تحقیقات مالی
دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران

دورهٔ ۱۶، شمارهٔ ۲
پاییز و زمستان ۱۳۹۳
ص. ۲۷۰- ۲۵۳

# بهینه‌سازی و مقایسهٔ سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران با بهره‌مندی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه

مهسا رجبی [۱]، حمید خالوزاده [۲]

**چکیده:** با وجود استفادهٔ روزافزون از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه در شاخه‌های مختلف علوم، به‌کاربردن آنها به‌عنوان ابزار بسیار قدرتمند در زمینهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه، به‌ویژه حل مسئلهٔ چندهدفه، همچنان در مراحل اولیهٔ پژوهش است. در این مقاله، از الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفهٔ سبد سرمایه در بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. برای این منظور، دو روش مهم و پرکاربردِ الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II) و بهینه‌سازی چندهدفهٔ ازدحام ذرات (MOPSO) با یکدیگر مقایسه شدند. جبهه‌های بهینهٔ پارِتوی به‌دست‌آمده، به سرمایه‌گذار این امکان را می‌دهد که از بین ریسک و ارزش‌های مختلف، سبد سرمایهٔ بهینهٔ مدنظر را انتخاب کند. ارزش سبد سرمایه و ریسک آن به‌عنوان اهداف بهینه‌سازی و معیار ارزش در معرض ریسک مشروط به‌عنوان سنجهٔ ریسک به‌کار برده شد و سه قید عملی و کاربردی نیز برای حل مسئله مدنظر قرار گرفت. نتایج، عملکرد بهتر روش NSGA-II را نسبت به MOPSO برای هر دو معیار همگرایی و گستردگی جبهه‌های بهینهٔ پارتو نشان داد. همچنین در پیش‌بینی سبد سهام بهینه، انطباق جبهه‌های بهینهٔ پارتوی واقعی و پیش‌بینی‌شده، نشان‌دهندهٔ کارایی بسیار مناسب روش‌های استفاده‌شده است.

***واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک مشروط، الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفهٔ تکاملی، پیش‌بینی سبد سهام، MOPSO، NSGA-II.***

۱. دانشجوی دکتری برق ـ کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
۲. استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

**تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۱/۱۲**
**تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۰٤/۱۷**
**نویسندهٔ مسئول مقاله: مهسا رجبی**
**E-mail: m.rajabi8590@gmail.com**

## مقدمه

در عمل، بسیاری از مسائل بهینه‌سازی شامل بهینه‌کردن همزمان چند هدف در حال رقابت و لحاظ‌کردن قیدهایی[1] است که باید برآورده شوند. مدیریت سبد سرمایه به‌عنوان مسئله‌ای مهم در زمینهٔ اقتصاد مطرح است و موضوع اصلی آن مدیریت علمی و انتخاب ترکیبی از دارایی‌هاست که اهداف سرمایه‌گذاری خاصی را برآورده کند. بیشینه‌نمودن ارزش و کمینه‌کردن ریسک سبد سهام از مهم‌ترین اهدافِ مسئلهٔ مدیریت سبد سهام است. با توجه به اینکه برخی از سنجه‌های ریسک پیچیدگی‌هایی به مسئله اضافه می‌کنند که توابعی غیرمحدب[2] و مشتق‌ناپذیرند و علاوه‌بر این، قیدهای اعمال‌شده بر این پیچیدگی‌ها می‌افزایند، ناحیهٔ جست‌وجوی مسئلهٔ بهینه‌سازی، به ناحیه‌ای غیرمحدب تبدیل می‌شود. پیچیدگی حل چنین مسائلی موجب شده است ابزار بهینه‌سازی کلاسیک تنها به دسته‌ای از مسائل تحقیقاتی محدود شوند که ساده‌سازی‌های بسیاری را برای مدل‌های بهینه‌سازی بپذیرند. به‌دلیل وجود این محدودیت‌ها، استفاده از روش‌های تکاملی برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایهٔ مقید، به‌ویژه هنگام به‌کاربردن سنجه‌های ریسک پیچیده، کاملاً ضروری است. الگوریتم‌های تکاملی، دسته‌ای از روش‌های جست‌وجوی مبتنی بر جمعیت است و موفقیت‌های بسیاری را در حل مسائل پیچیدهٔ چندهدفه در دنیای واقعی نشان داده‌اند. مزیت اصلی الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی، قابلیتی است که در نمونه‌سازی همزمان پاسخ‌های کاندیدشده دارند. از این رو می‌توانند در اجرای الگوریتم، تمام مجموعهٔ جواب‌های بهینه را تخمین بزنند. در دههٔ گذشته کارهای بسیاری برای توسعهٔ الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفهٔ تکاملی (MOEA)[3] ارائه شده است و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف مهندسی، اقتصاد و... پیدا کرده‌اند. هدف پژوهش حاضر، استفاده از MOEAها برای یافتن مجموعه‌ای از پاسخ‌های بهینه با کمترین ریسک و بیشترین ارزش به‌منظور انتخاب و پیش‌بینی سبد سرمایهٔ مقید است.

## پیشینهٔ پژوهش

میشرا، پاندا و مِهِر (۲۰۰۹)، الگوریتم MOPSO را برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سهام به‌کار بردند و آن را با روش‌های NSGA-II، SPFGA و SPEA-II مقایسه کردند. اهداف بهینه‌سازی، بیشینه‌شدن بازده و کمینه‌کردن انحراف معیار به‌عنوان سنجهٔ ریسک بوده است.

---

1. Constraints
2. Non Convex
3. Multi-objective Evolutionary Algorithm

اِسکول پادانگِت، داهال و هارن پورن‌چای (۲۰۰۷)، مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه را با در نظرگرفتن مدل میانگین- واریانس برای برخی الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه بررسی کردند و نشان دادند SPEA-II بهترین الگوریتم در مقایسه با الگوریتم‌های دیگر است. آناگاس-پولُس و مِمانیز (۲۰۰۹) از سه الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، شامل NSAGA-II، PESA و SPEA-II برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد سرمایه استفاده کردند و معیار واریانس را در مدل میانگین- واریانس، با معیارهای VaR و CVaR نیز جایگزین کردند. نتایج این مقاله نشان داد با به‌کارگیری مدل میانگین - واریانس، تمام الگوریتم‌های یادشده، تخمین بسیار نزدیکی به سطح بهینهٔ پرِتو دارند. همچنین، الگوریتم PESA بهترین عملکرد را از نظر همگرایی به سطح بهینهٔ پارِتو دارد و الگوریتم SPEA-II بهترین پاسخ‌ها را از نظر گستردگی می‌دهد. آرمِنِزِس و لوزانو (۲۰۰۵)، به مقایسهٔ سه الگوریتم فراابتکاری به نام‌های GLS، SA و ACO پرداختند و نشان دادند ACO و SA بهترین بهینه‌سازها هستند.

