تحقیقات مالی
Journal of Financial Research

دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۱۸، شمارهٔ ۳
پاییز ۱۳۹۵
صص. ۴۳۶- ۴۱۵

تخصیص دارایی استوار بر اساس پیش‌بینی روش‌های اقتصادسنجی (ARMA و GARCH) و فرض عدم قطعیت بازده و کواریانس

رضا راعی[۱]، سید محمدامیر هاشمی[۲]

چکیده: در این پژوهش، برای بهینه‌سازی مسئلهٔ تخصیص دارایی، از رویکرد استوار با فرض عدم قطعیت پارامترهای بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها استفاده شده است. چنانچه عدم قطعیت پارامترهای ورودی، در محاسبات مسائل بهینه‌سازی لحاظ نشود، می‌تواند به خارج شدن جواب‌ها از منطقهٔ بهینگی و حتی شدنی منجر شود. در طراحی و تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها، به‌ترتیب از مفاهیم برآورد فاصله‌ای و بوت‌استرپ استفاده شده است. مبنای محاسبات مربوط به تعریف مجموعه‌های عدم قطعیت بر اساس پیش‌بینی‌های حاصل از مدل‌های اقتصادسنجی ARMA و GARCH است. به‌منظور اطمینان یافتن از برتری نتایج رویکرد استوار نسبت به رویکرد غیراستوار، شاخص شارپ پرتفوی استوار به‌عنوان معیار ارزیابی عملکرد پرتفو، با شاخص شارپ پرتفوی غیراستوار، به کمک آزمون مقایسهٔ جفتی طی ۸ دورهٔ متوالی سه ماهه قیاس شده است. نتایج آزمون نشان می‌دهد رویکرد استوار مدل مارکویتز نسبت به رویکرد غیراستوار، پرتفوی با شاخص شارپ بالاتر یا مساوی آن و در نتیجه پرتفو با عملکرد بهتری را تشکیل می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: *بهینه‌سازی استوار، تخصیص دارایی، مدل مارکویتز، مدل‌های ARMA و GARCH.*

۱. استاد مدیریت مالی، دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۴/۱۵
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۲۰
نویسندهٔ مسئول مقاله: سید محمدامیر هاشمی
E-mail: Amirhashemi251@ut.ac.ir

مقدمه

توزیع مناسب سرمایه بین گروه‌های مختلف دارایی، از مهم‌ترین تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری است که هر سرمایه‌گذار نهادی یا فردی در تشکیل پرتفوی با آن مواجه خواهد بود. تخصیص دارایی تکنیکی برای تشکیل سبد دارایی است و هدف از آن متوازن کردن ریسک سبد دارایی و پرگونه‌سازی دارایی‌های آن از طریق توزیع سرمایه بین گروه‌های مختلف دارایی است. بنابراین تخصیص دارایی در مدیریت پول و برنامه‌ریزی مالی، از مفاهیم کلیدی است و یکی از مهم‌ترین فعالیت‌هایی به‌شمار می‌رود که می‌تواند بر عملکرد سبد سرمایه‌گذاری و کاهش ریسک سرمایه‌گذار تأثیر بگذارد. به‌صورت تجربی نیز، بیشتر افراد حرفه‌ای بازار، تخصیص سرمایه را مهم‌ترین بخش تشکیل سبد سرمایه‌گذاری می‌دانند.

بی‌شک مهم‌ترین ویژگی بازارهای پول و سرمایه، عدم اطمینانی است که در هر سرمایه‌گذاری وجود دارد و سرمایه‌گذار را به جست‌وجوی روش‌هایی وادار می‌کند که ریسک به‌وجودآمده از عدم اطمینان سرمایه‌گذاری‌ها را کاهش دهد. سرمایه‌گذاران به‌منظور کاهش عدم اطمینان موجود در مسائل پیش رو، به پیش‌بینی بازده و ریسک دارایی‌ها روی آورده‌اند تا از این طریق ریسک سرمایه‌گذاری خود را کاهش داده و آن را مدیریت کنند. اما از سوی دیگر، بهترین روش‌های پیش‌بینی نیز غیرقطعی است و این عدم قطعیت، مدیریت ریسک را به چالش خواهد کشید. بنابراین، در مسئلهٔ بهینه‌سازی تخصیص دارایی، در صورتی که بازده‌های پیش‌بینی به‌صورت قطعی در مدل منظور شوند، موجب می‌شوند تشکیل پرتفوی از اعتبار کافی برخوردار نباشد.

مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز (۱۹۵۲)، مسئلهٔ پرتفوی سرمایه‌گذاری را بر اساس پیش‌بینی‌های قطعی از بازده و ماتریس کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها بهینه‌سازی می‌کند، این مدل بازده پرتفوی بهینه را در سطح انحراف معیار مشخص بیشینه می‌کند. در این پژوهش برای بهبود عملکرد مدل مارکویتز، از رویکرد بهینه‌سازی استوار و مفروضات مربوط به عدم قطعیت پیش‌بینی بازده‌ها و کواریانس ـ واریانس آنها استفاده شده است. این پژوهش در تلاش است با استفاده از مفاهیم و مدل‌های اقتصادسنجی ARMA و GARCH، پیش‌بینی‌های دقیق و معتبری را در مورد بازده مورد انتظار گروه‌های مختلف دارایی و واریانس آنها ارائه دهد. با توجه به مفاهیم برآوردهای فاصله‌ای و روش بوت‌استرپ برای بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها، مجموعه‌های نوسان یا عدم قطعیت محاسبه شده است. در نهایت مدل مارکویتز با توجه به رویکرد بهینه‌سازی استوار، حل می‌شود. در واقع ما به‌دنبال بررسی آن هستیم که آیا نتایج به‌دست‌آمده از کاربرد رویکرد استوار با فرض عدم قطعیت بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها،

به عملکرد بهتر پرتفوی نسبت به مدل مارکویتز در شرایط فرض قطعی بودن پیش‌بینی‌ها منجر خواهد شد یا خیر.

پیشینهٔ پژوهش

تخصیص دارایی

اوایل دههٔ ۱۹۶۰، واژهٔ تخصیص دارایی وجود نداشت و پرگونه‌سازی به‌شکل سادهٔ «تمام تخم مرغ‌های خود را در یک سبد قرار ندهید» معرفی شد. استراتژی میانگین ــ واریانس (نظریهٔ پرتفوی مدرن) به‌عنوان شناخته‌شده‌ترین مدل تخصیص دارایی، توسط مارکویتز توسعه یافت تا فرایند تخصیص بهینهٔ سرمایه را با فرض مجموعه فرصت‌های سرمایه‌گذاری ثابت طی یک دورهٔ زمانی، بین گروه‌های مختلف دارایی انجام دهد. این مدل، تمرکز سرمایه‌گذار بر اوراق بهادار منفرد را به در نظر گرفتن کل پرتفو انتقال داد. پرگونه‌سازی بهینه از این ایده منتج می‌شود که از تعدادی سبد برای حمل تخم مرغ‌های خود استفاده کنید (گیبسون، ۲۰۰۸: ۱۸-۷).

برینسون و همکارانش (۱۹۸۶ و ۱۹۹۱) در پژوهشی نقش کلیدی تخصیص دارایی بر عملکرد بازده نمونه‌ای از صندوق‌های بازنشستگی را بررسی کردند و تخصیص دارایی را یکی از مهم‌ترین تصمیم‌های تأثیرگذار بر عملکرد پرتفو دانستند. آنها ضمن تفکیک کردن بازده‌های کلی به سه بخش خط‌مشی تخصیص دارایی، موقعیت‌سنجی بازار و انتخاب اوراق بهادار، نشان دادند که خط‌مشی سرمایه‌گذاری به‌طور میانگین ۹۳/۶ درصد از نوسان‌های بازده کلی فصلی صندوق را توضیح می‌دهد، در حالی که به‌گزینی و موقعیت‌سنجی بازار فقط درصد ناچیزی را توضیح می‌دهد. پژوهش‌های آنها سرمایه‌گذاران را متقاعد کرد که تخصیص دادن صندوق‌های سرمایه‌گذاری به گروه‌های دارایی، بسیار مهم‌تر از تخصیص اوراق بهادار منفرد در هر یک از گروه‌های دارایی است (اسمیت، ۱۹۹۸).

