تحقیقات مالی
Journal of Financial Research
دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
DOI: 10.22059/jfr.2017.132312.1006053
دورهٔ ۱۹، شمارهٔ ۱
بهار ۱۳۹۶
صص. ۱۷۲- ۱۵۷

بهینه‌سازی بازه‌ای سبد سهام با سنجهٔ ریسک ارزش در معرض خطر مشروط

امیرعباس نجفی[۱]، کبری نوپور[۲]، علیرضا قهطرانی[۳]

چکیده: در این نوشتار مسئلهٔ انتخاب سبد مالی با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی بازه‌ای بررسی شده است. بدین منظور ارزش در معرض خطر مشروط که زیان انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین شده را برآورد می‌کند، معیاری برای برآورد ریسک در نظر گرفته شده است. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط، باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. توسعهٔ صورت‌گرفته در این مدل، در نظر گرفتن بازده‌های انتظاری به شکل بازه‌ای است؛ به همین دلیل از رویکرد بهینه‌سازی بازه‌ای استفاده می‌شود. بهینه‌سازی بازه‌ای برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌هاست. این رویکرد مدل‌های قطعی را به دنیای واقعی نزدیک‌تر می‌کند، درواقع به‌کمک این مدل می‌توان در بدترین حالت نوسان بازار سهام، به بهترین جواب رسید نتایج حل این مدل نشان‌دهندهٔ کارایی رویکردی است که در این پژوهش پیشنهاد شده است.

واژه‌های کلیدی: ***ارزش در معرض خطر مشروط، برنامه‌ریزی خطی، بهینه‌سازی بازه‌ای، سبد مالی.***

۱. دانشیار گروه مهندسی مالی، دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
۲. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشکدهٔ مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
۳. دانشجوی دکترای مهندسی صنایع، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۰۶/۲۸
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۱۱/۲۳
نویسندهٔ مسئول مقاله: کبری نوپور
E-mail: knopour@mail.kntu.ac.ir

مقدمه

مسئلۀ انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، مدلی برای برقراری تعادل بین ریسک و بازده است. این مسئله شامل مجموعه‌ای از اوراق بهادار است که در آن تلاش می‌شود نسبت سرمایه‌گذاری در هر یک به نحوی تعیین شود که ریسک سرمایه‌گذاری کمینه شده و بازده سرمایه‌گذاری بیشینه شود. مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را نخستین‌بار مارکویتز (۱۹۵۲) ارائه کرد و در آن، واریانس سبد احتمالی را سنجۀ ریسک[۱] در نظر گرفت. استفاده از این سنجه با محدودیت‌هایی، نظیر لزوم وجود توزیع نرمال برای داده‌های بازده سهام همراه است. مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن واریانس به‌عنوان سنجۀ ریسک، یک مدل برنامه‌ریزی درجۀ دوم و غیرخطی است و در اندازه‌های واقعی محاسبۀ ماتریس واریانس و کوواریانس، کار سخت و زمان‌بری است. از طرف دیگر، نمی‌توان به‌طور قطعی تابع توزیع بازده انتظاری سهام را نرمال دانست؛ درنتیجه باید گفت مدل مارکویتز در عمل ضعف‌هایی دارد. برای غلبه بر این مشکلات، محققان برای توسعۀ سایر سنجه‌های ریسک تلاش کردند. در همین رابطه، سنجه‌های ریسک مختلفی در مدل انتخاب سبد سهام توسعه داده شده است که علاوه‌بر کارایی زیاد، در دنیای واقعی نیز به‌صورت برنامه‌ریزی خطی هستند و از لحاظ محاسباتی نوعی مزیت محسوب می‌شود. از جمله مدل‌های خطی سبد سرمایه‌گذاری، می‌توان به مدل میانگین قدر مطلق انحرافات[۲] اشاره کرد. در اواسط دهۀ ۹۰ میلادی، ارزش در معرض خطر[۳] به‌عنوان سنجۀ جدید ریسک معرفی شد که عبارت است از: بیشترین زیان مورد انتظار در زمان معین و با سطح اطمینان معین. این سنجه به لحاظ ریاضی ویژگی‌های نامطلوبی دارد که از آن جمله می‌توان به عدم تحدب اشاره کرد که برای غلبه بر این خصوصیات نامطلوب، سنجۀ ارزش در معرض خطر مشروط[۴] معرفی شد. بر اساس نتایج برخی مطالعات، ارزش در معرض خطر مشروط را می‌توان بدون نیاز به تعیین قبلی ارزش در معرض خطر مربوط به آن به‌دست آورد؛ این مدل معمولاً به برنامه‌ریزی محدب و گاهی به برنامه‌ریزی خطی منجر می‌شود. در این تحقیق نیز تلاش می‌شود از این سنجۀ ریسک استفاده شود.

در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل‌های ریاضی صورت گرفته است. یکی از راه‌ها برای در نظر گرفتن عدم قطعیت این است که پارامترها و اعداد غیرقطعی را به‌صورت بازه‌ای در نظر گرفت. یک بازه می‌تواند عدم قطعیت را در حدهای بالا و

1. Risk Measur
2. Mean Absolute Deviation
3. Value at Risk
4. Conditional Value at Risk

پایین تعیین کند. مزیت اصلی تکنیک‌های بازه‌ای این است که تنها به محاسبۀ حدود بازه‌هایی می‌پردازند که این حدود عدم قطعیت را مشخص می‌کند (لی و همکاران، ۲۰۰۲). در نوشتار حاضر، مدل بهینه‌سازی بازه‌ای میانگین ـ ارزش در معرض خطر مشروط برای سرمایه‌گذاری تک‌دوره‌ای توسعه داده شده است. در این مدل، سنجۀ ریسک با استفاده از رویکرد ارزش در معرض خطر مشروط محاسبه شده و بازده دارایی‌های مالی به‌صورت غیرقطعی فرض می‌شود. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها در مدل، از رویکرد برنامه‌ریزی بازه‌ای استفاده شده است. مسئلۀ میانگین ـ ارزش در معرض خطر مشروط، نوعی مسئلۀ برنامه‌ریزی خطی است که به فرض نرمال بودن داده‌ها نیاز ندارد و ریسک مقادیر کمتر از بازده انتظاری را محاسبه می‌کند (کانداسمی، ۲۰۰۸). در این نوشتار برای اولین‌بار این سنجۀ ریسک از طریق رویکرد بهینه‌سازی توسعه داده شده است.