مطالعات ایرانی در زمینهٔ حل مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفهٔ سبد سهام بسیار کم است و در این میان نیز تنها تعداد کمی از پژوهش‌ها، از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی برای حل مسئله استفاده کرده‌اند. خلیجی و همکارانش از الگوریتم مورچگان پیوستهٔ دوهدفه برای بهینه‌سازی استفاده کردند و معیار VaR را به‌عنوان سنجهٔ ریسک به‌کار بردند و نشان دادند، جبهه‌های پارتوی به‌دست‌آمده در مقایسه با روش NSGA-II، همگرایی بیشتر و گستردگی کمتری دارد (خلیجی، ضیائی، طاعی، جاهدمطلق و خالوزاده، ۲۰۰۹). درخشان، گل‌مکانی و حنفی‌زاده (۱۳۹۱) نیز از مدل مارکوویتز استفاده کرد و الگوریتم ترکیب‌یافتهٔ بهینه‌یابی اجتماع مورچگان را به‌منظور بهینه‌سازی به‌کار برد. نتایج نشان داد روش ارائه‌شده نتایج بهتری نسبت به سایر روش‌ها مانند PSA و P-ACO به‌دنبال دارد.

## روش‌شناسی پژوهش

جامعهٔ آماری این پژوهش انتخاب ۲۰ شرکت از میان همهٔ شرکت‌های پذیرفته‌شده در بازار بورس تهران با شرایط زیر است:

- انتخاب یک شرکت از هر صنعت که برای این منظور ۳۰ صنعت فعال‌تر بورس در نظر گرفته شدند؛
- انتخاب یک شرکت از میان ۵۰ شرکت فعال‌تر هر صنعت؛
- شرکت‌هایی که حداقل ۵۰ درصد روزهای معاملاتی در هر سال معامله داشته باشند؛

- حذف شرکت‌هایی از ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس که در سه دورهٔ سه‌ماهه وارد نشده باشند.

مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفهٔ سبد سرمایه دو بخش اصلی را دربرمی‌گیرد. بخش اول، محاسبهٔ ارزش و ریسک سبد سهام با در نظر گرفتن قیدهای مهم عملی است که ارزش سبد سهام از حاصل‌ضرب وزن اختصاص‌یافته به هر یک از دارایی‌ها در قیمت آن به‌دست می‌آید و ریسک سبد نیز به‌کمک به سنجه‌های ریسک مختلف، محاسبه می‌شود. بخش دوم، بهینه‌سازی سبد سهام است که شامل کمینه‌کردن ریسک و بیشینه‌کردن ارزش سبد سهام به‌صورت همزمان است. در ادامه هر دو بخش یادشده تشریح می‌شود.

## محاسبهٔ ریسک سبد سرمایه

VaR و CVaR، معروف‌ترین سنجه‌ها در دستهٔ سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک‌اند. برخی محققان بر این باورند که ممکن است معیار VaR سرمایه‌دار را به انتخاب سبد سرمایه‌ای ترغیب کند که از VaR با توزیع نرمال ریسک‌دارتر است. CVaR ریسک ضرر مورد انتظار را وقتی که ضرر بیشتر از صدک تعیین شده است، اندازه می‌گیرد.

فرض کنیم $f(x,y)$ ریسک مرتبط با بردار تصمیم $x \in X \subseteq R^n$ و بردار تصادفی $y \in R^m$ باشد. برای سادگی، ابتدا فرض می‌کنیم که $y$ از توزیع پیوسته‌ای پیروی می‌کند و تابع چگالی آن به‌صورت $P(\cdot)$ نمایش داده می‌شود. همهٔ نتایج برای توزیع‌های کلی درست باقی می‌ماند. برای سطح اطمینان داده‌شدهٔ $\beta$ و $x$ ثابت، ارزش در معرض ریسک به‌صورت رابطه‌های زیر تعریف می‌شود (خالوزاده و امیری، ۱۳۸۵):

رابطهٔ ۱) $$\Psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)\le\alpha} p(y)dy$$

رابطهٔ ۲) $$VaR_\beta(x) = min\,\{\alpha\epsilon R: \Psi(x,\alpha) \ge \beta\}$$

رابطهٔ ۳) $$CVaR_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta}\int_{f(x,y)\le VaR_\beta(x)} f(x,y)p(y)dy$$

راکفلر و اوریاسف (۲۰۰۰) نشان دادند محاسبهٔ CVaR می‌تواند توسط حداقل‌سازی تابع معین زیر نسبت به $a$ به‌دست آید:

رابطهٔ ۴) $$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{y\epsilon R^m} (f(x,y)-\alpha)^+ p(y)dy$$

رابطهٔ ۵) $$CVaR_{\beta}(x) = min_{\alpha \epsilon R} F_{\beta}(x, \alpha)$$

از نظر محاسباتی، مشکل‌ترین قسمت بهینه‌سازی CVaR محاسبهٔ انتگرال تابع چندمتغیره و غیر هموار است. برای رفع این مشکل می‌توان از تخمین استفاده کرد که راکفلر و اوریاسف $F_{\beta}(x, \alpha)$ را به‌صورت زیر تخمین زدند.

رابطهٔ ۶) $$F_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{s(1-\beta)} \sum_{k=1}^{s} (f(x, y_k) - \alpha)^{+}$$

که در آن $y_k$ معرف $k$امین نمونهٔ تولیدشده توسط نمونه‌گیری تصادفی ساده نسبت به $y$ مطابق تابع چگالی آن $(P(\cdot))$ و $s$ معرف تعداد نمونه‌هاست.