ایبوتسون و کاپلن (۲۰۰۰) سه سؤال در خصوص اهمیت تخصیص دارایی و پاسخ به آن مطرح کردند: ۱. چه مقدار از تغییرپذیری بازده در طول زمان توسط خط‌مشی تخصیص دارایی توضیح داده می‌شود؟ ۲. چه مقدار از تغییرپذیری بازده میان صندوق‌ها توسط اختلاف در خط‌مشی‌ها توضیح داده می‌شود؟ ۳. چه بخشی از سطح بازده توسط بازده خط‌مشی توضیح داده می‌شود؟ این سؤال‌ها با توجه به نسبت بازده الگوی خط‌مشی به بازده واقعی صندوق پاسخ داده می‌شوند. آنها مشاهده کردند که تخصیص دارایی، ۹۰ درصد از تغییرپذیری صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک، ۴۰ درصد نوسان بین صندوق‌ها و ۱۰۰ درصد از بازده صندوق‌ها را در طول زمان توضیح می‌دهد (سدزرو، مارون و آساگباوی، ۲۰۱۲).

توکات، راچیو و شوارتز (۲۰۰۳) برای حل مسئلهٔ تخصیص دارایی چندمرحله‌ای از برنامه‌ریزی تصادفی و قوانین تصمیم‌گیری بهره بردند و برای پیش‌بینی مقادیر بازده و نوسان آتی، از مدل‌های اقتصادسنجی ARMA و GARCH استفاده کردند.

بهینه‌سازی استوار

فرض کلی مباحث تئوری بهینه‌سازی، عدم قطعیت پارامترهای ورودی مدل است. از این رو در مسائل بهینه‌سازی دنیای واقعی، اگر فرض قطعیت پارامترها، مبنای تصمیم‌گیری قرار گیرد، بنا بر دو دلیل زیر فرض صحیحی نخواهد بود (بنتال، الگوی و نمیرفسکی، ۲۰۰۴: ۴-۳):

- خطای پیش‌بینی: زمان تحلیل مسائل، برخی از داده‌های ورودی مانند بازده دارایی‌ها در مسائل مالی موجود نیستند، بنابراین پیش‌بینی می‌شوند. از آنجا که مقدار حقیقی پارامتر مد نظر می‌تواند از مقدار پیش‌بینی‌شده نوسان کند، این داده‌ها، در برگیرندهٔ خطای پیش‌بینی هستند.
- خطای اندازه‌گیری: برخی از داده‌های ورودی نمی‌توانند به‌طور دقیق اندازه‌گیری شوند. در واقع مقادیر پارامترها حول یک مقدار اسمی نوسان می‌کنند، بنابراین دارای خطای اندازه‌گیری خواهند بود.

مسائل بهینه‌سازی قطعی با این فرض فرمول‌بندی می‌شوند که مقادیر پارامترها قطعی‌اند در حالی که در عمل، پیدا کردن سیستم‌هایی که شامل برخی سطوح عدم قطعیت در مورد بعضی از پارامترها نشوند، کار سختی است. در بیشتر موضوعات تصمیم‌گیری، ناچیز بودن سطح عدم قطعیت یا کم‌اهمیت‌بودن آنها در تصمیم‌گیری، باعث می‌شود که کنترل و تحلیل عدم قطعیت، زیاد ضروری به‌نظر نرسد؛ اما در برخی موضوعات، پارامترهای غیرقطعی در فرایند تصمیم‌گیری نقش اساسی دارند، بنابراین ویژگی‌های این پارامترها نمی‌تواند بدون اعتبارسنجی تحلیل مسئله نادیده گرفته شود (کوآرنتا و زافرونی، ۲۰۰۸).

بنابراین در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای به‌کاررفته در مدل‌های ریاضی، در مسائل دنیای واقعی مهم است و در نتایج و صحت آنها نقش بسزایی دارد؛ زیرا نوسان پارامترهای مدل پیرامون مقدار اسمی خود، ممکن است جواب بهینهٔ مبتنی بر مقدار اسمی پارامترها را از شرایط بهینگی و با نقض برخی محدودیت‌ها، از محدودهٔ جواب‌های موجه خارج کند (کورنئولز و توتونچو، ۲۰۰۵: ۱۳). این مسائل، پژوهشگران را بر آن داشت به سراغ روش‌های بهینه‌سازی‌ای بروند که نسبت به عدم قطعیت پارامترها مصون باشند. به این روش‌ها، بهینه‌سازی استوار می‌گویند.

سویستر (۱۹۷۳) در پژوهش خود مدلی را معرفی کرد که به‌ازای تمام نقاط مربوط به مجموعهٔ محدب، جواب بهینه همچنان شدنی[1] باقی بماند. این پژوهش، نخستین تلاش در طراحی روش‌های بهینه‌سازی استوار به‌شمار می‌رود. مدل پیشنهادی سویستر، مدل سخت‌گیرانه‌ای بود که بدترین حالت را در نظر می‌گرفت، از این رو جواب‌های بسیار محافظه‌کارانه‌ای ارائه می‌داد. اِلگوی (۱۹۹۸ و ۱۹۹۹) و بنتال و همکارانش (۱۹۹۸، ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰) مدل سویستر را با محافظه‌کاری کمتر، توسعه دادند و مدل دوگان مسئلهٔ استوار را حل کردند که در آنها مجموعه‌های عدم قطعیت شکل بیضوی داشت. پژوهش‌های این دو گروه محقق، بهینه‌سازی استوار را به‌گونه‌ای مؤثرتر توسعه داد، اما مشکل این پژوهش‌ها تبدیل یک برنامه‌ریزی خطی به برنامه‌ریزی درجهٔ دوم یا مخروطی بود (قره‌خانی، سجادی و صفری، ۱۳۹۲). بهینه‌سازی استوار در دنیای واقعی کاربردهای زیادی دارد، یکی از مهم‌ترین کاربردهای آن در مسئلهٔ تخصیص دارایی و مدیریت پرتفوی است؛ زیرا در این مسائل فرض عدم قطعیت پارامترهای مدل، منطقی و بدیهی به‌نظر می‌رسد. بنابراین در قسمت تخصیص دارایی استوار، به پژوهش‌هایی که از بهینه‌سازی استوار در مسئلهٔ تخصیص دارایی استفاده کرده‌اند، اشاره می‌شود.

تخصیص دارایی استوار

در قسمت تخصیص دارایی اشاره شد که توکات و همکارانش (۲۰۰۳) برای حل مسئلهٔ تخصیص دارایی چندمرحله‌ای، از برنامه‌ریزی تصادفی و فرض عدم قطعیت پارامترهای ورودی مدل بهره بردند و از مدل‌های اقتصادسنجی ARMA و GARCH برای پیش‌بینی مقادیر بازده و نوسان استفاده کردند. گلدفارب و آینگر (۲۰۰۳) برای حل مسئلهٔ تشکیل پرتفوی تک‌دوره‌ای، رویکرد بهینه‌سازی استوار را انتخاب کردند و از مدل‌های عاملی برای بازدهی سهم‌ها بهره بردند. مدل برنامه‌ریزی آنها مخروطی شکل بود. توتونچو و کوئنیگ (۲۰۱۳) در پژوهشی، مسئلهٔ تخصیص دارایی را با فرض عدم قطعیت بازده دارایی‌ها به کمک رویکرد استوار، بهینه‌سازی کردند. در این پژوهش، تکنیک‌های مختلف نیز به‌منظور ایجاد مجموعه‌های عدم قطعیت بازده دارایی‌ها بررسی شده است. قهطرانی و نجفی (۲۰۱۳) برای حل مسئلهٔ انتخاب پرتفوی چندهدفه از رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی استوار برای مدل‌سازی چندهدفهٔ خود استفاده کردند و به‌کمک رویکرد استوار، امکان‌پذیر بودن و شدنی بودن، جواب‌های مسئله را نشان دادند.

همان‌طور که پیشتر بیان شد، یکی از متداول‌ترین مدل‌های بهینه‌سازی مسئلهٔ تخصیص دارایی، مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز است که در سطح انحراف معیار مشخصی، بازده مورد

1. Feasible

انتظار پرتفوی را بیشینه می‌کند. رابطهٔ ۱ مدل مارکویتز تعدیل‌شده با ریسک را نشان می‌دهد. در این رابطه، μ بردار بازده، Q ماتریس کواریانس ـ واریانس، xها وزن گروه‌های مختلف دارایی‌ها و λ درجهٔ ریسک‌گریزی سرمایه‌گذار است.

رابطهٔ ۱) $max_{x \in R^n} \mu^T x - \lambda x^T Q x \; ; \;\; s.t. \; x \epsilon X$

در مدل مارکویتز، مقادیر عددی بازده و کواریانس دارایی‌ها، مبنای محاسبات بهینه‌سازی است که با توجه به تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری برای آینده، از مقادیر پیش‌بینی آنها به‌عنوان ورودی مدل استفاده می‌شود. پیشتر بیان شد، این پیش‌بینی‌ها قطعی نیستند و با توجه به نوسان‌های موجود در مقدار اسمی و خطاهای پیش‌بینی، می‌توانند مسئلهٔ بهینه‌سازی را دچار مشکل کرده و جواب آن را از شدنی بودن خارج کنند. بنابراین در این پژوهش، به‌منظور بهبود نتایج تصمیم‌گیری از رویکرد استوار و تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت برای این پارامترها استفاده شده است. پیش از تشریح چگونگی تعریف مجموعه‌های عدم قطعیت، مدل مارکویتز با توجه به رویکرد بهینه‌سازی استوار بازنویسی شد که در قالب رابطهٔ ۲ مشاهده می‌شود.