در بخش بعدی، به‌طور خلاصه پیشینۀ نظری و مطالعات تجربی صورت‌گرفته در زمینۀ بهینه سازی بازه‌ای و ارزش در معرض خطر مشروط، بررسی می‌شود. بخش سوم به روش‌شناسی تحقیق اختصاص داده شده است که شامل ارائۀ مدل نهایی بهینه‌سازی بازه‌ای سبد سهام با استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط است و در ادامه، یافته‌های تجربی مطالعۀ حاضر بررسی و تحلیل می‌شود. در بخش پایانی نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادها ارائه خواهد شد.

پیشینۀ نظری پژوهش

مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز هستۀ اصلی پژوهش‌های بسیاری بوده است، اما به‌دلیل غیرخطی بودن، ضعف‌هایی دارد. به همین دلیل پژوهشگران برای توسعۀ سایر سنجه‌های ریسک تلاش کردند که یکی از این سنجه‌ها ارزش در معرض خطر مشروط است که توسط راکفلر و اوریاسو (۲۰۰۰) معرفی شد.

مدل CVaR

ارزش در معرض خطر مشروط، زیان انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین‌شده را برآورد می‌کند. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط، باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. این مدل (CVaR) که توسط کانداسمی (۲۰۰۸) ارائه شده، به‌صورت زیر است:

اگر $f(x,\varepsilon)$ تابع زیان یک سبد سهام باشد و α یک سطح اطمینان باشد، در این صورت CVaR متوسط $(1-\alpha)$ درصد زیان‌هاست.

رابطهٔ ۱) $CVaR_\alpha(x,\eta) = \eta + (1-\alpha)^{-1}\int_{\varepsilon\varepsilon R^n}[f(x,\varepsilon)-\eta]^+ P(\varepsilon)d\varepsilon$

رابطهٔ ۲) $\eta: VaR$

رابطهٔ ۳) ε: متغیر تصادفی

رابطهٔ ۴) $Z^+ = max\{z,0\}$

مدل میانگین ـ ارزش در معرض خطر مشروط، به‌کمک یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

در مدل زیر r_{ij} بازده سهم jام در دورهٔ iام؛ η ارزش در معرض خطر مشروط و یکی از متغیرهای مسئله؛ x_j درصد سرمایه‌گذاری در سهم jام؛ E_0 حداقل بازده مورد انتظار و μ میانگین بازده انتظاری در سهم jام است. مسئله تلاش می‌کند میانگین مقادیر بدتر از $(1-\alpha)$ درصد را محاسبه کند. مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود که در آن هدف از تابع هدف، حداقل کردن زیان‌های بیشتر یا مساوی از ارزش در معرض خطر است. رابطهٔ ۶ متغیر y_i در تابع هدف را تعریف می‌کند که مجموع تفاوت بین زیان‌ها و ارزش در معرض خطر را نشان می‌دهد. رابطهٔ ۸ نشان می‌دهد مجموع درصد سرمایه‌گذاری هر سهم، ضرب‌در میانگین بازده انتظاری هر سهم، برابر با حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار است. رابطهٔ ۹ نشان می‌دهد مجموع درصد سرمایه‌گذاری در کل سهم‌ها برابر با ۱ است:

رابطهٔ ۵) $\min \eta + \frac{1}{(1-\alpha)s}\sum_{i=1}^{s}(y_i)$

رابطهٔ ۶) S.t

$y_i \geq \sum_{j=1}^{n}\left[(-r_{ij})-\eta\right] \quad i=1,2,\dots,s$

رابطهٔ ۷) $y_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,s$

رابطهٔ ۸) $x'\mu = E_0$

رابطهٔ ۹) $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$

رابطهٔ ۱۰) $x \geq 0$

اگر یک سناریو زیان، بزرگ‌تر از ارزش در معرض خطر باشد، y دقیقاً مقداری برابر با تفـاوت بین η و سناریوی زیان را می‌گیرد. همچنین، اگر یک سناریو زیان مقداری کمتر از η که همـان ارزش در معرض خطر است بگیرد، در این صورت داریم:

$y \geq$ عدد منفی   رابطهٔ ۱۱)

$y \geq 0$ رابطهٔ ۱۲)

و چون از بین دو محدودیت فوق، محدودیت اول زائد است، $y \geq 0$ مـی‌شـود و چـون تـابع هدف به دنبال کمترین مجموع مقادیر y_i است، y مربوط به آن سناریو صفر می‌شود.

مسئلهٔ میانگین ـ ارزش در معرض خطر مشروط، نوعی مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی است که بـه فرض نرمال بودن داده‌ها نیازی ندارد و ریسک مقادیر کمتر از میانگین بازده انتظاری را محاسـبه می‌کند.