به‌عنوان معیار ریسک، CVaR ویژگی‌های بهتری را نسبت به VaR از خود نشان داده است و در این مقاله نیز از CVaR به‌عنوان سنجهٔ ریسک استفاده می‌شود. همچنین برای حل مسئله، سه قید عملی و کاربردی در نظر گرفته شده است (زو، زِنگ و هوانگ،۲۰۱۰). اگر $w_i$ وزن هر دارایی؛ $n$ تعداد دارایی‌های موجود؛ $k$ تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری‌شده و $l_i$ و $h_i$ به‌ترتیب، حد پایین و بالای قابل قبول وزن دارایی‌ها باشند، در این صورت قیدهای اعمالی به مسئله به‌صورت زیر خواهند بود:

رابطهٔ ۷) $$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

رابطهٔ ۸) $$l_i \leq w_i \leq h_i$$

رابطهٔ ۹) $$\sum_{i=1}^{n} sign(w_i) = k$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

## بهینه‌سازی چندهدفه

در حالت کلی مسئلهٔ بهینه‌سازی چندهدفه می‌تواند به شکل زیر تعریف شود (چیانگ، ۲۰۰۹):

رابطهٔ ۱۰) $$\min_{\vec{x} \in R^n} \vec{f}(\vec{x}) = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_3(\vec{x})\}$$

$$s.t. \vec{g}(\vec{x}) > 0 \quad , \quad \vec{h}(\vec{x}) = 0$$

که $\vec{x}$ بردار متغیرهای تصمیم‌گیری و محدود به فضای تصمیم‌گیری $\Omega$ است، به‌طوری که $\vec{f}$ مجموعه‌ای از اهداف است که باید کمینه شود. توابع $\vec{h}$ و $\vec{g}$ بیان‌کنندهٔ مجموعه‌ای از قیدهای

تساوی و ناتساوی‌اند که ناحیه‌های امکان‌پذیر از فضای جواب $n$ بعدی گسسته یا پیوستهٔ ممکن را تعریف می‌کنند.

در بهینه‌سازی یک‌هدفه، مجموعهٔ امکان‌پذیر به‌طور کامل بر اساس تابع هدف تعیین می‌شود و برای هر مجموعهٔ جواب داده‌شده، بهترین جواب بر اساس مقدار تابع هدف مشخص می‌شود. بنابراین، هدف یافتن پاسخی است که تابع هدف را کمینه یا بیشینه کند؛ در حالی‌که در بهینه‌سازی چندهدفه که هدف‌های زیادی دارد، مرتب‌کردن مجموعهٔ جواب بسیار پیچیده می‌شود. روش‌های اولیه، مسئلهٔ چندهدفه را به مسئلهٔ یک‌هدفه تبدیل می‌کرد. از جمله محدودیت‌های این روش‌ها، حجم زیاد محاسبه، نیاز به دانش قبلی از مسئله و بایاس نسبت به مناطق خاصی از نمودار مصالحه است. در مسائل چندهدفه، تنها یک پاسخ وجود ندارد، بلکه مجموعه‌ای از جواب‌ها به‌دست می‌آید که مجموعهٔ بهینه پارِتو[1] نامیده می‌شود (کوئِلو، ۲۰۰۶). این نام بر اساس نام ولفرِد پارِتو، اقتصاددان معروفی انتخاب‌شده که نظریهٔ بهینگی پارِتو را ارائه کرده است.

مزیت اصلی الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی، توانایی آنها در نمونه‌سازی همزمان پاسخ‌های کاندیدشده است. از این رو این قابلیت را دارند که در هر اجرای الگوریتم، به‌جای یک پاسخ بهینه، تمام مجموعهٔ جواب‌های بهینه (جبههٔ پارتو) را تخمین بزنند. طی سال‌های گذشته، محققان روش‌های گوناگونی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به‌کمک الگوریتم‌های تکاملی ارائه کرده‌اند که در ادامه دو الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی چندهدفهٔ به‌کاربرده شده در این مقاله، برای حل مسئلهٔ سبد سرمایه توضیح داده می‌شود.

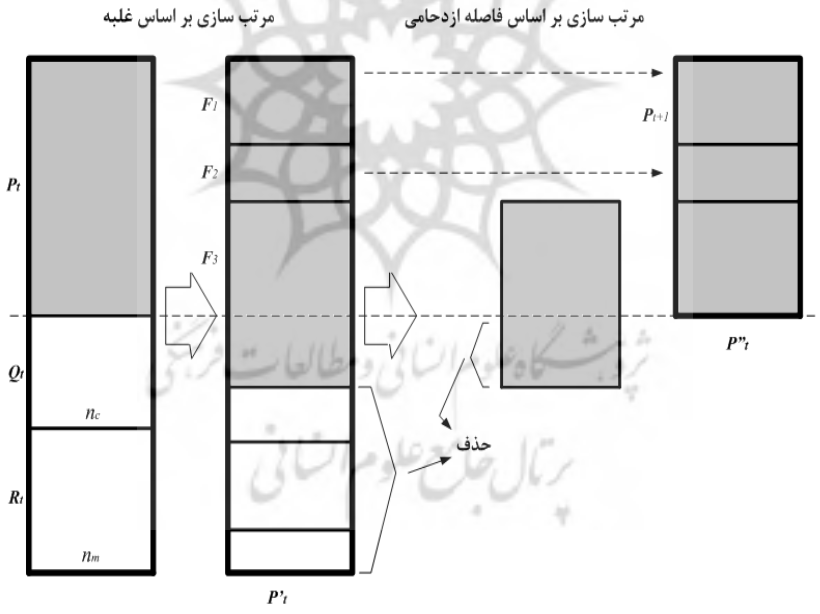
## الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب (NSGA-II)[2]

یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، NSGA-II است (دِب، پراتپ، آگروال و مِیاریوِن، ۲۰۰۲). تفاوت این الگوریتم با الگوریتم ژنتیک تک‌هدفه، در روش مرتب‌سازی پاسخ‌هاست. در واقع در حالت چندهدفه، پاسخ‌ها ابتدا بر اساس غلبهٔ رتبه‌بندی‌شده و سپس بر اساس فاصلهٔ ازدحامی[3] مرتب می‌شوند. در هر تکرار از این الگوریتم، جمعیت جدید با انتخاب والدین از اعضای جمعیت اصلی و اعمال عملگرهای جهش[4] و تقاطع[5] به‌دست می‌آید.