رابطهٔ ۲) $\max_{x} \left\{ \min_{\mu \epsilon U_\mu, Q \epsilon U_Q} \mu^T x - \lambda x^T Q x \right\} \; ; \qquad s.t. \; x^T = 1$

آنچه در کاربرد این مدل اهمیت دارد این است که پارامترهای بازده و ماتریس کواریانس ـ واریانس هر دارایی بر اساس داده‌های گذشته پیش‌بینی می‌شود، از این رو تضمینی نیست که داده‌های پیش‌بینی شدهٔ هر دارایی در مورد عملکرد آیندهٔ دارایی نیز صدق کند. بنابراین، از آنجا که این پارامترها دارای عدم قطعیت هستند، برای در نظر گرفتن عدم‌قطعیت آنها در مسئلهٔ تخصیص دارایی، از رویکرد بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود. به بیان دیگر، به جای در نظر گرفتن برآورد نقطه‌ای برای این پارامترها، می‌توان از برآورد فاصله‌ای استفاده کرد. از این رو فرض می‌شود که مجموعه‌های عدم قطعیت برای بازده‌ها و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها به‌صورت رابطهٔ ۳ است.

رابطهٔ ۳)
$$U_\mu = \{\mu | \mu^L \leq \mu \leq \mu^U\}$$
$$U_Q = \{Q | Q^L \leq Q \leq Q^U \, , Q \geq 0\}$$
$$U = \{\mu, Q | \mu \in U_\mu, Q \in U_Q\}$$

در این پژوهش، برای تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت بازده مورد انتظار دارایی‌ها، از مفاهیم آماریِ برآورد فاصله‌ای بهره برده شده است. برای برآورد فاصله‌ای میانگین دارایی‌ها، از برآورد

فاصله‌ای میانگین توزیع نرمال با انحراف معیار نـامعلوم اسـتفاده مـی‌شـود؛ زیـرا انحـراف معیـار دارایی‌ها نیز به‌عنوان معیار ریسک، مجهول و نامعلوم است. یکـی از گسـترده‌تـرین کاربردهـای بوت‌استرپ، تعریف بازهٔ اطمینان برای تخمین‌زننـده‌هـای پارامترهـای توزیـع اسـت کـه در ایـن پژوهش از این رویکرد برای تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت ماتریس کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها استفاده می‌شود. بوت‌استرپ از رویکردهای محاسباتی مبتنی بر آمار و علوم کامپیوتری است کـه از دسته روش‌های بازنمونه‌گیری به‌شمار می‌رود. در این تکنیک ویژگی‌های یک برآوردگر ماننـد واریانس، با استفاده از اندازه‌گیری همین ویژگی‌ها در یک توزیع تقریبی از کل داده‌های مربوط به نمونه‌ها تخمین زده می‌شود. می‌توان توزیع تجربی شناسایی‌شده از داده‌های نمونـه را بـه‌عنـوان توزیع تقریبی مورد نیاز در این تکنیک استفاده کرد. برای یک مجموعهٔ نمونـه بررسـی تغییـرات تمام آماره‌ها امکان‌پذیر نیسـت و تنهـا مـی‌تـوان یـک آمـاره را محاسـبه کـرد. در ایـن شـرایط بوت‌استرپ به کمک بازنمونه‌گیری از این نمونه‌ها، این امکان را فراهم می‌آورد که با برآوردهـای متعدد از آماره‌ها، تخمینی از توزیع آماره به‌دست آورد.

مفاهیم سری زمانی

از مهم‌ترین روش‌های پیش‌بینی، مفاهیم سری‌های زمانی اسـت کـه از آنهـا بـرای پـیش‌بینـی متغیرها در آینـده اسـتفاده مـی‌شـود. امـروزه از اقتصادسـنجی بـه‌عنـوان یـک ابـزار اساسـی در پژوهش‌های کاربردی در زمینه‌های مختلف اقتصادی و مالی استفاده مـی‌شـود و هـر روز دامنـهٔ کاربرد آن افزایش می‌یابد. هدف از تجزیه و تحلیل سـری‌هـای زمـانی، مطالعـهٔ سـاختار پویـای داده‌ها و رویکرد آن، بررسی الگوی حاکم بر گذشتهٔ یک متغیر و استفاده از ایـن اطلاعـات بـرای پیش‌بینی رفتار آیندهٔ آن متغیر است؛ زیرا فرض می‌شود عوامل تعیین‌کننـدهٔ رفتـار گذشـته یـک سری، در رفتار آتی آن نیز مؤثر باشد (ابریشمی، ۱۳۸۸: ۸۶-۸۱). در ادامه مفـاهیم سـری زمـانی ارائه می‌شود.

مانایی

اگر تابع توزیع یک سری زمانی مانند $X(t)$ از مرتبهٔ nام نسبت به تغییر مبدأ زمانی ناوردا باشـد، آن‌گاه سری زمانی $X(t)$ را یک سری مانای قوی می‌نامیم. اگر تـابع توزیـع یـک سـری ماننـد $X(t)$ از مرتبهٔ نخست یا دوم نسبت به تغییر مبدأ زمانی ناوردا باشد، داریم:

رابطهٔ ۴)
$$F(x;t) = F(x;t+S)\ \forall\ t,S$$
$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = F(x_1,x_2;t_1+S,t_2+S)\ \forall t_1,t_2,S$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت میانگین سری زمانی $X(t)$ در طول زمان ثابت و کوواریانس بین $X(t)$ و $X(t+S)$ تنها به فاصلهٔ زمانی یعنی S وابسته است (تیسی، ۲۰۱۰: ۳۰).

فرایند نوفهٔ سفید

فرایند $X(t)$ زمانی نوفهٔ سفید نامیده می‌شود که ترتیبی از متغیرهای تصادفی با توزیع یکسان و مستقل بوده و میانگین و واریانس سری زمانی در طول زمان ثابت و متناهی باشد (تیسی، ۲۰۱۰: ۳۶).

رابطهٔ ۵)
$$E(X_t) = \mu < \infty$$
$$Var(X_t) = \sigma^2 < \infty$$
$$Cov(X_t, X_S) = 0 \ \forall t, S$$

مدل ARMA

مدل‌های میانگین متحرک خودهمبسته را باکس و همکارانش در سال ۱۹۹۴ معرفی کردند. ابتدا در مدل ARMA، مفاهیم مدل‌های AR و MA در شکل فشرده‌ای ترکیب شده بود، بنابراین تعداد پارامترهای مورد نیاز کوچک می‌ماند و به صرفه‌جویی در پارامتربندی منجر می‌شد. در این مدل، ارزش جاری سری زمانی x_t به‌صورت خطی به ارزش‌های گذشتهٔ خود و ارزش‌های جاری و گذشتهٔ اجزای اخلال، وابسته است. نمایش مدل خودرگرسیو میانگین متحرک به‌صورت رابطهٔ ۶ است که در آن $\{u_t\}$ یک سری نوفهٔ سفید و p و q اعداد صحیح غیرمنفی هستند (تیسی، ۲۰۱۰: ۶۴).

رابطهٔ ۶) $$X_t = \mu + Q_1 x_{t-1} + \cdots + Q_p x_{t-p} + \theta_1 U_{t-1} + \cdots + \theta_q U_{t-q} + U_t$$

مدل GARCH

مدل ناهمسانی واریانس شرطی تعمیم‌یافته در سال ۱۹۸۶، توسط بولرسلیو به‌منظور رفع مشکل مدل ناهمسانی واریانس شرطی ارائه شد. طبق این مدل، واریانس شرطی هم با خطاهای پیش‌بینی یا مقادیر شوک‌های گذشته و هم با وقفه‌های خود، همبستگی نشان می‌دهد (تیسی، ۲۰۱۰: ۱۳۱).

رابطهٔ ۷)
$$r_t = \mu + a_t$$
$$a_t = \sigma_t . \varepsilon_t$$
$${\sigma_t}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i {a_t}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j {\sigma_{t-j}}^2$$

m و s به‌ترتیب مرتبه‌های فرایند GARCH هستند. r_t بازده دارایی و a_t جزء اخلال است. در این مدل فرض شده که اجزای اخلال دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس 6_t^2 هستند. همچنین این پارامترها همگی مثبت‌اند (تیسی، ۲۰۱۰: ۱۳۱).