بهینه‌سازی بازه‌ای

مجموعهٔ اعداد حقیقی با R نشان داده می‌شود. یک زوج مرتب در کروشه یک بازه را بـه‌صـورت زیر تعریف می‌کند:

$a = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x: \underline{a} \leq x \leq \overline{a}, x \in R\}$ رابطهٔ ۱۳)

که $\underline{a}$ حد چپ و $\overline{a}$ حد راست بازهٔ a است. توسعهٔ حساب عادی بـه بـازه‌ای، حسـاب بـازه‌ای نامیده می‌شود. ابتدا مفاهیم اصلی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱. فرض کنید $\circ \in \{+,-,\times,\div\}$ یک عمل دودویـی در R باشـد. اگـر a و b دو بـازه باشند، پس:

$a \circ b = \{x \circ y : x \in a, y \in b\}$ رابطهٔ ۱۴)

یک عمل دودویی روی مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها تعریف می‌شود. در مورد تقسیم همیشـه فـرض می‌شود $0 \notin b$.

عملیات بازه‌ای استفاده‌شده در این نوشتار به‌صورت زیر است:

$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$ رابطهٔ ۱۵)

$a - b = [\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}]$ رابطهٔ ۱۶)

رابطهٔ ۱۷)
$$ka = \begin{cases} [k\underline{a}, k\overline{a}] & k \geq 0 \\ [k\overline{a}, k\underline{a}] & k \leq 0 \end{cases}$$

که k یک عدد حقیقی است. یک بازه می‌تواند نوع خاصی از عدد فازی در نظر گرفته شود که در آن بازه، تابع عضویت مقدار ۱ و در خارج از بازه مقدار صفر می‌گیرد. راملفنگر، هنسچک و ولف (۱۹۸۹) مسئلهٔ برنامه‌ریزی بازه‌ای را در قالب یک مسئلهٔ فازی بررسی کردند. تعریف زیر برای مدل‌سازی برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای استفاده خواهد شد.

تعریف ۲. فرض کنید $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ و $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ دو بازه باشند. دو رابطهٔ ترتیب[1] $\preccurlyeq_1$ و $\preccurlyeq_2$ بین بازه‌های a وb به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

رابطهٔ ۱۸) $(\text{i}) a \preccurlyeq_1 b$ اگر و فقط اگر $\underline{a} \leq \underline{b}$ و $\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2} \leq \frac{\underline{b}+\overline{b}}{2}$

رابطهٔ ۱۹) $a \prec_1 b$ اگر و فقط اگر $a \preccurlyeq_1 \underline{b}$ و $a \neq b$

رابطهٔ ۲۰) $(\text{ii}) a \preccurlyeq_2 b$ اگر و فقط اگر $\overline{a} \leq \overline{b}$ و $\frac{\underline{a}+\overline{a}}{2} \leq \frac{\underline{b}+\overline{b}}{2}$

رابطهٔ ۲۱) $a \prec_2 b$ اگر و فقط اگر $a \preccurlyeq_2 \underline{b}$ و $a \neq b$

مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP)[2] را در نظر بگیرید:

رابطهٔ ۲۲)
رابطهٔ ۲۳)
$$(\text{ILP}) \begin{cases} \min \succcurlyeq_1 Z(x) = \sum_{j=1}^{n} [\underline{C}_j, \overline{C}_j] x_j \\ S.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] x_j \preccurlyeq_2 [\underline{b}_i, \overline{b}_i] & i = 1,2,\dots,m \\ x_j \geq 0, & j = 1,2,\dots,n \end{cases} \end{cases}$$

ضرایب بازه‌ای در تابع هدف و محدودیت عدم قطعیت را نشان می‌دهد.

تعریف ۳. یک ناحیهٔ شدنی x یک حل مرغوب (ILP) است، اگر و فقط اگر ناحیه شدنی x' دیگری وجود نداشته باشد.

رابطهٔ ۲۴) $Z(x') \prec_1 Z(x)$

واضح است که مرکز بازه مقدار انتظاری متغیر خاص فازی است. وقتی یک بازه بازده غیرقطعی را نشان می‌دهد، بازده بدبینانه با حد چپ بازه نشان داده می‌شود؛ وقتی یک بازه هزینهٔ

1. Order Relation
2. Interval Linear Programming

غیرقطعی را نشان می‌دهد، در حالت بدبینانه، هزینه با حد راست بازه نشان داده می‌شود. مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای قبل می‌تواند ترکیب مدل مقدار انتظاری فازی و مدل تصمیم‌گیری بدبینانه در نظر گرفته شود[۱].

با تعریف ۲ مجموعهٔ حل مرغوب (ILP) معادل با مجموعهٔ حل مرغوب مسئلهٔ دو هدفهٔ زیر است.

رابطهٔ ۲۵)
رابطهٔ ۲۶)
رابطهٔ ۲۷)

$$\begin{cases} \left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{c}_j+\overline{c}_j}{2} x_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j\right\} \\ S.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \le \overline{b}_i \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{(\underline{a}_{ij}+\overline{a}_{ij})x_j}{2} \le \frac{\underline{b}_i+\overline{b}_i}{2} \\ i = 1,2,\dots,m \qquad , \qquad j = 1,2,\dots,n \end{cases} \end{cases}$$

رابطهٔ ۲۸)

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{C}_j+\overline{C}_j}{2} x_j + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j x_j$$

از حل مسئله با برنامه‌ریزی خطی، پارامتری به‌دست می‌آید که تابع هدف آن به‌صورت بالا نشان داده شده و $\lambda \in (0,1)$ یک پارامتر است. از آنچه بیان شد، واضح است که حل مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ILP) از حل مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی پارامتری به‌دست می‌آید. الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی، همانند روش سیمپلکس می‌توانند استفادهٔ کارایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی داشته باشند.