---

1. Pareto
2. Non Dominated Sorting Genetic Algorithm-II
3. Crowding Distance
4. Mutation
5. Crossover

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، پس از مرتب‌سازی پاسخ‌ها بر اساس غلبه، باید به پاسخ‌های متعلق به بهترین مجموعه، یعنی $F_1$ توجه شود. اگر تعداد اعضای این مجموعه از تعداد اعضای جمعیت اصلی (N) کمتر باشد، در این صورت تمام اعضای آن برای جمعیت جدید $P_{t+1}$ انتخاب می‌شوند. بقیهٔ اعضای $P_{t+1}$ از میان اعضای $F_2$ و $F_3$ به‌ترتیب اولویت غلبه انتخاب می‌شوند. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که هیچ جبههٔ دیگری نتواند به جمعیت جدید اضافه شود. فرض کنیم $F_1$ آخرین مجموعه‌ای است که می‌تواند به $P_{t+1}$ اضافه شود. در حالت کلی این تعداد اعضای اضافه‌شده به $P_{t+1}$ بیشتر از اندازهٔ جمعیت اصلی است. برای اینکه به‌طور دقیق N عضو انتخاب شود، اعضای آخرین جبهه یعنی $F_1$ را براساس فاصلهٔ ازدحامی به‌صورت نزولی مرتب‌کرده و پاسخ‌های با فاصلهٔ ازدحامی کمتر را حذف می‌کنیم تا اندازهٔ جمعت جدید به N برسد. برای مثال، در شکل ۱ اعضای $F_1$ و $F_2$ باقی مانده‌اند و برخی از اعضای $F_3$ باید باقی بمانند و برخی حذف شوند. بنابراین پس از مرتب‌شدن پاسخ‌ها بر اساس فاصلهٔ ازدحامی، اعضای اضافی حذف می‌شوند.




**شکل ۱. روش مرتب‌سازی پاسخ‌ها در روش NSGA-II**

به‌منظور محاسبهٔ فاصلهٔ ازدحامی از رابطه‌های ۱۱ و ۱۲ استفاده می‌شود.

$$d_i^j = \frac{\left|f_j^{i-1} - f_j^{i+1}\right|}{f_j^{max} - f_j^{min}}$$ رابطهٔ ۱۱)

$$d_i = d_i^1 + \cdots + d_i^m = \sum_{j=1}^{m} d_i^j$$ رابطهٔ ۱۲)

روند اجرای الگوریتم ژنتیک چندهدفه با مرتب‌سازی نامغلوب به شرح زیر است:

۱. ایجاد جمعیت اولیه با اندازهٔ N؛
۲. محاسبهٔ مقادیر تابع هدف؛
۳. مرتب‌کردن پاسخ‌ها بر اساس غلبه و فاصلهٔ ازدحامی؛
۴. انتخاب والدین، تقاطع و ایجاد جمعیت فرزند ($pop_c$)؛
۵. انتخاب والدین، جهش و ایجاد جمعیت جهش‌یافتگان ($pop_m$)؛
۶. ترکیب جمعیت جدید با جمعیت اصلی؛
۷. انتخاب اعضای جمعیت اصلی جدید با اندازهٔ N بر اساس غلبه و فاصلهٔ ازدحامی؛
۸. در صورت برآورده‌نشدن شرایط خاتمه، گام دوم و در غیر این صورت پایان.

## الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات (MOPSO)[1]

مقایسهٔ الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات[2] یک‌هدفه (PSO) با الگوریتم‌های تکاملی، نشان می‌دهد استفاده از رتبه‌بندی پارتو می‌تواند راه مناسبی برای توسعهٔ این الگوریتم به‌منظور حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه باشد. آرشیو[3] خارجی برای ذخیرهٔ پاسخ‌های غالبی که تا کنون تولید شده‌اند، به‌کار می‌رود (مشابه مفهوم نخبه‌گرایی در الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی). سازوکار جاذبهٔ سراسری در ترکیب با آرشیو بردارهای غالب یافته‌شدهٔ قبلی، می‌تواند همگرایی به پاسخ‌های غالب سراسری را تقویت کند (کوئلو، پالیدو و لِچاگا، ۲۰۰۴). آرشیو خارجی دو بخش مهم کنترل‌کنندهٔ آرشیو و شبکه‌بندی را شامل می‌شود و مهم‌ترین هدف آن نگهداری بردارهای نامغلوب یافته‌شده تا کنون طی فرایند جست‌وجو است.

کنترل‌کنندهٔ آرشیو تعیین می‌کند آیا پاسخ خاصی باید به آرشیو اضافه شود یا نه و فرایند تصمیم‌گیری آن به این صورت است که بردارهای نامغلوبی که در هر تکرار الگوریتم به‌دست می‌آیند، با محتوای آرشیو ـ که در ابتدا تهی است ـ مقایسه می‌شوند. اگر آرشیو خارجی تهی

1. Multi-objective Particle Swarm Optimization
2. Particle Swarm Optimization
3. Repository

باشد، در این صورت پاسخ‌های فعلی قابل قبول‌اند. اگر پاسخ‌های جدید توسط فردی از آرشیو مغلوب شود، این پاسخ حذف می‌شود. اگر هیچ‌یک از اعضای جمعیت خارجی پاسخ جدید را مغلوب نکند، این پاسخ در آرشیو ذخیره می‌شود. سرانجام اگر جمعیت خارجی به ظرفیت ماکزیمم خود برسد، روند شبکه‌بندی تطبیقی اجرا خواهد شد.

به‌منظور ایجاد جبهه‌های پاسخ با توزیع مناسب، از روش شبکه‌بندی تطبیقی استفاده می‌شود. در آرشیو، فضای توابع هدف به چند ناحیه تقسیم می‌شود. اگر عضوی از آرشیو خارج از مرزهای فعلی شبکه قرار گیرد، شبکه باید بار دیگر محاسبه‌شده و هر عضو آن دوباره موقعیت‌دهی شود.

سرعت و موقعیت هر ذره در این الگوریتم به‌کمک رابطه‌های زیر محاسبه و به‌روز می‌شوند:

رابطهٔ ۱۳)
$$vel(i) = w \times vel(i) + c_1 r_1\big(Pbest(i) - pop(i)\big) + c_2 r_2(rep(h) - pop(i))$$

رابطهٔ ۱۴)
$$pop(i) = pop(i) + vel(i)$$

به‌طوری که در رابطهٔ ۱۳، $w$ وزن اینرسی است و مقدار آن برابر با ۰/۴ در نظر گرفته شده است. $r_1$ و $r_2$ اعداد تصادفی در بازهٔ [۰ , ۱]، $c_1$= ۱، $c_2$ = ۳، $Pbest(i)$ بهترین موقعیت ذرهٔ iام، $pop(i)$ مقدار کنونی ذرهٔ iام، $rep(h)$ مقداری است که از آرشیو به‌دست‌آمده و اندیس h به این صورت انتخاب شده است که پس از شبکه‌بندی و محاسبهٔ تعداد اعضای خانه‌های جدول، برای هر خانه به‌کمک روش بولتزمن، احتمالی درنظر گرفته می‌شود؛ به‌طوری که خانه‌های با اعضای بیشتر احتمال کمتری برای انتخاب دارند. پس از آن یک خانه به‌کمک روش چرخهٔ رولت انتخاب می‌کنیم و در نهایت یکی از اعضای خانه به تصادف انتخاب می‌شود.