معیار اطلاعاتی

مرتبهٔ فرایندهای ARMA(p,q) و GARCH(m,s) را همیشه نمی‌توان به‌سادگی تشخیص داد. بنابراین چندین معیار اطلاعاتی ارائه شده است که به کمک آنها می‌توان مرتبهٔ فرایندها را تعیین کرد که از جملهٔ این معیارهای اطلاعاتی می‌توان به معیار آکائیک، شوارتز و هنان کوئین اشاره کرد. معیارهای اطلاعاتی، با در نظر گرفتن مربعات خطا و جریمهٔ از دست دادن درجهٔ آزادی، به یافتن تعداد پارامترهای بهینه منجر می‌شوند.

روش‌شناسی پژوهش

گروه‌های دارایی و گردآوری داده‌ها

انتخاب گروه‌های دارایی برای سرمایه‌گذاری از مهم‌ترین اجزای فرایند تخصیص دارایی است. گروه‌های مختلف دارایی شامل دارایی‌های نقد و شبه نقد، اوراق بهادار با درآمد ثابت، سهام، کالا، مستغلات، کلکسیون‌های هنری، اوراق مشتقه و ارزهای خارجی است. فرسون و همکارانش در زمینهٔ انتخاب گروه‌های دارایی سه ویژگی را برای گروه‌های دارایی برشمردند: ۱. از یکدیگر متمایز (منحصربه‌فرد) باشند، ۲. کامل باشند و ۳. بازده‌های مختلف داشته باشند (هاشمی و راعی، ۱۳۹۳). در این پژوهش اوراق مشارکت، سهام، سکهٔ طلا و دلار آمریکا بررسی شده‌اند که از سه ویژگی بالا برخوردارند. اطلاعات مربوط به نرخ بازده اوراق مشارکت از سایت بانک مرکزی ایران، شاخص کل قیمت سهام از سایت بورس و اوراق بهادار تهران، قیمت سکه و دلار از آرشیو روزنامهٔ خراسان و در بازهٔ ۱۳۷۸/۱۰/۰۱ تا ۱۳۹۳/۰۱/۰۱ گردآوری شده است.

رویکرد تخصیص دارایی

در این پژوهش به‌منظور تصمیم‌سازی در خصوص توزیع سرمایه بین گروه‌های مختلف دارایی، سری‌های زمانی مربوط به شاخص کل قیمت سهام، نرخ بازدهٔ اوراق مشارکت، قیمت سکهٔ طلای طرح قدیم و قیمت دلار در بازار آزاد جمع‌آوری شده، سپس به کمک مفاهیم و مدل‌های اقتصادسنجی، این سری‌های زمانی با هدف پیش‌بینی بازده و کواریانس ـ واریانس‌های دوره‌های آتی تجزیه و تحلیل شده‌اند. در گام بعد برای مقادیر پیش‌بینی‌شدهٔ بازده‌ها و کواریانس ـ واریانس‌ها، به‌ترتیب بر اساس مفروضات آماری برآورد فاصله‌ای و روش بوت‌استرپ، مجموعهٔ

عدم قطعیت ایجاد شده که از آنها در بهینه‌سازی تخصیص دارایی استوار استفاده شده است. در نهایت به‌منظور اطمینان از عملکرد بهتر سرمایه‌گذاری با رویکرد استوار، نتایج این رویکرد با نتایج حاصل از مدل مارکویتز با فرض قطعیت پیش‌بینی‌ها مقایسه می‌شود.

برخی از مفروضات مهم در خصوص مدل‌سازی و حل مسئلهٔ تخصیص دارایی استوار به شرح زیر است:

۱. افق سرمایه‌گذاری سه ماهه است، بنابراین سری زمانی هر یک از دارایی‌ها سه ماهه و طی هشت دورهٔ متوالی گردآوری شده است.
۲. پیش‌بینی‌های بازده و واریانس به‌صورت یک دوره‌ای صورت می‌گیرد.
۳. امکان وام‌گیری برای سرمایه‌گذار وجود ندارد.
۴. بازار بدون هزینه فرض شده است.
۵. تمام گزینه‌های سرمایه‌گذاری، تا بی‌نهایت بار قابلیت تقسیم‌پذیری دارد.
۶. سرمایه‌گذار حقیقی یا فردی با درجهٔ ریسک‌گریز ۱، به‌عنوان تصمیم‌گیرنده لحاظ شده است.

یافته‌های پژوهش

پیش‌بینی‌ها

برای پیش‌بینی پارامترهای مورد نیاز مسئلهٔ تخصیص دارایی، سری‌های زمانی بازده دارایی‌ها را به‌وسیلهٔ مدل‌ها و مفاهیم سری زمانی تحلیل کرده تا مدل‌های برازش آنها را تعیین کنند و بر مبنای این مدل‌ها، به پیش‌بینی پارامترهای مورد نیاز بپردازیم. با توجه به اعلام سالانهٔ بستهٔ سیاستی ـ نظارتی شبکهٔ بانکی کشور، به پیش‌بینی نرخ بازده اوراق مشارکت نیاز نیست.

سری‌های زمانی شاخص قیمت سهام، قیمت سکهٔ طلا و دلار به‌صورت سه ماهه از تاریخ ۱ دی ۱۳۷۸ تا ۱ فروردین ۱۳۹۳ گردآوری شده، سپس به کمک نرم‌افزار متلب بازده‌های آنها محاسبه شده است. به‌منظور تخمین و تعیین مدل‌های برازش هر یک از سری‌های زمانی نام‌برده، مدل‌های ARMA و GARCH به‌صورت توأم بررسی شده‌اند که با استفاده از معیار اطلاعاتی آکائیک، بهترین مدل‌های توأم، به‌دست آمده است. کلیهٔ این محاسبات به کمک کدنویسی در نرم‌افزار Matlab 2013a انجام شده است. پس از تعیین مدل سری‌های زمانی، می‌توان بازده و ماتریس کواریانس ـ واریانس یک دورهٔ بعد را پیش‌بینی کنیم. گام‌های لازم برای پیش‌بینی‌های مورد نیاز به شرح زیر است:

۱. آزمون مانایی داده‌ها: برای بررسی مانایی سری‌های زمانی، از آزمون ریشهٔ واحد دیکی ـ فولر افزوده (۱۹۷۹) استفاده شده است که این آزمون ریشهٔ واحد یک سری زمانی را بررسی می‌کند. سری‌های مربوط به سهام و طلا، با سطح اطمینان ۵ درصد تا لگ سوم و سری زمانی دلار تا لگ نخست مانا بوده و ریشهٔ واحد نداشته‌اند.

۲. مدل‌سازی معادلهٔ میانگین داده‌ها: نخست یک معادلهٔ میانگین به کمک مدل ARMA، برای سری زمانی بازده‌ها تعیین می‌شود تا وابستگی‌های خطی موجود را خارج کند. این کار به کمک تابع garchset، garchfit و بر اساس معیار اطلاعاتی آکائیک انجام شده است. این مرحله شامل تخمین ضرایب بهینه‌ای برای مدل است که به بهترین شکل ممکن داده‌ها را برازش می‌کند.

۳. آزمون اثر ARCH: به کمک تابع lbqtest توان دوم باقی‌مانده‌های معادلهٔ میانگین، برای شناسایی ناهمسانی شرطی آزمون شده‌اند. در صورتی که نتیجهٔ آزمون برابر یک باشد به معنای پذیرش فرض مقابل، یعنی وجود اثر آرچ است که در این صورت باید از مدل‌سازی توأم ARMA-GARCH استفاده شود. در سری‌های زمانی دوره‌های نخست تا پنجم بازده سکهٔ طلا و سری زمانی دوره‌های نخست تا سوم و سری زمانی‌های ششم و هفتم دلار، وجود اثر آرچ تأیید شده و برای سایر سری‌های زمانی، وجود اثر آرچ تأیید نمی‌شود.

۴. در صورت تأیید وجود اثر آرچ از طریق منطق آماری و آزمون مرحلهٔ پیش، برای سری زمانی‌های دارای اثر ARCH، یک مدل نوسان تعیین می‌کنیم که از طریق فرایند GARCH تخمین زده می‌شود. برای انجام این کار معادلهٔ میانگین و نوسان را به‌صورت توأم تخمین خواهیم زد و معیار اطلاعاتی آکائیک بهترین مدل تخمینی توأم را مشخص می‌کند. این مرحله با استفاده از توابع garchset و garchfit انجام شده است که نتایج آن به‌همراه بهترین مدل‌های ARMA برای سایر سری زمانی‌های بدون اثر ARCH در جدول ۱ ارائه شده است. پس از تعیین مدل‌های بهینه برای این سری‌های زمانی، پیش‌بینی‌های مربوط به بازده و انحراف معیار هر سری زمانی محاسبه شده که در جدول ۲ ارائه شده است.

