers aléatoire. *Control Eng.* 10(3–4), 193–212.

Siskos, Y., & Jacquet, L. (1982). Assessing a set of additive utility functions for multi criteria decision making, The UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10(2), 151–164.

Siskos, Y., Yannacopoulos, D. (1985). UTASTAR: An ordinal regression method for building additive value functions. *Investigaçao Operacional*, 5 (1), 39-53.

Siskos, Y., Grigoroudis, E. & Matsatsinis, N.F. (2016). UTA methods. *Multiple criteria decision analysis*, pp. 315-362. Springer, New York, NY.

Sorourkhah, A., Azar, A., Babaie-Kafaki, S., Shafiei Nik Abadi, M. (2017). Using Weighted-Robustness Analysis in Strategy Selection (Case Study: Saipa Automotive Research and Innovation Center). *Industrial Management Journal*, 9(4), 665-690. (*in Persian*)