پیشینهٔ تجربی

مزیت اصلی تکنیک‌های بازه‌ای برای استفاده این است که تنها به محاسبهٔ حدود بازه‌هایی می‌پردازد که این حدود عدم قطعیت را مشخص می‌کند. رویکردهای متفاوتی برای حل مسائل بهینه‌سازی بازه‌ای وجود دارد. برخی روش‌ها ضمانت می‌کنند که مجموعهٔ راه‌حل‌های بهینه تمام احتمالات را پوشش می‌دهند که می‌توان به رویکرد جانسون و رامپ (۱۹۹۱)، لیو و وانگ (۲۰۰۷) و هدیک (۲۰۰۹) اشاره کرد و برخی دیگر، تقریب‌هایی به حل می‌دهند که ایشیبوچی و تاناکا (۱۹۹۰)، تانگ (۱۹۹۴)، سنگوپتا، پال و چاکرابرتی (۲۰۰۱) و جیانگ، هان و لیو (۲۰۰۸) از آن استفاده کرده‌اند.

---

۱. برای اطلاع از جزییات بیشتر دربارهٔ مدل مقدار انتظاری فازی و مفهوم مقدار بدبینانهٔ متغیرهای فازی، به لیو (۱۹۹۸) مراجعه کنید.

ایشیبوچی و تاناکا (۱۹۹۰) مسئلهٔ بهینه‌سازی مقید با تابع هدف بازه‌ای را در نظر گرفتند و آن را با تبدیل به مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفه حل کردند. در روش آنها مجموعهٔ راه‌حل بهینهٔ پارتو به‌عنوان بهترین راه‌حل با توجه به ترجیح تصمیم‌گیرنده تعریف شده است. رویکرد بازه‌ای با به‌دست آوردن حل دقیق مسئلهٔ بهینه‌سازی برنامه‌ریزی خطی با داده‌های غیرقطعی توسط جانسون و رامپ (۱۹۹۱) ارائه شده است. در این مورد مجموعهٔ راه‌حل‌های بهینه، خطای حدود را بسیار دقیق تعریف می‌کند. همچنین این روش امکان آنالیز حساسیت را هم فراهم می‌آورد.

تانگ (۱۹۹۴) تکنیکی[1] برای حل مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی در دو رویکرد پیشنهاد کرد. وی در رویکرد اول، اعداد بازه‌ای را ضرایب تابع هدف و محدودیت‌های مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی در نظر گرفت و در رویکرد دوم، از اعداد فازی به‌عنوان ضرایب استفاده کرد. همچنین سوپراجینتو و بین مهد (۲۰۱۰) مدل خطی بازه‌ای ارائه دادند و از روش سیمپلکس اصلاح‌شده برای حل مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای استفاده کردند. الله‌دادی و نهی (۲۰۱۲) برای تعیین راه‌حل بهینهٔ مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی، بازه‌ای با استفاده از روش‌های بهترین و بدترین[2] ارائه دادند. هرچند بیشتر تکنیک‌ها فقط به مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی با محدودیت‌های نامساوی محدود شده‌اند؛ در نظر گرفتن ساختار غیرخطی برای فرمول‌بندی مسائل مهندسی، مالی یا تصمیم‌گیری، بدیهی است. لیو و وانگ (۲۰۰۷) روش حلی برای مسئلهٔ برنامه‌ریزی درجهٔ دوم با ضرایب بازه‌ای معرفی کردند. ضرایب بخش خطی تابع هدف و محدودیت‌ها و پارامترهای مورد نیاز محدودیت‌ها به‌صورت پارامترهای غیردقیق و بازه‌ای نشان داده شده‌اند. اگرچه بخش درجهٔ دوم تابع هدف از غیردقیق بودن آزاد است؛ مسئله به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی دوسطحی تبدیل می‌شود و قضیهٔ دوگان و تکنیک تغییر متغیر به‌کار می‌رود و برنامه‌ریزی ریاضی دوسطحی به مسئلهٔ برنامه‌ریزی درجهٔ دوم یک سطحی مرسوم تبدیل می‌شود. همچنین کارماکار و بونیا (۲۰۱۲) روش جایگزینی برای مسئلهٔ بهینه‌سازی مقید با تابع هدف بازه‌ای پیشنهاد کردند. آنها ابتدا مسئلهٔ بازه‌ای را به مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفه کاهش دادند، سپس مسئلهٔ کاهش داده‌شده را با روش معیار جهانی[3] برای به‌دست آوردن راه‌حل بهینهٔ پارتو حل کردند.

یکی از ویژگی‌های مهم مدل‌های سبد مالی، عدم قطعیت داده‌های آن است. از این رو، تلاش‌های بسیاری برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل سبد مالی صورت گرفته است. پارا، ترو و اوریا (۲۰۰۱) یک مدل برای مسئلهٔ انتخاب سبد سهام ارائه دادند که در آن سه معیار بازده، ریسک و نقدینگی به شکل بازه‌ای در نظر گرفته شده است. لی و همکاران (۲۰۰۲) یک مدل

1. Technique
2. Best Worst Criteria
3. Global Criterion Method

برنامه‌ریزی بازه‌ای انتخاب سبد سهام ارائه دادند که در آن بازده انتظاری و کوواریانس به‌صورت بازه‌ای بودند. آیدا (۲۰۰۳ و ۲۰۰۴) نیز یک مسئلهٔ انتخاب سبد سهام چندهدفه با ضرایب بازه‌ای را بررسی کرد. گیو، فناری و ناردلی (۲۰۰۶) یک مسئلهٔ انتخاب سبد سهام در نظر گرفتند که در آن قیمت اوراق بهادار معامله شده به‌صورت بازه‌ای است. بتچریا، کار و مجامدر (۲۰۱۱) مدل کلاسیک میانگین ـ واریانس انتخاب سبد سهام را با در نظر گرفتن هزینهٔ معاملاتی و با استفاده از آنالیز بازه‌ای، به مدل میانگین ـ واریانس ـ نامتقارن توسعه دادند. لی و ژو (۲۰۰۷) در مدل انتخاب سبد سهام، مقادیر مرکز بازه‌ها را در نظر گرفتند. لیو (۱۹۹۸) مدل انتخاب سبد سهام بازه‌ای را بررسی کرد که در آن بازدهٔ دارایی‌ها با اعداد بازه‌ای نشان داده شده است. در مدل‌های قبلی سبد سهام، اغلب واریانس به‌عنوان سنجهٔ ریسک در نظر گرفته شده است، اما در این پژوهش ارزش در معرض خطر مشروط به‌عنوان سنجهٔ ریسک جدید و منسجم در مدل‌سازی بهینه‌سازی سبد سهام با رویکرد بازه‌ای به‌کار گرفته می‌شود.

روش‌شناسی پژوهش

در این مقاله مدل سبد سهام با سنجهٔ ریسک CVaR که بازده انتظاری به‌صورت بازه‌ای در نظر گرفته شده است، ارائه می‌شود. روش بازه‌ای در این پژوهش، رویکرد لی و همکارانش (۲۰۰۲) است که در بخش قبل توضیح داده شده است. برای به‌دست آوردن حدود بازده انتظاری از رویکرد جانگ (۲۰۱۲) استفاده می‌شود که به‌پیش بینی بازده انتظاری سهام نیز احتیاج دارد. برای پیش‌بینی بازده از روش پیش‌بینی CAPM استفاده می‌شود.

فرمول اصلی مدل CAPM که رابطهٔ بین ریسک و بازدهی مورد انتظار را نشان می‌دهد در قالب رابطهٔ ۲۹ نشان داده شده است:

$$K_e = R_f + \beta\left(R_m - R_f\right) \qquad \text{(۲۹ رابطهٔ)}$$

در این رابطه، K_e بازده مورد انتظار سهامداران؛ R_f بازده بدون ریسک و R_m بازده بازار است.

در روش CAPM به بازده بازار نیاز است و برای به‌دست آوردن بازده بازار از بازده شاخص S&P500 استفاده می‌شود. برای پیش‌بینی شاخص روش Grey به‌کار می‌رود و در نهایت مدل بازه‌ای سبد سهام با سنجهٔ ریسک CVaR با داده‌های واقعی حل می‌شود و با حالت قطعی مقایسه شده و مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌گیرد.

روش Grey به‌صورت زیر است:

مدل پیش‌بینی خطی دینامیک GM(1.1) تک‌متغیره برای پیش‌بینی شاخص قیمت آتی به‌کار می‌رود.

فرض کنید سری داده‌ها به‌صورت رابطهٔ ۳۰ باشد:

رابطهٔ ۳۰) $$x_0(k) = \left(x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\right)$$

جمع تجمعی داده‌ها به‌صورت زیر است:

رابطهٔ ۳۱) $$x_1(k) = \left(x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)\right)$$

رابطهٔ ۳۲) $$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n$$

رابطهٔ ۳۳) $$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(x_1(1) + x_1(2)\right) & 1 \\ -\frac{1}{2}\left(x_1(2) + x_1(3)\right) & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}\left(x_1(n-1) + x_1(n)\right) & 1 \end{bmatrix}$$

رابطهٔ ۳۴) $$Y_n = [x_0(2)\ x_0(3)\ \dots .\ x_0(n)]^T$$

رابطهٔ ۳۵) $$\hat{x}_1(t+1) = \left(x_0(1) - \frac{u}{a}\right) e^{-at} + \frac{u}{a}$$

مدل‌سازی بازه‌ای مسئله انتخاب سبد سهام با استفاده از سنجهٔ ریسک ارزش در معرض خطر مشروط

در این بخش به تشریح توسعهٔ مدل CVaR پرداخته می‌شود. در این پـژوهش عـدم قطعیـت در مدل ارائه‌شدهٔ سبد سهام با سنجهٔ ریسک CvaR (کانداسمی، ۲۰۰۸) و با رویکـرد بهینـه‌سـازی بازه‌ای در نظر گرفته شده است. ارزش در معرض خطر، حداکثر زیان ممکـن در سـطح اطمینـان معین را برآورد می‌کند. در مدل‌سازی کلاسـیک ایـن مسـئله، داده‌هـا بـه‌صـورت قطعـی فـرض می‌شوند. برای نزدیک‌تر شدن مـدل مسـئله بـه دنیـای واقعـی، بایـد عـدم قطعیـت داده‌هـا در مدل‌سازی مسئله لحاظ شود. برای این کار مهم، از رویکرد برنامه‌ریزی بازه‌ای استفاده شده است.

در مدل قطعی ارائه‌شده، میانگین حسابی بازده‌های تاریخی بـه‌عنـوان بـازده انتظـاری اوراق بهادار در نظر گرفته شده است؛ بنابراین در این روش بازده انتظاری اوراق بهادار یک عدد قطعـی است؛ اگرچه برای این تکنیک باید دو مسئلهٔ مهم حل شود:

۱. اگر افق زمانی داده‌های تاریخی اوراق بهـادار خیلـی طـولانی اسـت، تـأثیر داده‌هـای تاریخی ابتدایی همانند داده‌های اخیر است. اگرچه داده‌هـای اخیـر اوراق بهـادار اغلـب

نشان می‌دهد عملکرد یک شرکت به داده‌های اخیر نسبت به داده‌های تاریخی ابتدایی نزدیک‌تر و مهم‌تر است.