۵. پیش‌بینی کواریانس‌های بین بازده‌ها، به کمک تابع covar در نرم‌افزار اکسل و بر اساس سری زمانی بازده دارایی‌ها محاسبه شده است. برای پیش‌بینی کواریانس‌ها در دورهٔ زمانی مربوط، از مقادیر پیش‌بینی بازده‌ها که از گام قبلی به‌دست آمد، استفاده شده است.

جدول ۱. مدل‌های بهینه ARMA و GARCH برای سری‌های زمانی مختلف

سری زمانی	مدل ARMA بهینه	مقدار معیار آکائیک	مقدار ثابت مدل (C)	ضرایب قسمت AR
gold1	ARMA(۳,۳)	−۱۲۴/۴۴	۰/۱۲۲۹	[−۱/۳۴۴۵ −۰/۹۱۴۲ −۰/۲۸۳۰]
gold2	ARMA (۳,۴)	−۱۲۱/۲۰	۰/۱۵۰۳	[−۱/۴۹۲۸ −۱/۱۶۶۲ −۰/۴۰۷۰]
gold3	ARMA(۴,۴)	−۱۲۰/۸۱	۰/۰۷۶۱	[−۰/۱۲۲۲ −۰/۰۳۱۰ −۰/۶۲۷۱ −۰/۵۷۲۸]
gold4	ARMA(۳,۳)	−۱۲۲/۲۱	۰/۱۳۹۵	[−۱/۳۳۳۶ −۰/۹۰۹۶ −۰/۳۰۷۲]
gold5	ARMA(۳,۳)	−۱۲۲/۴۶	۰/۱۴۲۳	[−۱/۳۳۷۲ −۰/۹۱۸۵ −۰/۳۱۱۰]
gold6	ARMA(۵,۲)	−۱۰۹/۳۵	۰/۱۳۱۴	[−۱/۱۸۵۰ −۰/۵۴۶۲ −۰/۱۹۸۰ ۰/۰۱۹۸ ۰/۳۷۰۰]
gold7	ARMA(۵,۲)	−۱۱۰/۲۹	۰/۱۲۸۹	[−۱/۱۲۸۹ −۰/۴۲۴۵ −۰/۲۱۴۹ −۰/۱۶۱۴ ۰/۲۶۵۶]
gold8	ARMA(۴,۵)	−۱۰۸/۶۳	۰/۰۴۱۸	[−۱/۸۹۸۱ −۰/۲۷۲۸ ۱/۵۰۰۰ ۰/۸۷۴۷]
equity1	ARMA(۳,۴)	−۷۴/۸۹	۰/۰۶۷۹	[۰/۴۸۳۵ −۰/۳۶۷۴ −۰/۲۵۰۰]
equity2	ARMA(۱,۴)	−۷۷/۴۵	۰/۰۲۸۹	۰/۴۲۱۶
equity3	ARMA(۱,۴)	−۸۰/۱۷	۰/۰۳۰۳	۰/۴۱۰۴
equity4	ARMA(۱,۴)	−۷۴/۶۱	۰/۰۴	۰/۳۶۹۴
equity5	ARMA(۱,۴)	−۷۷/۱۷	۰/۰۴۰۱	۰/۳۵۰۷
equity6	ARMA(۱,۴)	−۷۷/۶۷	۰/۰۴۱۳	۰/۳۹۳۹
equity7	ARMA(۱,۴)	−۷۸/۳۹	۰/۰۴۱	۰/۴۵۳۲
equity8	ARMA(۱,۴)	−۸۱/۰۸	۰/۰۴۰۸	۰/۴۵۹۳
dollar1	ARMA(۱,۱)	−۲۷۲/۰۰	۰/۰۰۱۹	۰/۷۴۸۶
dollar2	ARMA(۴,۲)	−۲۷۲/۲۶	۰/۰۰۵۱	[−۰/۵۳۸۳ −۰/۳۰۵۱ ۰/۴۳۴۵ ۰/۳۳۷۲]
dollar3	ARMA(۴,۲)	−۲۷۱/۲۱	۰/۰۰۱۲	[۱/۸۲۴۶ −۱/۱۴۱۳ −۰/۱۰۴۲ ۰/۲۷۲۹]
dollar4	ARMA(۲,۱)	−۱۶۸/۳۸	۰/۰۰۴۵	[۰/۱۸۷۹ ۰/۸۱۲۱]
dollar5	ARMA(۴,۵)	−۱۷۰/۵۱	۰/۰۰۱۵	[۰/۹۵۸۵ −۱/۵۹۵۸e−۱۱ −۰/۹۵۸۵ ۱/۰۰۰۰]
dollar6	ARMA(۴,۲)	−۲۶۹/۹۰	۰/۰۰۱۶	[۱/۳۵۴۰ −۰/۱۶۷۱ −۱/۰۰۷۳ ۰/۵۸۸۲]
dollar7	ARMA(۱,۱)	−۲۶۹/۱۸	۰/۰۰۱۷	۰/۷۸۶۲
dollar8	ARMA(۲,۴)	−۱۵۲/۴۷	۰/۰۱۶۴	[۰/۴۰۱۵ −۰/۶۱۲۲]

ادامهٔ جدول ۱

سری زمانی	ضرایب قسمت MA	مدل GARCH بهینه	مقدار ثابت مدل (K)	ضرایب قسمت GARCH	ضرایب قسمت ARCH
gold1	[۱/۸۸۳۹ ۱/۸۰۴۰ ۰/۶۵۳۴]	GARCH(۱,۲)	۰/۰۰۱	۰/۱۰۷۳	[۰ ۰/۸۱۷۹]
gold2	[۲/۰۵۰۰ ۲/۲۷۱۱ ۱/۱۴۹۲ ۰/۲۵۳۶]	GARCH(۱,۲)	۹/۱۷E-۰۴	۰/۱۳۹۸	[۰ ۰/۸۶۰۲]
gold3	[۰/۳۷۵۳ ۰/۱۹۱۰ ۰/۳۷۵۳ ۱/۰۰۰۰]	GARCH(۱,۲)	۸/۹۵E-۰۴	۰/۰۹۷۷	[۰ ۰/۸۵۸۲]
gold4	[۱/۸۵۲۷ ۱/۷۶۹۹ ۰/۶۲۹۴]	GARCH(۱,۲)	۸/۹۷E-۰۴	۰/۱۵۵۵	[۰ ۰/۸۴۴۵]
gold5	[۱/۸۴۹۷ ۱/۷۶۷۰ ۰/۶۲۷۶]	GARCH(۱,۲)	۸/۹۱E-۰۴	۰/۱۵۷۷	[۰ ۰/۸۴۲۳]
gold6	[۱/۵۷۳۰ ۰/۹۹۶۸]				
gold7	[۱/۵۷۶۶ ۰/۹۹۵۴]				
gold8	[۲/۵۳۵۶ ۱/۵۹۸۲ −۱/۳۹۰۹ −۲/۳۶۰۸ −۰/۹۲۰۱]				
equity1	[−۰/۲۵۹۸ ۰/۳۸۹۶ ۰/۲۰۳۶ ۰/۶۲۹۶]				
equity2	[−۰/۱۷۴۹ ۰/۰۸۴۷ −۰/۰۷۰۴ ۰/۵۲۸۶]				
equity3	[−۰/۱۶۶۵ ۰/۰۸۴۵ −۰/۰۶۵۹ ۰/۵۲۳۶]				
equity4	[−۰/۱۱۴۷ ۰/۰۸۳۶ −۰/۰۶۳۶ ۰/۵۴۱۸]				
equity5	[−۰/۱۱۷۶ ۰/۰۸۵۱ −۰/۰۵۹۶ ۰/۵۴۶۶]				
equity6	[−۰/۱۶۴۰ ۰/۱۳۰۹ −۰/۰۵۷۷ ۰/۵۶۶۸]				
equity7	[−۰/۱۸۰۰ ۰/۰۹۶۱ −۰/۰۰۵۵ ۰/۵۶۲۴]				
equity8	[−۰/۱۸۱۰ ۰/۰۹۸۴ −۰/۰۰۹۴ ۰/۵۶۹۰]				
dollar1	−۰/۲۵۸	GARCH(۱,۱)	۲/۲۴E-۰۵	۰/۱۴۴۲	۰/۸۵۵۸
dollar2	[۱/۱۱۴۵ ۱/۰۰۰۰]	GARCH(۱,۱)	۱/۴۸E-۰۵	۰/۱۴۰۹	۰/۸۵۹۱
dollar3	[−۱/۵۷۱۶ ۰/۹۳۲۵]	GARCH(۱,۱)	۱/۴۰E-۰۵	۰/۱۰۶۴	۰/۸۹۳۶
dollar4	−۰/۳۹۵۲				
dollar5	[−۱/۲۹۰۳ ۱/۳۲۳۵ −۰/۰۵۹۵ −۰/۴۲۴۹ ۰/۵۱۶۴]				
dollar6	[−۱/۵۹۶۵ ۰/۹۷۰۴]	GARCH(۱,۳)	۹/۹۱E-۰۶	۴/۰۶E-۲۰	[۰/۸۶۱۶ ۰/۱۳۸۴۰]
dollar7	−۰/۳۴۵۱	GARCH(۱,۱)	۲/۳۱E-۰۵	۰/۱۲۲۳	۰/۸۷۷۷
dollar8	[−۰/۴۷۴۷ ۱/۲۵۱۰ −۰/۴۷۴۷ ۱/۰۰۰۰]				