روند الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفهٔ جمعیت ذرات به‌صورت زیر است:

۱. ایجاد جمعیت اولیه؛
۲. مقداردهی اولیه به سرعت هر ذره؛
۳. ارزیابی هر ذره از جمعیت؛
۴. جداکردن اعضای نامغلوب جمعیت و ذخیرهٔ آنها در آرشیو خارجی؛
۵. جدول‌بندی فضای هدف کشف‌شده؛
۶. هر ذره از میان اعضای آرشیو، رهبری انتخاب کرده و حرکت می‌کند؛
۷. بهترین خاطرهٔ شخصی هر یک از ذرات به‌روز می‌شود؛
۸. اعضای نامغلوب جمعیت فعلی به آرشیو اضافه می‌شود؛
۹. اعضای مغلوب آرشیو حذف می‌شود؛

۱۰. اگر تعداد اعضای آرشیو بیش از ظرفیت تعیین‌شده باشد، اعضای اضافی نیز حذف می‌شوند (اندازهٔ آرشیو محدود است)؛

۱۱. اگر شرایط خاتمه محقق نشده باشد، به مرحلهٔ ۵ بازمی‌گردیم و در غیر این صورت، کار پایان می‌یابد.

## یافته‌های پژوهش

داده‌های مسئله، قیمت‌های ۷۰۰ روز از شرکت‌های انتخاب‌شده از تاریخ ۸۷/۵/۲۸ تا ۹۲/۶/۱۳ است. قیدهای در نظر گرفته‌شده عبارت‌اند از سرمایه‌گذاری در ۱۵ شرکت از ۲۰ شرکت موجود و تعیین حد بالا و پایین مجاز برای وزن‌های نرمال‌شدهٔ هر دارایی، به‌طوری‌که حد بالای هر وزن برابر با ۰/۴ و حد پایین برابر با ۰/۰۱ است. شبیه‌سازی برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه MOPSO و NSGA-II انجام شده است.

در بهینه‌سازی چندهدفه، به‌منظور مقایسهٔ پاسخ‌ها از لحاظ گستردگی و همگرایی جبههٔ پارتو، از دو معیار عملکرد استفاده می‌شود. برای تعیین میزان همگرایی پاسخ‌ها، معیار فاصلهٔ نسلی معکوس[1] به‌کار برده می‌شود. فرض کنید $P^*$ مجموعه‌ای از نقاط قرار گرفته روی جبههٔ پارتو و $P$ تخمینی از $PF$ به‌دست‌آمده توسط روشی خاص است. فاصلهٔ نسلی معکوس میان $P^*$ و $P$ از طریق رابطهٔ ۱۵ محاسبه می‌شود (لی و زِنگ، ۲۰۰۹).

$$IGD(P^*, P) = \frac{\sum_{v \in P^*} d(v, P)}{|P^*|}$$ رابطهٔ ۱۵)

که $d(v,P)$ کمترین فاصلهٔ اقلیدسی بین $v$ و نقاط $P$ است. اگر $|P^*|$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد که بتواند جبههٔ پارتو را به‌خوبی تخمین بزند، $IGD$ می‌تواند بیانگر هر دو معیار تنوع و همگرایی باشد. برای داشتن IGD $IGD$ هرچه کوچک‌تر، باید $P$ هرچه بیشتر به جبههٔ پارتو نزدیک باشد و علاوه‌بر این، نباید بخش‌هایی از کل جبهه را از دست داده باشد.

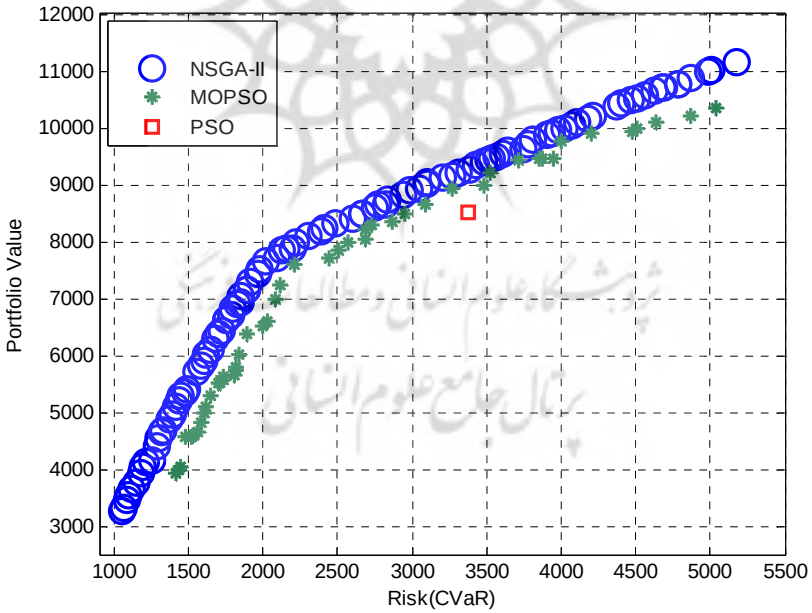
معیار دیگر که برای بررسی و مقایسهٔ جبهه‌های پارتوی به‌دست‌آمده، معیار پوشش[2] است. فرض کنیم $A$ و $B$ دو تخمین از جبههٔ پارتو باشند. $C(A,B)$ بیانگر درصد پاسخ‌هایی از $B$ است که توسط حداقل یک پاسخ از $A$ مغلوب شده‌اند و به شکل زیر تعریف می‌شود:

1. Inverted Generational Distance (IGD)
2. Coverage

$$C(A,B)=\frac{|\{u\in B|\exists v\in A: v\ dominates\ u\}|}{|B|}$$ رابطهٔ ۱۶)

$C(A,B)$ لزوماً برابر با $1-C(A,B)$ نیست. $C(A,B)=1$ به این معناست که تمام پاسخ‌های $B$ توسط پاسخ‌های $A$ مغلوب شده‌اند، در حالی‌که $C(A,B)=0$ نشان می‌دهد هیچ پاسخی از $B$ توسط پاسخ‌های $A$ مغلوب نشده است.

شکل ۲ نمودار جبهه‌های بهینهٔ پارتوی به‌دست آمده از هر دو روش را نشان می‌دهد که بیان‌کنندهٔ ریسک سبد سرمایه به ازای ارزش دارایی‌ها است. سرمایه‌گذار می‌تواند از بین ریسک و ارزش‌های بهینهٔ موجود، سبد سرمایهٔ دلخواه خود را انتخاب کند. برای مقایسهٔ بهتر، پاسخ بهینه به‌کمک روش PSO نیز محاسبه (راعی و علی‌بیکی، ۱۳۸۹) و در شکل ۲ ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت به پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش‌های چندهدفه، پاسخی مغلوب است؛ به این معنا که به ازای ریسک یکسان، ارزش کمتر (یا به ازای ارزش یکسان، ریسک بیشتری) را به‌دست آورده است.




**شکل ۲. نمودار جبهه‌های بهینهٔ پارتو برای حل مسئلهٔ مقید سرمایه به‌کمک الگوریتم‌های NSGA-II، MOPSO و PSO**

با توجه به جبهه‌های پارتوی به‌دست‌آمده، برتری الگوریتم NSGA-II برMOPSO از لحاظ گستردگی و همگرایی پاسخ‌ها به‌طور واضح مشاهده می‌شود. جدول‌های ۱ و ۲ نتایج محاسبهٔ سنجه‌های عملکردی این دو روش را نشان می‌دهند. برای محاسبهٔ معیار IGD، بهترین جبههٔ پارتوی به‌دست‌آمده پس از اجراهای زیاد، به‌عنوان تخمینی از جبههٔ پارتوی واقعی مسئله در نظر گرفته شده است.

**جدول ۱. نتایج محاسبهٔ معیار IGD**

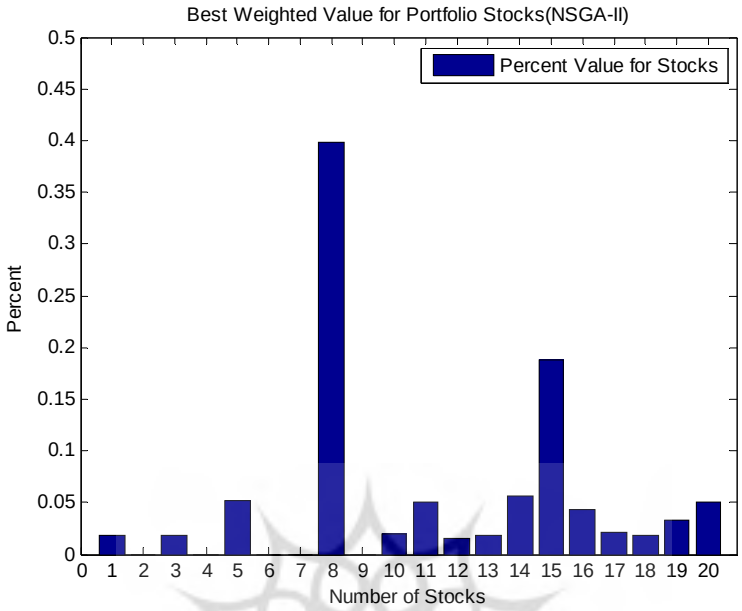
| روش بهینه‌سازی | IGD - mtric |
|---|---|
| NSGA-II | ۰/۰۳۸۴ |
| MOPSO | ۰/۰۵۳۲ |

**جدول۲. نتایج محاسبهٔ C-metric**

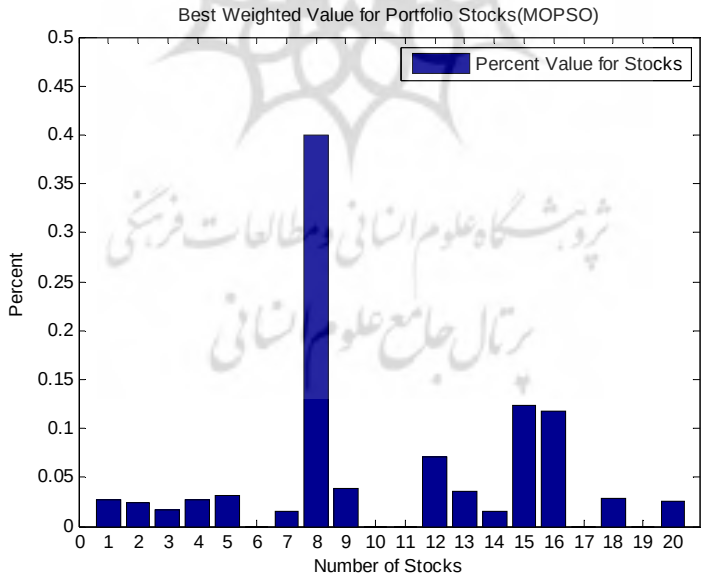
| روش بهینه‌سازی | C - metric |
|---|---|
| C(NSGA-II , MOPSO) | ۰/۹۶۶۷ |
| C(MOPSO , NSGA-II) | ۰ |

با توجه به نتایج جدول ۱، میزان همگرایی به جبههٔ پارتوی واقعی، در روش NSGA-II بیشتر از روش MOPSO است. همچنین نتایج جدول ۲ بیان‌کنندهٔ این است که ۹۶/۶۷ درصد از پاسخ‌های MOPSO توسط پاسخ‌های روش NSGA-II مغلوب شده‌اند، درحالی‌که هیچ‌یک از پاسخ‌های NSGA-II توسط MOPSO مغلوب نشده‌اند؛ این نتایج عملکرد بهتر روش NSGA-II را نشان می‌دهد.

شکل‌های ۳ و ۴، نمودار سبد سهام بهینه با انتخاب ریسک و ارزش دلخواه از جبهه‌های پارتوی به‌دست‌آمده را نشان می‌دهند که در جدول ۳ نیز به تفکیک هریک از شرکت‌ها ارائه شده است.




**شکل ٣. درصد وزن دارایی ها به ازای ریسک ٥٠٠٤ و ارزش ١١٠٢٤**




**شکل ٤. درصد وزن دارایی‌ها به ازای ریسک ٥٠٣٦ و ارزش ١٠٣٤٠**

**جدول ۳. درصد وزن اختصاص‌یافته به شرکت‌های تشکیل‌دهندهٔ سبد سرمایه**

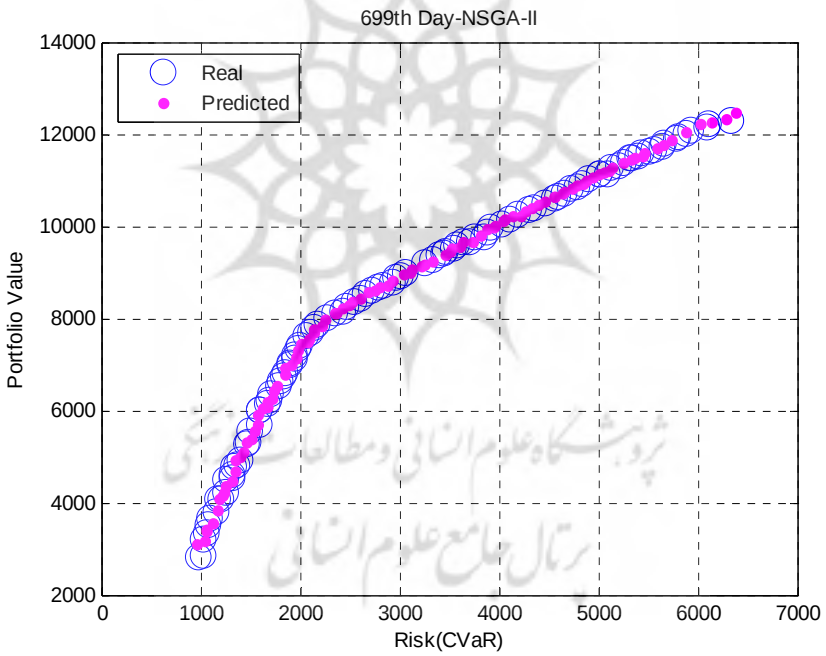
| | نام شرکت | درصد وزن با روش NSGA-II | درصد وزن با روش MOPSO |
|---|---|---|---|
| | | ریسک: ٥۰۰٤ ارزش سبد: ۱۱۰۲٤ | ریسک: ٥۰۳٦ ارزش سبد: ۱۰۳٤۰ |
| ۱ | معادن بافق | ۰/۰۱۸۴ | ۰/۰۲۷۲ |
| ۲ | سرمایه‌گذاری ساختمان | ۰ | ۰/۰۲۴۰ |
| ۳ | بانک اقتصاد نوین | ۰/۰۱۷۸ | ۰/۰۱۷۳ |
| ۴ | کشتیرانی | ۰ | ۰/۰۲۷۶ |
| ۵ | مپنا | ۰/۰۵۱۲ | ۰/۰۳۱۸ |
| ۶ | سایپا | ۰ | ۰ |
| ۷ | خدمات انفورماتیک | ۰ | ۰/۰۱۴۹ |
| ۸ | لیزینگ غدیر | ۰/۳۹۸۴ | ۰/۴۰۰۰ |
| ۹ | سرمایه‌گذاری ملت | ۰ | ۰/۰۳۹۰ |
| ۱۰ | سیمان فارس و خوزستان | ۰/۰۱۹۸ | ۰ |
| ۱۱ | سرمایه‌گذاری صنعت نفت | ۰/۰۵۰۹ | ۰ |
| ۱۲ | فولاد مبارکهٔ اصفهان | ۰/۰۱۵۸ | ۰/۰۷۱۶ |
| ۱۳ | چینی ایران | ۰/۰۱۷۶ | ۰/۰۳۵۵ |
| ۱۴ | مخابرات ایران | ۰/۰۵۶۶ | ۰/۰۱۴۹ |
| ۱۵ | گاز لوله | ۰/۱۸۸۱ | ۰/۱۲۳۶ |
| ۱۶ | تراکتورسازی | ۰/۰۴۳۴ | ۰/۱۱۸۰ |
| ۱۷ | ایران ترانسفو | ۰/۰۲۱۰ | ۰ |
| ۱۸ | پتروشیمی آبادان | ۰/۰۱۷۶ | ۰/۰۲۸۶ |
| ۱۹ | توسعهٔ صنایع بهشهر | ۰/۰۳۳۴ | ۰ |
| ۲۰ | رازک | ۰/۰۵۰۱ | ۰/۰۲۶۰ |
| | مجموع درصد وزن | ۱ | ۱ |

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف

ناشناخته‌بودن عوامل تأثیرگذار بر تغییرات قیمت سهام، همواره دلیلی برای روی‌آوردن به پیش‌بینی تغییرات قیمت سهام شرکت‌هاست. در سال‌های اخیر، روش‌های مختلفی برای بررسی ساختاری سری زمانی قیمت‌های سهام به‌کار گرفته شده است (خالوزاده، خاکی‌صدیق و لوکس،

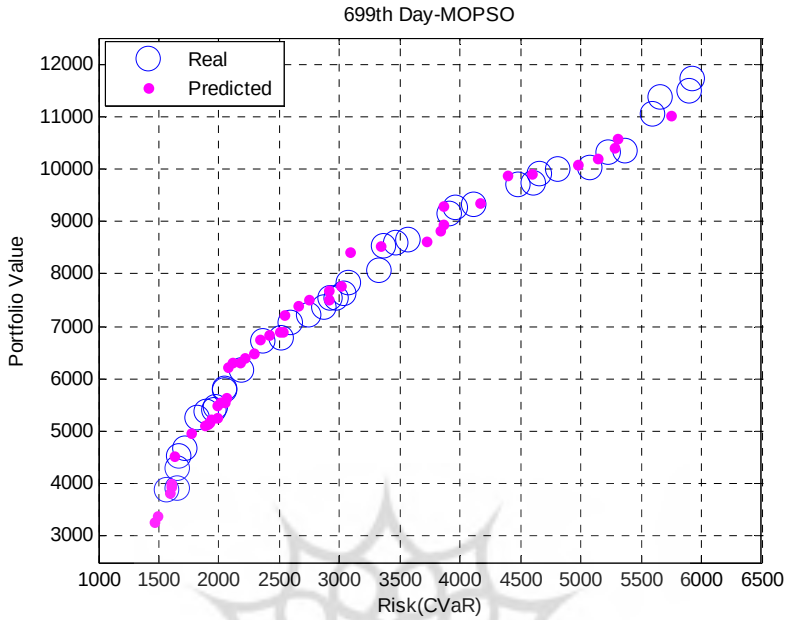
۱۳۷۵). در اینجا از روش تخمین حداقل مربعات بازگشتی (RLS)[1] استفاده می‌شود و مدل مد نظر برای قیمت‌ها، مدل خودرگرسیو (AR)[2] است. مدل رگرسیون، یکی از مدل‌های معروف اقتصادسنجی است که در اغلب موارد، مدل مناسبی برای تعیین روند بلندمدت در سری‌های زمانی ارائه می‌کند (راعی و چاوشی، ۱۳۸۲). به‌منظور کاربردی‌تر شدن پژوهش حاضر، ابتدا قیمت‌های روز آیندهٔ شرکت‌ها تخمین زده می‌شود، سپس برای قیمت‌های به‌دست‌آمده، سبد سرمایهٔ بهینه محاسبه‌شده و با سبد سرمایهٔ بهینهٔ به‌دست‌آمده از قیمت‌های واقعی مقایسه می‌شود.

برای اطمینان از درستی نتایج، پیش‌بینی برای ۱۰ روز متوالی (۶۹۱ تا ۷۰۰) تکرار شد. به‌منظور پرهیز از بیان نتایج بسیار زیاد و مشابه، تنها نتیجهٔ یک روز برای هر روش، آورده شده است.




**شکل ۵. جبهه‌های بهینهٔ پارتو (روش NSGA-II) به ازای قیمت‌های واقعی و پیش‌بینی**

1. Recursive Least Square
2. Autoregressive




**شکل ٦. جبهه‌های بهینه پارتو (روش MOPSO) به ازای قیمت‌های واقعی و پیش‌بینی**

با توجه به شکل‌های ۵ و ۶، مشاهده می‌شود در هر دو روش، جبهه‌های به‌دست‌آمده از قیمت‌های واقعی و پیش‌بینی بر یکدیگر منطبق‌اند، بنابراین ریسک و ارزش‌های بهینهٔ پیش‌بینی‌شده، قابل اطمینان هستند. مقایسهٔ شکل‌های ۵ و ۶، بیان‌کنندهٔ انطباق بیشتر جبهه‌های واقعی و پیش‌بینی در روش NSGA-II نسبت به روش MOPSO است.

## نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه، به‌منظور بهینه‌سازی مسئلهٔ مقید سبد سرمایه استفاده شد. بهینه‌سازی چندهدفه به سرمایه‌گذار امکان می‌دهد که از بین ریسک و ارزش‌های بهینهٔ موجود، سبد سرمایهٔ دلخواه خود (کم‌ریسک ـ کم‌بازده، ریسک متوسط ـ بازده متوسط و ریسک بالا ـ بازده بالا) را انتخاب کند. آنچه در این راستا اهمیت دارد، استفاده از روش‌هایی است که بتوانند جبهه‌های پارتو با گستردگی و همگرایی بیشتری تولید کنند. روش‌های بررسی‌شده در این مقاله NSGA-II و MOPSO بودند. نتایج نشان‌دهندهٔ عملکرد بهتر روش NSGA-II نسبت به MOPSO، برای هر دو معیار همگرایی و گستردگی جبهه‌های

بهینهٔ پارتو بودند. همچنین مقایسهٔ نتایج با روش بهینه‌سازی یک‌هدفهٔ PSO نشان می‌دهد روش‌های چندهدفهٔ به‌کاربرده‌شده موفق به یافتن پاسخ‌هایی با ریسک و ارزش بهینه‌تر شده‌اند. در بخش پیش‌بینی سبد سهام بهینه، مسئله برای قیمت‌های تخمین‌زده‌شده با استفاده از روش RLS و نیز قیمت‌های واقعی حل شد که انطباق جبهه‌های بهینهٔ پارتوی به‌دست‌آمده نشان‌دهندهٔ عملکرد بسیار مناسب روش‌های استفاده‌شده بودند. بر اساس نتایج، می‌توان استفاده از روش‌های تکاملی، به‌ویژه روش‌های تکاملی چندهدفه را برای حل بهتر مسئلهٔ بهینه‌سازی سبدسرمایه و پیش‌بینی آن پیشنهاد داد.

## *References*


Anagnostopoulos, K. & Mamanis, G. (2009). Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems. *Springer-Verlag*, 8(3): 259-279.

Armananzas, R. & Lozano, J. A. (2005). A multiobjective approach to the portfolio optimization problem. *IEEE congress on evolutionary computation*, 2: 1388-1395.

Chiang, C. S. (2009). *Evolutionary Multi-objective Optimization in Investment Portfolio Management.* PhD Thesis, Natinal University of Singapore.

Coello, C.C.A. (2006). Evolutionary Multi-Objective Optimization: A historical view of the field. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 1(1): 28-36.

Coello, C.C.A., Pulido, G.T. & Lechuga, M.S. (2004). Handling Multiple Objectives With Particle Swarm Optimization. *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, 8(3): 256-279.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002). A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2): 182-197.

Derakhshan, M., Golmakani, H. & Hanafizadeh, P. (2012). Multiobjective Portfolio Selection of Tehran Stock Exchange with the Metaheuristic Optimization Approach. *International Journal of Indestrial Engineering and Production Management*, 23(3): 318-331. (*in Persian*)

Khaleiji, M., Zeiaee, M., Tabei, A., Jahed-Motlagh, M.R. & Khaloozadeh, H. (2009). Dynamically Weighted Continuous Ant Colony Optimization for Bi-Objective Portfolio Selection Using Value-at-Risk. *Third Asian International Conference on Digital Object Identifier*, 1(2): 230-235.

Khaloozadeh, H. & Amiri, N. (2006). Optimal portfolio Selection in Iran Sotck Exchange Based on VaR Approach. *Journal of Economic Research*, 41(2): 211-231. (*in Persian*)

Khaloozadeh, H., Khaki-sedigh, A. & Lucas, C. (1996). Are Stock Prices Predictable in the Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Research*, 3(2): 37-46. (*in Persian*)

Li, H. & Zhang, Q. (2009). Multiobjective Optimization Problems with Complicated Pareto Sets, MOEA/D and NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Comutation*, 13(2): 284-302.

Metaxiotis, K. & Liagkouras, K. (2012). Multiobjective Evolutionary Algorithms for Portfolio Management: A comprehensive literature review. *Expert Systems with Applications*, 39(14): 11685–11698.

Mishra, S.K., Panda, G. & Meher, S. (2009). Multi-objective particle swarm optimization approach to portfolio optimization. *World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing*. DOI:10.1109/NABIC.2009. 5393659.

Raei, R. & Alibeygi, H. (2010). Portfolio Optimization Using Particle Swarm Optimization Method. *Journal of Financial Research*, 12(29): 21-40. (*in Persian*)

Raei, R. & Chavoshi, K. (2003). Prediction of Stock Return Behavior in Tehran Stock Exchange: Artificial Neural Networks and Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Financial Research*, 5(1): 97-120. (*in Persian*)

Rockafellar, T.R. & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3): 21-41.

Skolpadungket, P., Dahal, K. & Harnpornchai, N. (2007). Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms. *IEEE congress on evolutionary computation*, CEC: 516-523. DOI: 10.1109/CEC.2007.4424514.

Xu, R., Zhang, J., Liu, O. & Huang, R. (2010). An Estimation of Distribution Algorithm Based Portfolio Selection Approach. *International Conference on Technologies and Applications of Artificial Intelligence*, Hsinchu City. DOI: 10.1109/TAAI.2010.57.