۲. اگر داده‌های تاریخی اوراق بهادار به‌اندازۀ کافی نباشد، نمی‌توان به‌طور دقیق پارامترهای آماری را طبق داده‌های کم تخمین زد.

با در نظر گرفتن این دو مسئله، شاید نظر خوبی باشد که بازده انتظاری اوراق بهادار به‌صورت عدد بازه‌ای در نظر گرفته شود (جانگ، ۲۰۱۲).

برای تعیین حدود تغییر در بازده انتظاری اوراق بهادار سه فاکتور زیر در نظر گرفته شده است:

۱. میانگین حسابی (r_a): میانگین حسابی بازده‌های اوراق بهادار نباید مستقیماً به‌صورت بازده‌های انتظاری استفاده شوند، اما تقریب خوبی هستند که از داده‌های تاریخی به‌دست می‌آیند و معمولاً به‌صورت سالیانه در نظر گرفته می‌شوند؛ زیرا سال مالی اغلب شرکت‌ها یک‌ساله است.

۲. گرایش بازده تاریخی (r_h): اگر بازده‌های اخیر اوراق بهادار افزایشی باشند، می‌توان باور داشت که بازده انتظاری اوراق بهادار بر مبنای داده‌های تاریخی از میانگین حسابی بیشتر است و برعکس. از میانگین بازده‌های اخیر می‌توان برای محاسبۀ این فاکتور استفاده کرد و در نظر گرفتن طول دورۀ زمانی آن بستگی دارد به اینکه سهم در چه مدتی از آخرین دوره، ثبات بیشتری داشته است.

۳. پیش‌بینی بازده آتی اوراق بهادار (r_f): تخمین r_f به‌پیش‌بینی‌هایی بر مبنای گزارش‌های مالی و تجربۀ شخص متخصصان بستگی دارد.

بنابراین بازده انتظاری غیرقطعی دارایی ریسکی $j(j = 1,2,\dots,n)$ با بازۀ عددی زیر نشان داده می‌شود:

$$\mu_j = \left[\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j\right] = \left[min\{r_{aj}, r_{hj}, r_{fj}\}, max\{r_{aj}, r_{hj}, r_{fj}\}\right]$$ رابطۀ ۳۶)

و با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی بازه‌ای در مدل میانگین ـ ارزش در معرض خطر مشروط تنها محدودیت ۸ به دو محدودیت زیر تبدیل می‌شود:

$$-\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\mu}_j \leq -E_0$$ رابطۀ ۳۷)

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j\left(\underline{\mu}_j + \overline{\mu}_j\right)}{2} \leq -E_0$$ رابطۀ ۳۸)

و درنهایت مدل ارزش در معرض خطر مشروط بازه‌ای به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

رابطۀ ۳۹) $\min \eta + \frac{1}{(1-\alpha)s}\sum_{i=1}^{s} y_i$

رابطۀ ۴۰) $y_i \geq \sum_{j=1}^{n}\left[\left(r_{ij}x_j\right) - \eta\right] \; j = 1,2,\dots,n$

رابطۀ ۴۱) $y_i \geq 0 \; i = 1,2,\dots,s$

رابطۀ ۴۲) $-\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\mu}_j \leq -E_0$

رابطۀ ۴۳) $-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j\left(\underline{\mu}_j+\overline{\mu}_j\right)}{2} \leq -E_0$

رابطۀ ۴۴) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

رابطۀ ۴۵) $x \geq 0$

حال یک مثال عددی برای بهینه‌سازی بازه‌ای مسئلۀ انتخاب سبد سهام با در نظر گرفتن ارزش در معرض خطر شرطی به‌عنوان سنجۀ ریسک ارائه شده و باحالت قطعی مقایسه خواهد شد. در این مثال ۲۵ سهم تحت شاخص S&P500 در سال ۲۰۱۴ به‌صورت تصادفی انتخاب شده و از بازده ماهانۀ این سهام برای تجزیه‌وتحلیل استفاده می‌شود. سطح اطمینان نیز ۵ درصد در نظر گرفته شده است. برای پیش‌بینی بازده آتی از روش CAPM استفاده می‌شود. برای به‌دست آوردن بازده بازار از بازده شاخص S&P500 و برای پیش‌بینی شاخصS&P500 ماه ژانویه ۲۰۱۵ از روش Grey (چی، چن و چنگ، ۲۰۰۱) استفاده می‌شود.

یافته‌های پژوهش

جدول ۱ پیش‌بینی شاخص S&P500 که با روش Grey به دست آمده است را نشان می‌دهد.

جدول ۱. پیش‌بینی شاخص S&P500 با روش Grey

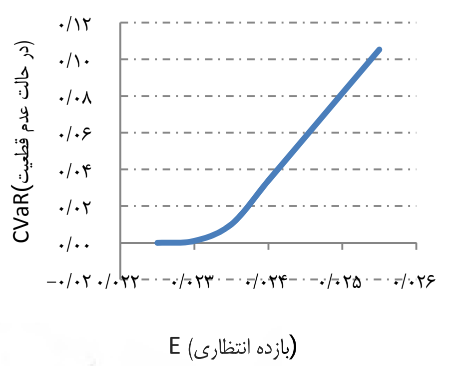
مقدار	تاریخ	مقدار	تاریخ
۱۸۴۸/۳۶	2-Dec-13	۱۹۳۰/۶۷	1-Jul-14
۱۷۸۲/۵۹	2-Jan-14	۲۰۰۳/۳۷	1-Aug-14
۱۸۵۹/۴۵	3-Feb-14	۱۹۷۲/۲۹	2-Sep-14
۱۸۷۲/۳۴	3-Mar-14	۲۰۱۸/۰۵	1-Oct-14
۱۸۸۳/۹۵	1-Apr-14	۲۰۶۷/۵۶	3-Nov-14
۱۹۲۳/۵۷	1-May-14	۲۰۰۵/۹۰.	1-Dec-14
۱۹۶۰/۲۳	2-Jun-14	۲۰۸۸/۵۱	مقدار پیش‌بینی شاخص

برای به‌دست آوردن بازده بازار از بازده شاخص S&P500 استفاده شد. بتای هر سهم نیـز از طریق رابطهٔ رگرسیونی بین بازده بازار و بازده سهم به‌دست آمد و نرخ بهرهٔ بـدون ریسـک، نـرخ بهرهٔ اوراق خزانهٔ آمریکا در نظر گرفته شد و درنهایت بازده مورد انتظار سهامداران به‌دست آمد.

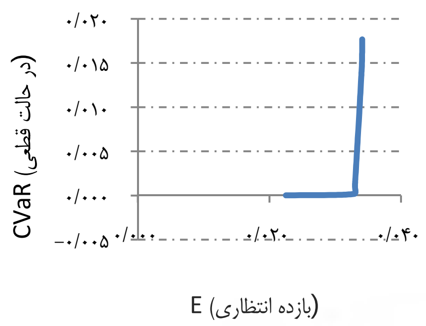
جدول ۲. استفاده از روش CAPM برای تعیین بازه

سهم	مقدار پیش‌بینی با روش CAPM	میانگین کل	میانگین ٦ ماه	حد پایین	حد بالا
۱	۰/۰۱۶۲	۰/۰۱۶۱	۰/۰۲۵۶	۰/۰۱۶۱	۰/۰۲۵۶
۲	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۸۱	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۸۱
۳	۰/۰۱۳۵	۰/۰۰۹۴	۰/۰۱۹۳	۰/۰۰۹۴	۰/۰۱۹۳
۴	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۴۵	۰/۰۱۱۲	۰/۰۰۴۵	۰/۰۱۵۰
۵	۰/۰۲۱۴	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵۰	۰/۰۲۱۴
۶	۰/۰۱۴۹	۰/۰۲۵۹	۰/۰۳۱۷	۰/۰۱۴۹	۰/۰۳۱۷
۷	۰/۰۱۸۱	-۰/۰۱۸۳	-۰/۰۰۴۹	-۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۸۱
۸	۰/۰۱۳۱	۰/۰۲۶۳	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۳۱	۰/۰۲۶۳
۹	۰/۰۱۵۶	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۵۹	۰/۰۱۵۶
۱۰	۰/۰۱۶۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۶	۰/۰۱۶۹
۱۱	۰/۰۱۸۵	۰/۰۳۰۸	۰/۰۳۲۵	۰/۰۱۸۵	۰/۰۳۲۵
۱۲	۰/۰۱۳۷	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۶۰
۱۳	۰/۰۱۰۴	۰/۰۲۲۰	۰/۰۲۴۵	۰/۰۱۰۴	۰/۰۲۴۵
۱۴	۰/۰۱۰۸	-۰/۰۲۸۱	-۰/۰۵۶۹	-۰/۰۵۶۹	۰/۰۱۰۸
۱۵	۰/۰۱۵۷	۰/۰۲۲۰	۰/۰۳۰۶	۰/۰۱۵۷	۰/۰۳۰۶
۱۶	۰/۰۱۶۲	-۰/۰۰۰۷	۰/۰۴۸۹	-۰/۰۰۰۷	۰/۰۴۸۹
۱۷	۰/۰۱۴۵	۰/۰۲۰۸	۰/۰۳۰۰	۰/۰۱۴۵	۰/۰۳۰۰
۱۸	۰/۰۰۹۱	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۹۱	۰/۰۱۸۹
۱۹	۰/۰۱۵۹	۰/۰۱۳۱	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۶۷	۰/۰۱۵۹
۲۰	۰/۰۱۶۲	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۶۷	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۱۶۲
۲۱	۰/۰۱۸۷	۰/۰۰۱۷	-۰/۰۲۴۷	-۰/۰۲۴۷	۰/۰۱۸۷
۲۲	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۹۹
۲۳	۰/۰۱۲۲	۰/۰۳۴۱	۰/۰۲۷۱	۰/۰۱۲۲	۰/۰۳۴۱
۲۴	۰/۰۱۶۳	۰/۰۱۵۲	-۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۸۵	۰/۰۱۶۳
۲۵	۰/۰۱۶۰	۰/۰۰۸۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۶۰

در ادامه نمودارهای زیر برای تغییرات تابع هدف در مقابل تغییرات بـازده انتظـاری در حالـت قطعیت و عدم قطعیت نشان داده شد.



شکل ۱. نمودار مقدار تابع هدف در مقابل تغییرات بازده انتظاری در حالت وجود عدم قطعیت



شکل ۲. نمودار مقدار تابع هدف در مقابل تغییرات بازده انتظاری در حالت قطعیت

جدول ۳. مقدار CVaR در حالت عدم قطعیت و حالت قطعی و بازده مورد انتظار

E(بازده انتظاری)	CVaRدر حالت در نظر گرفتن عدم قطعیت	CvaR در حالت قطعی
۰/۰۲۲۵	۰	۰
۰/۰۲۳	۰/۰۰۱	۰
۰/۰۲۳۵	۰/۰۱۰۱	۰
۰/۰۲۴	۰/۰۳۳۹	۰
۰/۰۲۴۵	۰/۰۵۷۷	۰
۰/۰۲۵	۰/۰۸۱۵	۰
۰/۰۲۵۵	۰/۱۰۵۳	۰

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این نوشتار ضمن بررسی مسئلۀ انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با رویکرد ارزش در معـرض خطـر شرطی با در نظر گرفتن عدم قطعیت به مقایسۀ آن بـا حالـت قطعـی اقـدام شـده اسـت. بـرای مدیریت عدم قطعیت در بازارهای مالی با سنجۀ ریسک جدید، از رویکرد بازه‌ای استفاده کردیم و همچنین با مثال عددی، کارایی روش پیشنهادی را نشان دادیم. بر اساس نتـایج، روش پیشـنهاد شده نسبت به حالت قطعی کارایی بیشتری دارد. در حالت عدم قطعیت محدودیت سخت‌گیرانه‌ای به مدل اضافه شد، بر همین اساس مقدار CVaR بیشتر از حالت قطعی به‌دست آمد. این موضوع

نیز قابل‌درک است که هر چه مقدار بازده مورد انتظار افزایش یابد، مقدار ریسک (CVaR) نیز افزایش می‌یابد و نتایج نیز این موضوع را تأیید می‌کند. درواقع وقتی تصمیم‌گیرنده اطمینان کمتری به بازار دارد و احتمال می‌دهد بازار دچار نوسان شود، می‌تواند از مدل ارائه‌شده در این تحقیق استفاده کند. مدل ارائه‌شده بهترین جواب ممکن را در بدترین حالت نوسان داده‌ها ارائه می‌کند و همچنین به‌دلیل خطی بودن و نزدیک به واقعیت بودن، از حالت قطعی کارایی بیشتری دارد. برای توسعهٔ این تحقیق می‌توان سنجهٔ ریسک CDAR که نشان‌دهندهٔ میزان سقوط ارزش یک سبد سهام از حداکثر میزانی که در طول دوره داشته است، استفاده کرد. همچنین مدل را می‌توان با محدودیت‌های کاردینالیتی حل کرد. محدودیت‌های کاردینالیتی شامل دو نوع محدودیت هستند: یکی حداکثر تعداد انواع دارایی‌ها در پرتفولیوی نهایی را تعیین می‌کند و دیگری حدود بالا و پایین سرمایه‌گذاری مجاز روی هر یک از دارایی‌ها را مشخص می‌نماید.

فهرست منابع

Allahdadi, M. & Nehi, H.M. (2012). The optimal solution set of the interval linear programming. *Optimization Letters*, 7 (8), 1893-1911.

Bhattacharyya, R., Kar, S. & Majumder, D.D. (2011). Fuzzymean–variance–skewness portfolio selection models by interval analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(1), 126–137.

Chi, S.C., Chen, H.P. & Cheng, C.H. (2001). A Forecasting Approach for Stock Index Future Using Grey Theory and Neural Networks. *International Joint Conference on*. (10-16 July 1999) School of Management Science.

Giove, S., Funari, S. & Nardelli, C. (2006). An interval portfolio selection problem based on regret function. *European Journal of Operational Research*, 170(1), 253–264.

Hladìk, M. (2009). Optimal value range in interval linear programming. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8 (3), 283–294.

Ida, M. (2003). Portfolio selection problem with interval coefficients. *Applied Mathematics Letters*, 16(5), 709–713.

Ida, M. (2004). Solutions for the portfolio selection problem with interval and fuzzy coefficients. *Reliable Computing*, 10(5), 389 - 400.

Ishibuchi, H. & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 48 (2), 219–225.

Jansson, C. & Rump, S.M. (1991). Rigorous solution of linear programming problems with uncertain. *Data ZOR—Methods and Models of Operations Research*, 35(2), 87–111.

Jiang, C., Han, X., Liu, GR. & Liu, GP. (2008). A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 188(1), 1–13.

Jong, H. (2012). Optimization Method for Interval Portfolio Selection Based onMSatisfaction Index of Interval inequality Relation. *Center of Natural Science.* Available in: https://arxiv.org/abs/1207.1932.

Kandasamy, H. (2008). *Portfolio Selection under Various Risk Measures*. Ph.D. thesis. Mathematical Sciences. Clemson University.

Karmakar, S. & Bhunia, A.K. (2012c). On constrained optimization by interval arithmetic and interval order relations. *Opsearch,* 49(1), 22–38.

Lai, K.K., Wang, S.Y., Xu, J.P., Zhu, S.S. & Fang, Y. (2002). A class of linear interval programming problems and its application to portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(6), 698–704.

Li, J. & Xu, J.P. (2007). A class of possibilistic portfolio selection model with interval coefficients and its application. *Fuzzy Optimization Decision Making*, 6(2), 123–137.

Liu, B. & Iwamura, K. (1998). A note on chance constrained programming with fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and Systems,* 100(1-3), 229–233.

Liu, B. (1998). Minimax chance constrained programming models for fuzzy decision systems. *Information Sciences,* 112(1-4), 25–38.

Liu, S.T. & Wang, R.T. (2007). A numerical solution method to interval quadratic programming. *Applied Mathematics and Computation*, 189 (2), 1274–1281.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection.*the Journal of Financ*, 91(1), 7-77.

Parra, M.A., Terol, A.B. & Uría, M.V.R. (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research,* 133(2), 287–297.

Rockafellar, R.T. & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value at Risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21-41.

Rommelfanger, H., Hanscheck, R. & Wolf, J. (1989). Linear programming with fuzzy objectives. *Fuzzy Sets and Systems,* 29(1), 31–48.

Sengupta, A., Pal, T.K. & Chakraborty, D. (2001).Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(1), 129–138.

Suprajitno, H. & Bin Mohd, I. (2010). Linear programming with interval Arithmetic. *International Journal of Contemporary Mathematical Sci*ences, 5 (7), 323–332.

Tong, SC. (1994). Interval number and fuzzy number linear Programmings. *Fuzzy Sets and Systems,* 66(3), 301–306.