جدول ۲. پیش‌بینی‌های حاصل از مدل‌های اقتصادسنجی

دوره	پیش‌بینی‌های سری زمانی بازده قیمت سکهٔ طلا		پیش‌بینی‌های سری زمانی بازده شاخص کل قیمت سهام		پیش‌بینی‌های سری زمانی بازده قیمت دلار		اوراق مشارکت
	بازده	انحراف معیار	بازده	انحراف معیار	بازده	انحراف معیار	بازده علی‌الحساب
۱	۰/۰۷۵۵	۰/۰۷۳	۰/۱۱۷۸	۰/۰۹۵۴	۰/۱۴۵۲	۰/۱۴۷۱	۰/۰۵
۲	۰/۰۲۱۶	۰/۱۶	۰/۰۰۱۱	۰/۰۹۷۱	−۰/۰۳۷۱	۰/۱۹۹۶	۰/۰۵
۳	−۰/۰۱۴۷	۰/۰۷۷۵	۰/۰۰۰۴	۰/۱۰۴۴	۰/۰۸۱۸	۰/۲۶۲۲	۰/۰۵
۴	۰/۲۴۱۸	۰/۳۰۴۹	۰/۱۱۳۱	۰/۱۰۳۴	۰/۲۵۳۵	۰/۰۴۵۸	۰/۰۵
۵	−۰/۱۵۵۹	۰/۱۷۴۹	۰/۰۶۶۱	۰/۱۰۴۸	۰/۰۷۵۶	۰/۰۴۳۶	۰/۰۵
۶	−۰/۰۶۵۷	۰/۰۷۷۵	۰/۱۰۰۱	۰/۱۰۵۸	۰/۲۲۶۹	۰/۰۶۲۸	۰/۰۵۵
۷	۰/۲۱۴۸	۰/۰۸۵۴	۰/۳۰۵۳	۰/۱۰۴۵	−۰/۰۳۸۱	۰/۱۶۸۶	۰/۰۵۵
۸	−۰/۱۸۴۱	۰/۰۸۴۹	۰/۱۶۵	۰/۱۰۹۲	۰/۰۶۲۶	۰/۰۵۳۹	۰/۰۵۵

بهینه‌سازی استوار مسئلهٔ تخصیص دارایی

از آنجا که پارامترهای ورودی مسائل بهینه‌سازی در رویکرد استوار غیرقطعی فرض می‌شوند، برای هر یک از این پارامترها با تعریف مجموعه‌های عدم قطعیت، دامنهٔ نوسان تعریف می‌شود و سپس مسئلهٔ بهینه‌سازی برای کلیهٔ مقادیری که پارامترها با توجه به این مجموعه‌ها اتخاذ می‌کنند، حل شده و پاسخ بهینه از این مجموعهٔ جواب انتخاب می‌شود. در این پژوهش، بازده مورد انتظار و ماتریس کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها به‌عنوان پارامتر ورودی، هر دو دارای عدم قطعیت هستند، بنابراین نیاز است برای آنها مجموعهٔ عدم قطعیت تعریف شود. برای تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت بازده دارایی‌ها از مفاهیم آماری برآورد فاصله‌ای و برای تعریف مجموعهٔ عدم قطعیت ماتریس کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها از رویکرد بوت‌استرپ استفاده شده است که گام‌های زیر به چگونگی تعریف این مجموعه‌ها اشاره دارند:

۱. برای استفاده از مفهوم برآورد فاصله‌ای برای بازده دارایی‌ها، ابتدا آمارهٔ آزمون جارک ـ برا به‌منظور بررسی نرمال بودن سری زمانی دارایی‌ها انجام شده است. این آماره به‌طور مجانب به‌صورت متغیر تصادفی مربع کای با دو درجه آزادی توزیع شده است که برای آزمون نرمال بودن یک سری به‌کار می‌رود. فرض H_0 یعنی فرض نرمال بودن سری مورد نظر و در صورتی که مقدار P آمارهٔ JB کمتر از سطح اطمینان باشد، رد می‌شود. این آماره در رابطهٔ ۸ ارائه شده است که در آن $S(r)$ و $K(r)$ به‌ترتیب چولگی و کشیدگی متغیر نام‌برده و T تعداد مشاهدات

است. نتایج آزمون نشان می‌دهد نرمال بودن سری زمانی بازده کلیهٔ دارایی‌ها در سطح اطمینان ۹۵ درصد تأیید می‌شود.

$$JB = \frac{\hat{S}^2(r)}{6/T} + \frac{[\hat{K}(r) - 3]^2}{24/T}$$ رابطهٔ ۸)

۲. با توجه به مجهول بودن میانگین و انحراف معیار توزیع نرمالِ سری زمانی‌های نام‌برده، برای برآورد فاصله‌ای پارامتر μ، به جای پارامتر مجهول σ از آمارهٔ S و به جای توزیع نرمال استاندارد از توزیع t استفاده شده است. بنابراین اگر $\overline{X}$ و S میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال سری زمانی‌های نام‌برده با پارامترهای مجهول باشند، برای ایجاد فاصلهٔ اطمینان ۹۹/۵درصدی برای پارامتر میانگین سری زمانی‌ها داریم:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \qquad P\{-t_{\alpha/2,n-1} \le t_{n-1} \le t_{\alpha/2,n-1}\} = 1 - \alpha$$ رابطهٔ ۹)

$$P\left\{\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$ رابطهٔ ۱۰)

با تبدیل رابطهٔ ۹ به رابطهٔ ۱۰ برای داده‌های این پژوهش، می‌توان مجموعهٔ عدم قطعیت بازده دارایی‌ها را به شرح جدول ۳ ارائه کرد.

جدول ۳. کران‌های بالا و پایین بازده دارایی‌ها طی ۸ دورهٔ مورد نظر

دوره	کران بالای برای بازده دارایی‌های ریسکی			کران پایین برای بازده دارایی‌های ریسکی		
	سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار	سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار
۱	۰/۰۸۳۲	۰/۰۹۲۹	۰/۰۷۸۳	۰/۰۲۱۸	۰/۰۱۲۷	−۰/۰۴۵۳
۲	۰/۱۱۵۸	۰/۰۹۱۹	۰/۰۹۸۰	−۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۱۱	−۰/۰۶۸۰
۳	۰/۰۸۶۷	۰/۰۹۴۱	۰/۱۲۸۷	۰/۰۲۳۰	۰/۰۰۸۳	−۰/۰۸۷۰
۴	۰/۱۸۲۷	۰/۰۹۷۹	۰/۰۳۹۳	−۰/۰۶۵۴	۰/۰۱۳۸	۰/۰۰۲۰
۵	۰/۱۲۹۵	۰/۰۹۸۳	۰/۰۴۴۴	−۰/۰۱۱۳	۰/۰۱۳۹	۰/۰۰۹۳
۶	۰/۰۸۶۲	۰/۱۰۱۵	۰/۰۵۰۳	۰/۰۲۴۴	۰/۰۱۷۱	۰/۰۰۰۲
۷	۰/۰۸۴۰	۰/۱۰۴۲	۰/۰۸۹۲	۰/۰۱۶۵	۰/۰۲۱۷	−۰/۰۴۳۹
۸	۰/۰۸۱۰	۰/۱۱۰۳	۰/۰۴۳۴	۰/۰۱۴۶	۰/۰۲۴۹	۰/۰۰۱۳

۳. برای برآورد حدود نوسان کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها از رویکرد بوت‌استرپ استفاده شده است. روش کار به این صورت است که پس از ۵۰۰۰ بار بازنمونه‌گیری از هر یک از سری‌های زمانی دارایی‌ها، حداقل و حداکثری برای کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها به‌عنوان یک آماره به‌دست می‌آید که با توجه به سطح اطمینان ۹۹/۵ درصد، بازه مطمئنی برای نوسان آنها خواهد بود. بازه‌های اطمینان مرتبط با کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ٤. کران‌های بالا و پایین کواریانس-واریانس دارایی‌ها

دوره‌ها	دارایی‌ها	کران بالای کواریانس-واریانس			کران پایین کواریانس-واریانس		
		سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار	سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار
۱	سکهٔ طلا	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۳۲	-۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۰۱
	شاخص سهام	۰/۰۰۳۰	۰/۲۶۴۲	۰/۰۰۰۷	-۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۵۵	-۰/۰۰۲۵
	دلار	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۰۷	۰/۰۴۱۵	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۲۵	۰/۰۱۳۰
۲	سکهٔ طلا	۰/۰۴۸۷	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۴	۰/۰۱۵۴	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱
	شاخص سهام	۰/۰۰۵۷	۰/۰۱۷۹	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۰۵
	دلار	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۶۸	۰/۰۷۵۸	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۵	۰/۰۲۴۰
۳	سکهٔ طلا	۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱
	شاخص سهام	۰/۰۰۴۹	۰/۰۲۰۶	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۰۴
	دلار	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۶۷	۰/۱۲۹۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۴	۰/۰۴۱۶
۴	سکهٔ طلا	۰/۱۷۴۴	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۶۹	۰/۰۵۶۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱
	شاخص سهام	۰/۰۰۵۳	۰/۰۲۰۱	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۰۷
	دلار	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۱۳
۵	سکهٔ طلا	۰/۰۵۷۰	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۷۵	۰/۰۱۸۷	-۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۲
	شاخص سهام	۰/۰۰۵۴	۰/۰۲۰۵	۰/۰۰۶۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۰۸
	دلار	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۳۵	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۱۲
۶	سکهٔ طلا	۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۳۷	-۰/۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۹
	شاخص سهام	۰/۰۰۶۱	۰/۰۲۰۷	۰/۰۰۸۷	-۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۱۰
	دلار	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۷۳	-۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۲۴
۷	سکهٔ طلا	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۴۵	-۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۱۲
	شاخص سهام	۰/۰۰۷۳	۰/۰۲۰۱	۰/۰۰۸۶	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۰۵
	دلار	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۸۶	۰/۰۵۲۳	-۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۵	۰/۰۱۷۵
۸	سکهٔ طلا	۰/۰۱۳۲	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۴۴	-۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۱۳
	شاخص سهام	۰/۰۰۶۳	۰/۰۲۱۸	۰/۰۰۸۳	-۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۰۷
	دلار	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۵۳	-۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۱۸

۴. با توجه به مجموعه‌های عدم قطعیت به‌دست‌آمده از گام‌های پیشین، اکنون می‌توان رویکرد بهینه‌سازی استوار را برای مسئلهٔ تخصیص دارایی مورد نظر انجام داد که مدل نهایی آن در رابطهٔ ۱۱به‌همراه محدودیت‌ها ارائه شده است. با حل این مدل به کمک نرم‌افزار بهینه‌ساز Lingo(ver.14) پاسخ‌های بهینهٔ وزن هر یک از گروه‌های دارایی در دوره‌های زمانی مختلف به‌دست می‌آید که در جدول ۵ ارائه شده است.

رابطهٔ ۱۱)

$$\max_{x}\left\{\min_{\mu\epsilon U_\mu, Q\epsilon U_Q} \mu^T x - \lambda x^T Q x\right\}$$

$$St.$$

$$U_\mu = \{\mu | \mu^L \le \mu \le \mu^U\}$$

$$U_Q = \{Q | Q^L \le Q \le Q^U, Q \ge 0\}$$

$$U = \{\mu, Q | \mu \in U_\mu, Q \in U_Q\}$$

$$X = \left\{x \in R^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 1,..,4\right\}$$

مدل مارکویتز

برای مطمئن شدن از کارایی و عملکرد بهتر رویکرد تخصیص دارایی استوار، نتایج تخصیص دارایی مدل مارکویتز در حالت غیراستوار با نتایج رویکرد استوار و فرض عدم قطعیت پارامترها مقایسه شده است. مدل مارکویتز با داشتن پیش‌بینی‌های بازده مورد انتظار، انحراف معیار و همبستگی بین دارایی‌ها و قطعی پنداشتن آنها، وزن گروه‌های مختلف دارایی در سبد بهینه را مشخص می‌کند. شایان ذکر است، پیش از کاربرد مدل مارکویتز، فرض نرمال بودن بازده دارایی‌های طلا، دلار و سهام به‌عنوان دارایی‌های ریسکی بررسی و تأیید شده است. مدل مارکویتز در رابطهٔ ۱۲ نشان داده شده که در این رابطه x_i وزن دارایی iام در سبد دارایی بهینه، μ_i بازده دارایی iام، σ_i انحراف معیار بازده دارایی iام و n تعداد کل دارایی‌ها است.

رابطهٔ ۱۲)

$$Max \sum_{i=1}^{n} x_i . \mu_i$$

$$s.t.\ \ Risk = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} = \hat{r}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \ll \alpha_i \ll 1 \ \forall i = 1, \dots, n$$

برای یافتن وزن‌های بهینهٔ تخصیص دارایی از حل‌کنندهٔ اکسل (Solver) که یک بهینه‌ساز کاربرپسند و البته بسیار قوی است (بودی، کین و مارکوس، ۲۰۰۹)، استفاده شده است. در این مسئله، به‌دنبال وزن‌های بهینهٔ سبد سرمایه‌گذاری ریسکی بهینه‌ای هستیم که بر مرز کارا مماس می‌شود. بنابراین در این حل‌کننده، نسبت شارپ به‌عنوان تابع هدفی که بیشینه می‌شود، در نظر گرفته شده و سایر محدودیت‌های مدل به قوت خود باقی هستند. وزن‌های بهینهٔ هر دارایی که بر مبنای مدل مارکویتز و به کمک حل‌کنندهٔ اکسل برای هر دوره به‌دست آمده، در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. وزن دارایی‌های حاصل از رویکرد استوار و غیراستوار مارکویتز

دوره‌ها	وزن دارایی‌های حاصل از رویکرد استوار				وزن دارایی‌های حاصل از رویکرد غیراستوار			
	سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار	اوراق مشارکت	سکهٔ طلا	شاخص سهام	دلار	اوراق مشارکت
۱	۰/۰۷۴۷	۰/۹۲۵۳	۰	۰	۰/۲۵۱۴	۰/۴۸۲۶	۰/۲۶۶۰	۰
۲	۰/۸۰۴۵	۰/۰۵۳۸	۰/۱۴۱۷	۰	۰	۰	۰	۱
۳	۰	۰/۵۰۴۲	۰/۴۹۵۸	۰	۰	۰	۰/۴۶۲۶	۰/۵۳۷۴
۴	۰/۷۷۸۸	۰/۲۲۱۲	۰	۰	۰	۰/۰۷۱۳	۰/۹۲۸۷	۰
۵	۰/۸۷۸۰	۰/۱۲۲۰	۰	۰	۰	۰/۱۱۹۷	۰/۸۸۰۳	۰
۶	۰	۱	۰	۰	۰	۰/۱۱۵۶	۰/۸۸۴۴	۰
۷	۰	۱	۰	۰	۰/۴۹۱۰	۰/۵۰۹۰	۰	۰
۸	۰	۱	۰	۰	۰	۰/۶۱۱۰	۰/۳۸۹۰	۰

ارزیابی نتایج رویکرد استوار

به‌منظور ارزیابی عملکرد دو پرتفوی حاصل از رویکرد استوار و غیراستوار مدل مارکویتز، با استفاده از رویکرد Back Testing بر اساس اطلاعات واقعی محقق‌شده، به مقایسهٔ زوجی شاخص شارپ می‌پردازیم. این رویکرد، به انجام معاملات بر مبنای داده‌های واقعی گذشته به منظور ارزیابی استراتژی معاملاتی ارائه‌شده، اطلاق می‌شود. در این روش از وزن‌های حاصل از هر رویکرد برای محاسبهٔ بازده، انحراف معیار و شاخص شارپِ پرتفوی استفاده شده است (جدول ۶). شاخص شارپ میانگین بازده‌های مازاد سبد سرمایه‌گذاری دورهٔ مورد نظر را بر انحراف معیار بازده‌ها تقسیم می‌کند. این معیار ارزیابی عملکرد، موازنهٔ پاداش به نوسان‌پذیری سرمایه‌گذاری مورد نظر را اندازه‌گیری می‌کند.

جدول ٦. ارزیابی عملکرد پرتفوهای حاصل از رویکردهای استوار و غیراستوار مارکویتز

دوره‌های زمانی	نتایج رویکرد استوار			نتایج رویکرد غیراستوار		
	بازده	انحراف معیار	معیار شارپ	بازده	انحراف معیار	معیار شارپ
۱	−۰/۰۲۰۱	۰/۰۱۰۴۴	−۰/۶۷۱۷	−۰/۰۴۹۲	۰/۰۵۹۹	−۱/۶۵۴۹
۲	۰/۳۱۳۷	۰/۰۷۴۸	۳/۵۲۶۶	۰/۰۵۰۰	۰	۰
۳	۰/۱۵۳۰	۰/۰۶۳۷	۱/۶۱۷۶	۰/۰۳۱۶	۰/۰۱۲۸	−۱/۶۳۶۷
۴	۰/۰۷۹۸	۰/۰۷۵۲	۰/۳۹۵۷	۰/۳۲۹۷	۰/۰۶۹۴	۴/۰۳۳۳
۵	−۰/۰۹۸۹	۰/۰۸۲۱	−۱/۸۱۴۴	−۰/۰۲۳۲	۰/۰۶۶۲	−۱/۱۰۴۹
۶	۰/۲۵۹۳	۰/۱۱۷۸	۱/۷۳۴۳	−۰/۰۷۵۴	۰/۰۶۷۴	−۱/۹۳۵۴
۷	۰/۳۲۴۵	۰/۱۲۱۸	۲/۲۱۲۰	۰/۱۲۳۰	۰/۰۷۴۰	۰/۹۱۹۳
۸	−۰/۰۹۶۵	۰/۱۲۲۷	−۱/۲۳۴۸	−۰/۰۴۸۹	۰/۰۷۷۰	−۱/۳۴۹۶

برای ارزیابی دقیق‌تر نتایج، از آزمون فرض مقایسهٔ زوجی شاخص شارپ دو رویکرد در هشت دورهٔ متوالی استفاده می‌کنیم. آنچه که به‌وسیلهٔ این آزمون بررسی شد، عبارت است از «شاخص شارپ پرتفوی رویکرد استوار بزرگ‌تر از شاخص شارپ پرتفوی غیراستوار یا مساوی آن است». این فرضیه در فرض H_0 قرار گرفته است. در آزمون رابطهٔ ۱۳، D عبارت است از اختلافِ شاخص شارپ پرتفوی رویکرد استوار و شاخص شارپ رویکرد غیراستوار.

رابطهٔ ۱۳)
$$\begin{cases} H_0: \mu_D \geq 0 \\ H_1: \mu_D < 0 \end{cases} ; \; t_0 = \frac{\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

برای آزمون نام‌برده ابتدا باید از نرمال بودن توزیع احتمال اختلاف شاخص‌های شارپ دو پرتفوی اطمینان حاصل شود که برای این کار از آزمون نرمالیتی جارک ـ برا استفاده شده است. مقدار P برای مقادیر D حدود ۴۹/۸ درصد است که چون کمتر از سطح اطمینان ۹۵ درصد است، فرض نرمال بودن آنها پذیرفته می‌شود. از این رو می‌توان آزمون مقایسهٔ زوجی را به‌کار برد که محاسبات در خصوص این آزمون بنابر آمارهٔ آزمون رابطهٔ ۱۳، در جدول ۷ ارائه شده است. این آماره از توزیع تی با ۷ درجه آزادی تبعیت می‌کند. با توجه به اینکه مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ پذیرش فرض صفر قرار می‌گیرد، می‌شود اظهار داشت که در سطح اطمینان ۹۵ درصد دلیلی

برای رد فرض H_0 وجود ندارد. بنابراین شاخص شارپ پرتفوی رویکرد استوار به‌طور معناداری بزرگ‌تر از شاخص شارپ مدل مارکویتز غیراستوار یا مساوی آن است.

جدول ۷. اطلاعات مربوط به آزمون مقایسهٔ جفتی

میانگین اختلافات	انحراف معیار اختلافات	آمارهٔ آزمون t_0	بازهٔ پذیرش	سطح اطمینان (درصد)
۱/۰۶۱۸	۲/۵۰۳۲	۱/۱۹۹۷	$[-۱/۸۹۵, +\infty)$	۹۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

این پژوهش، به‌دنبال ارائهٔ رویکرد استوار در بهینه‌سازی مسئلهٔ تخصیص دارایی است تا بتواند با در نظر گرفتن همزمان نوسانات و عدم قطعیت مربوط به بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها و منظور کردن آنها در محاسباتِ مسئله، وزن‌های بهینهٔ گروه‌های مختلف دارایی را به‌گونه‌ای استخراج کندکه نسبت به رویکرد غیراستوار که پارامترهای ورودی بهینه‌سازی را قطعی فرض می‌کند، نتایج بهتری در مدیریت ریسک سرمایه‌گذار و پرتفوی بهینه ارائه دهد. با توجه به نتایج عددی مسئلهٔ پژوهش که پیشتر بررسی و ارزیابی شد، می‌توان ادعا کرد که در نظر گرفتن عدم‌قطعیت بازده و کواریانس ـ واریانس دارایی‌ها به تشکیل پرتفویی با عملکرد بهتر نسبت به عملکرد پرتفوی غیراستوار یا معادل آن منجر می‌شود. نتایج آزمون مقایسهٔ جفتی که برتری شاخص شارپ پرتفوی استوار را در سطح اطمینان ۹۵ درصد نشان می‌دهد، گواه این مدعاست.

مجموعه‌های عدم قطعیت با توجه به اینکه بر اساس پیش‌بینی مدل‌های اقتصادسنجی ARMA و GARCH بنا شده و از رویکردهای برآورد فاصله‌ای و بوت‌استرپ برای تعریف آنها استفاده شده است، اعتبار بیشتری دارند و می‌توان بخشی از برتری نتایج پرتفوی رویکرد استوار نسبت به پرتفوی رویکرد غیراستوار را به کاربرد این مدل‌ها برای تعریف مجموعه‌های عدم قطعیت نسبت داد. می‌توان در ادبیات موضوع تخصیص دارایی، ترکیب و تلفیقی منطقی بین رویکرد استوار و معیارهای کیفی مؤثر بر مسئله تخصیص به‌وجود آورد، که انتظار می‌رود این ترکیب بین مدل‌های کمّی و کیفی مسئلهٔ تخصیص، نتایج بهتری را در این پژوهش به وجود آورد که امید است پژوهشگران این حوزه نسبت به این موضوعات مبادرت ورزند.

References

Abrishami, H. (2010). *Applied Econometrics New Approaches*, Tehran, University of Tehran press (UTP). (*in Persian*)

BenTal, A., ElGhaoui, L. & Nemirovski, A. (2004). *Robust optimization*, Princeton University Press.

Bodie, Z., Kane. A. & Marcus. A. (2009). *Investments (Vol. 1)*, Translation by Shariatpanahi, M., Farhadi, R. & Imanifar, M. (2012). Tehran: Bourse Press. (*in Persian*)

Cornuejols, G. & Tutuncu, R. (2005). *Optimization Methods in Finance*, Carnegie Mellon University.

Ghahtarani, A. & Najafi, A.A. (2013). Robust goal programming for multi-objective portfolio selection problem. *Economic Modelling*, 33, 588-592.

Gharekhani, M., Sajjadi, S. & Safari, A. (2013). Robust Optimizition of Financial Portfolio with CAPM Model, *Journal of Production and Operations Management*, 4(6), 61-68. (*in Persian*)

Gibson, R. C. (2008). *Asset Allocation Balancing Financial Risk*. New York: McGraw-Hill.

Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics Of Operations Research*, 28(1), 1-38.

Hashemi, A. & Raei, R. (2014). Integrated Approach with Econometric Methods (ARMA & GARCH) and Analytic Network Process for Asset Allocation. *Journal of Financial Engineering and Securities Management*, 18(5), 135-162. (*in Persian*)

Quaranta, A. & Zaffaroni, A. (2008). Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2046–2056.

Sedzro, K., Marouane, A. & Assogbavi, T. (2012). Analytical Hierarchy Process and Goal Programming Approach for Asset Allocation. *Journal of Mathematical Finance*, 2(1), 96-104.

Smith, Keith. V. (1998). Asset Allocation and Investment Horizon. *Financial Services Review*, 6(3), 201-219.

Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Operations Research*, 21(5), 1154-1157.

Tokat, Y., Rachev, S. & Schwartz, E. (2003). The stable non-Gaussian asset allocation: a comparison with the classical Gaussian approach. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27, 937-969.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Chicago: A John Wiley & Sons, Inc.

Tutuncu, R. & Koenig, M. (2004). Robust Asset Allocation, *Operations Research*, 132(1), 157-187.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی