دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره پنجم، شماره چهاردهم، بهار ۱۳۹۸

Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume ۵, Issue ۱۴, Spring ۲۰۱۹

اثبات در ریاضی مدرسه ای، چرا؟

منصوره موسی پور[۱]

دریافت: ۹۸/۳/۱۴ پذیرش:۹۸/۴/۱

چکیده

استدلال کردن و اثبات از جنبه های مهم و ارزشمند ریاضی هستند. بدون آشنایی با استدلال‌ها و اثبات‌ها، درک و فهم کامل دانش آموزان از ریاضی، تحقق نمی‌یابد. در این مقاله نظرات برخی از ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی درباره استدلال و اثبات و اهمیت و ضرورت آن، بیان می گردد. همچنین روش‌های استدلال به همراه مثال‌هایی شرح داده می‌شود.

کلید واژه ها: اثبات، استدلال، ریاضیات مدرسه ای، آموزش ریاضی.

۱. استادیار گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، ایران، نویسنده مسئول، m.mosapour@cfu.ac.ir

مقدمه

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره ای در ریاضیات، از فرایندی به نام "اثبات" نشئت می گیرد. بسیاری از محققان آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعه تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات است. برخی از آنان معتقدند یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت، پرورش افرادی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند و برای تصمیم گیری در مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند (ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱).

به نظر می‌رسد که هیچ کس در جامعه ریاضی، با این ادعا مخالفتی ندارد که ریاضی یک نظریه استنتاجی است و مشخصه آن، اثبات است. بر مبنای دیدگاه مشترک ریاضیدان‌ها، ریاضی با ایده‌ها و اصول موضوع اولیه شروع می‌شود و سپس به وسیله اینها، تمام ایده‌های بعدی تعریف می‌شوند. تمام قضیه‌هایی هم که اصل موضوع نیستند، از اصول موضوع و به وسیله قوانین مشخص استنباطی، اثبات می‌شوند (غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵).

در آموزش ریاضیات، فرایندهای استدلال و اثبات از جایگاه ویژه ای برخوردار هستند. انجام این فرایندها در کلاس درس نیز به عوامل متعددی از جمله درک و فهم معلمان و دانش آموزان از اثبات، دوره تحصیلی، سن دانش آموزان، توانایی‌های ریاضی آنان و عوامل دیگر وابسته است (ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۲).

شورای ملی معلمان ریاضی در NCTM-۲۰۰۰ بیان می‌دارد:" دانش آموزان باید قادر باشند:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی ریاضی، تشخیص دهند؛
- حدسیه‌های ریاضی بسازند و راجع به درستی آنها، تحقیق کنند؛
- ادعاها و اثبات‌های ریاضی بسازند و آنها را ارزیابی کنند؛
- انواع مختلف استدلال و روش‌های اثباتی را انتخاب و استفاده کنند."(به نقل از غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵)

همچنین شورای ملی معلمین ریاضی در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه ای، بیان می‌دارد که:" استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های گوناگون توسعه می‌دهد. همچنین، افرادی که استدلال می کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند"(به نقل از ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱).

با این حال، ممکن است که معلمان ریاضی، هنوز اهمیت اثبات‌ها برایشان روشن نباشد زیرا معلوم نیست که بالاخره به طور صریح، چه چیزی اثبات به حساب می‌آید(راس،۲۰۰۰، به نقل از غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵). در واقع ما بدون وجود تعاریف مناسب و کافی از مفاهیم، نمی‌توانیم به طور کامل مشخص کنیم درباره چه چیزی صحبت می کنیم و در نتیجه نمی‌توانیم از حیث داشتن اثباتی رسمی و بی‌عیب و نقص، خیالمان راحت باشد (تال، ۱۳۸۵).

لدی(۲۰۰۱)(به نقل از ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۲)یکی از ساده ترین و پرکاربردترین تعاریف اثبات را ارائه می‌دهد. او بیان می‌دارد که اثبات یک استدلال معقول و منطقی از حقایق قابل قبول است. هارل و ساودر(۲۰۰۷)معتقدند که معنای اثبات و نقش آن و هرآنچه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تایید و پذیرش اثبات از شخصی به شخص دیگر و از جامعه ای به جامعه دیگر متفاوت است.

رونده(۱۳۹۵)معتقد است که" اثبات روندی است که با به‌کار گیری قواعد خاصی، به پذیرش درستی یک ادعا می‌انجامد" و اینکه " در نهایت همه اثبات‌ها یک هدف را دنبال می کنند: یافتن حقیقت."

ایگل ویتس و استویل(۱۳۷۰)(به نقل از ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱)معتقدند، برخلاف استدلال‌هایی که در بحث‌های روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرند، هر مرحله از اثبات ریاضی باید از لحاظ منطقی درست باشد و همین ملاک است که اثبات‌های ریاضی را مشکل می‌کند؛ زیرا هر شخصی به سادگی نمی‌تواند مجموعه ای از گزاره‌های معقول را بسازد. هارل(۲۰۰۸)نیز بیان می‌دارد که اثبات ریاضی استدلالی ویژه و خاص است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره ارائه می‌دهد.

بالاچف(۱۹۸۷)(به نقل از ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱)اثبات را توضیحی تعریف می‌کند که توسط یک جامعه معین و در یک زمان مشخص پذیرفته می‌شود.

هنا(۱۹۹۰)، تصورات مختلف اثبات در ریاضی را به سه جنبه تقسیم کرده است:

- اثبات صوری: اثبات به عنوان یک مفهوم نظری در منطق صوری که ممکن است به عنوان ایده آلی که عمل ریاضی واقعی تنها تقریبی از آن است، در نظر گرفته شود.
- اثبات به عنوان یک مفهوم هنجاری که تعریف می‌کند که از نظر ریاضیدان‌های مطرح، چه چیزی قابل قبول است.
- تدریس اثبات: اثبات به عنوان یک فعالیت در آموزش ریاضی که در خدمت توضیح دادن ایده‌هایی است که این ارزش را دارند که به دانش آموزان منتقل شوند.

در این تقسیم بندی، هنا بین اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند و اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند، تمایز قایل می‌شود. به عقیده وی، اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند، فقط نشان می‌دهند که یک قضیه درست است، در حالیکه اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند، نشان می‌دهند که چرا یک قضیه درست است و در نتیجه، اثبات‌های توضیحی باعث فهم و درک بهتری از ریاضی می‌شوند(غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵).

ضرورت و اهمیت استدلال و اثبات

قرن‌ها است که ریاضی به عنوان والاترین درس برای تربیت انسان‌ها تدریس شده و ادعا می‌شود ریاضی، "فکر کردن" و "استدلال کردن" را به دانش آموزان می‌آموزد. بر اساس استانداردهای آموزش ریاضی، توانایی منبعث از آموزش ریاضی، زمانی واقعی است که بتواند در بیرون از محیط کلاس درس، یعنی در زندگی روزانه افراد، بروز پیدا کند. اما در زندگی روزانه، کسی از ما نمی‌خواهد که نشان دهیم " اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است" بلکه از ما می‌خواهند به قضاوت" بنشینیم، "تصمیم گیری" کنیم، از "ادعای" خود دفاع کنیم و برای قانع کردن دیگران"استدلال" کنیم... . پس توانایی استدلال کردن محدود به ریاضی نمی‌شود. هدف از یادگیری روش‌های مختلف استدلال در واقع کمک به دانش آموزان است تا در آینده قادر باشند بسته به موقعیت پیش آمده، روش مناسب را به طور آگاهانه به کار گیرند (کریمی فردین پور، ۱۳۸۵).

محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مدرسه ای مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تاکید بر استدلال و اثبات، غیر ممکن است. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبه ابزاری و رویه ای پیدا می‌کند. همچنین آنها در تحقیقات خود نشان می‌دهند، دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می تواند غیر منطقی و غیر مستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان علمی مستدل به جای مجموعه ای از رویه‌ها یاد گرفته می‌شود، دانش به دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش آموزان

کمک می کند، فعالیت های ریاضی را به عنوان یک مجموعه منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت های دیگر ارتباط دهند(ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱).

غلام آزاد و گویا(۱۳۸۵)با توجه به نظر آموزشگران ریاضی، نقش اثبات در ریاضی را موارد زیر بیان کرده‌اند:

- تایید درستی یک عبارت؛
- توضیح چرایی درستی یک عبارت؛
- ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛
- کشف یا خلق جدیدی در ریاضی؛
- نظام وار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی.

باید توجه داشت که اساس ریاضیات، استدلال است. در حالی که علم توسط مشاهده تایید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تایید قرار می‌گیرد. بنابراین جوهره ریاضیات در اثبات‌ها نهفته است و باید به تفاوت بین مثال، حدسیه و اثبات، توجه کرد. نتایج ریاضی، تنها زمانی معتبر هستند که دقیقاً اثبات شوند. می‌توان درستی نتایج را در تعداد محدودی از حالت‌ها به طور مستقیم نشان داد ولی دانش آموزان باید بدانند که تمام آنچه به آنها نشان داده شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که آن نتیجه کاملاً به اثبات نرسیده است، تنها شاهدی است برای یک حدس. ساختار بحث‌های معتبر یا اثبات‌ها و بحث‌های انتقادی، جزء لاینفک ریاضی ورزیدن است. اگر توانایی استدلالی در دانش آموزی رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه ای از رویه‌ها و مثال‌های تکراری فاقد تفکر اینکه چرا چنین هستند، تبدیل می‌شود. از این رو، هدف معلم‌های ریاضی باید این باشد که هر چیزی را در ریاضی توضیح دهند تا حدی که در سطح دانش ریاضی دانش آموزان، منطقی و موثر، جلوه کند(راس، ۱۳۸۵).

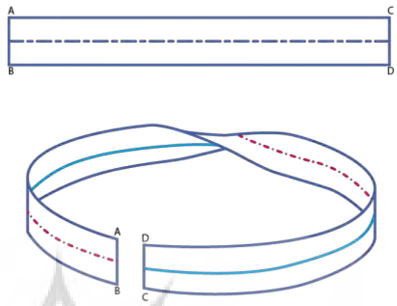
راس(۱۳۸۵)همچنین بیان می‌دارد:"یکی از مهم ترین اهداف تدریس ریاضیات، آموزش استدلال منطقی به دانش آموزان است. استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارت بنیادی است. برای رسیدن به این هدف، معلم‌ها باید به ریاضی، به عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه ای تک تک دانش آموزان دارد، نگاه کنند".

ریاضیدانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق تری است. آنها بر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند زیرا چشم‌ها می توانند ما را منحرف کنند. اندازه گیری نمی‌تواند ثابت کند زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه گیری، به دقت ابزار بستگی دارد. آزمایش نیز به طور قطع ثابت نمی کند زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست. البته در برخی موارد، بین ریاضیدانان نیز نظرات و دیدگاه‌های مختلفی در مورد نقش و اهداف اثبات و آنچه که یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضیدانان مشخص شده است، دانش آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند(ریحانی و کلاهدوز، ۱۳۹۱).

نیاز به اثبات از یکی از قانون‌های اساسی منطق-یعنی قانون کفایت دلیل- سرچشمه می‌گیرد(منطق، علمی است که با قانون‌های درست اندیشیدن سر و کار دارد). این قانون شامل این شرط است که گفتار ما باید دارای اساس و تکیه گاه باشد، یعنی باید با برهان‌های به حد کافی محکمی همراه باشد که بتواند درستی گفتار ما را تایید کند و نشانه سازگاری آن با حقیقت باشد. چنین برهان‌هایی می توانند شامل استناد به مشاهده و آزمایشی باشند که درستی گفتار ما به وسیله آنها بتواند بررسی شود و یا از استدلال صحیحی متشکل از یک سلسله قضاوت تشکیل شده باشند. در ریاضیات، نوع دوم ارائه برهان بیشتر رایج است...اکنون این پرسش مطرح می‌شود که آیا اگر درستی گزاره ای که می‌خواهیم ثابت کنیم به خودی خود کاملاً واضح باشد، باز باید

زحمت اثبات آن را به خودمان بدهیم؟ ... در اینجا جا دارد یادآوری کنیم که یک دانش دقیق نمی‌تواند دائم بر "واضح بودن" تکیه کند زیرا مفهوم "واضح بودن" بسیار مبهم و ناپایدار است: آنچه یک نفر واضح می‌شمارد، برای دیگری ممکن است بسیار مشکوک باشد(تیسوف، ۱۳۶۳).

مثال جالبی از هندسه می‌آوریم که چگونه یک "واقعیت به ظاهر واضح"، ممکن است گمراه کننده باشد: یک نوار کاغذی بردارید و روی آن یک خط راست، در طول نوار بکشید؛ سپس با قیچی نوار را از روی این خط ببرید. پرسش این است: اگر قبلاً دو سر نوار را به هم چسبانده باشیم، چه روی خواهد داد؟ حتماً بیشتر شما بی‌درنگ جواب خواهید داد: نوار دو تکه می‌شود. ولی این پاسخ می‌تواند اشتباه باشد. به این آزمایش توجه کنید: یک نوار کاغذی بردارید و پس از آنکه نیم تاب به آن دادید، دو سر آن را به هم بچسبانید تا یک حلقه درست شود. با این کار، یک نوار موبیوس به دست می‌آید(شکل ۱).



شکل ۱. نوار موبیوس

حال اگر این نوار را در طول یک خط بسته که به فاصله مساوی از دو لبه کاغذ رسم شده ببرید، نوار به دو قسمت مساوی بریده نخواهد شد، بلکه دوباره یک نوار به دست می‌آید. اینگونه واقعیت‌ها ما را وا می‌دارد پیش از تکیه بر "وضوح"، بیشتر فکر کنیم(تیسوف، ۱۳۶۳).

روش های استدلال

در این بخش با استفاده از کتاب گویا و همکاران(۱۳۹۳) و مقاله کریمی فردین پور(۱۳۸۵) به شرح و توضیح پنج نوع از روش‌های استدلال می‌پردازیم.

الف) درک شهودی

این روش، وابسته به درک شهودی و احساس است. استدلال در این روش متکی به حواس و غرایز افراد است و از این رو ممکن است اشخاص متفاوت، روش‌های متفاوتی داشته باشند.

به طور مثال با درک شهودی می‌توان به آسانی دریافت که کوتاهترین فاصله بین دو نقطه برابر با اندازه پاره خطی است که آن دو را به هم وصل می‌کند. اما درک شهودی برخی اوقات روش کاملاً قابل اطمینان نیست و آگاهی کامل را به دست نمی‌دهد. به طور مثال به مطلب زیر توجه کنید که از(کریمی فردین پور، ۱۳۸۵)نقل شده است:

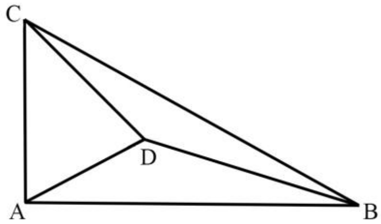
" وقتی آقای رابینسون داستان زیر را در کلاس ریاضی مطرح کرد، دانش آموزان با مساله جالبی رو به رو شدند:

همان طور که اغلب شما احتمالاً می‌دانید، من یک حیاط به شکل مثلث قائم الزاویه و یک سگ باوفا به نام فیدو دارم. می خواهم وقتی مدت کوتاهی جایی می‌روم، فیدو از حیاط مراقبت کند. می‌خواهم با کوتاهترین طول طناب، فیدو را در نقطه ای از

حیاط محکم ببندم، به طوری که به هر نقطه از حیاط برسد. مشکل این است که نمی‌دانم باید سر طناب را در کجای حیاط به زمین بکوبم؟

رسم شکل به شما برای حل این مساله کمک خواهد کرد. اما آیا شما فقط به کمک رسم شکل، می توانید این نقطه را روی مثلث قائم الزاویه پیدا کرده و اثبات کنید که این نقطه، از سه راس مثلث قائم الزاویه به یک فاصله است؟

از نظر شهودی، به نظر می‌رسد نقطه D باید داخل مثلث قرار گیرد به طوری که طول DB و DC و DA با هم برابر شوند اما در واقع این نقطه روی ضلع BC قرار دارد و اثبات آن با دانستن این قضیه که "میانه وارد بر وتر، نصف وتر است" آسان است. پس شهود مفید است اما همیشه کارساز



شکل ۲

ب) استدلال تمثیلی

در اکثر کارهای روزمره از نتیجه گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمده علمی یا کارهای هنری از تمثیل استفاده می کنیم. تمثیل در واقع یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است.

به طور مثال برای درک بهتر اینکه حاصلضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است، می‌توان از تمثیل بهره برد. به این صورت که، راه رفتن به جلو را عملی مثبت(+)و به عقب رفتن را عملی منفی(−)در نظر می گیریم و جلو بردن فیلم را عملی مثبت(+)و عقب بردن فیلم را عملی منفی(−)در نظر می گیریم. حال اگر فیلمی که صحنه به عقب رفتن یک فرد را نشان می‌دهد(−)، به عقب برگردانیم(−)، آن فرد در حالت حرکت به جلو دیده می‌شود(+).

البته تمثیل محدودیت هایی نیز دارد و یک مثال زیبا از تمثیل نادرست را می توان در داستان طوطی و بقال در مثنوی معنوی، اثر مولوی، دید.

ج) استدلال استقرایی

استدلال استقرایی روش نتیجه گیری بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات است. این روش برای دانشمندان علوم تجربی کاربرد فراوانی دارد.

به طور مثال، گالیله دانشمند بزرگ ایتالیایی، با مشاهده رفتار نوسانی وزنه‌های آویزان، موفق به کشف‌هایی شد که در نهایت او را قادر به اختراع ساعت آونگ دار کرد. یکی از کشف‌هایی که گالیله را در اختراع ساعت آونگ دار یاری داد، دیدن رابطه بین طول آونگ و زمان نوسان بود. او بر اساس مشاهدات و اندازه گیری‌هایی که انجام داد نتیجه گرفت که زمان نوسان برابر با جذر طول آونگ است.

به عنوان مثالی دیگر می‌توان به مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها اشاره کرد. اگر چند مثلث گوناگون(قائم الزاویه، متساوی الاضلاع، مختلف الاضلاع و ...) رسم کنیم و زوایای داخلی آنها را اندازه بگیریم و مجموع آنها را حساب کنیم، برابر با ۱۸۰ درجه می‌شود. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع زوایای داخلی مثلث ها برابر با ۱۸۰ درجه است.

اما این استدلال محدودیتی دارد و آن محدودیت این است که، نتیجه ای که با این روش به دست می‌آید ممکن است با به دست آمدن مشاهدات جدید، رد شود. به طور مثال ۴و ۶و۸ و ... که همه اعدادی زوج و غیر اول هستند شاید ما را به این نتیجه‌گیری برسانند که هیچ عدد زوجی، اول نیست. اما این نتیجه گیری نادرست است زیرا ۲ عددی زوج و اول است.

د) استدلال استنتاجی

استنتاج منطقی، استفاده از قوانین حاکم بر منطق ریاضی است. آنچه از طریق قوانین منطق ریاضی اثبات می‌شود، بدون شک از طرف همه پذیرفته می‌شود. در واقع این استدلال، روش نتیجه گیری بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم.

به طور مثال می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموع دو عدد زوج باز هم عددی زوج است. اگر یک عدد زوج دلخواه را با $۲n$ نشان دهیم و عدد زوج دلخواه دیگر را با $۲m$ در اینصورت داریم:

$$۲n + ۲m = ۲(n + m) = ۲k,$$

که باز هم عددی زوج است.

روشی از اثبات است که آن را می‌توان به عنوان حالتی خاص از استدلال استنتاجی در نظر گرفت، **استقرای ریاضی** است. در استقرای ریاضی از یک ابزار دقیق و قوی ریاضی یعنی اصل استقرای ریاضی، کمک می‌گیریم.

اصل استقرای ریاضی: فرض کنیم $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(۱)$ درست باشد و برای هر n از درستی $P(k)$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

به طور مثال می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع اعداد از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲}$. یعنی باید حکم زیر را درباره اعداد طبیعی ثابت کنیم:

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n\left(n + ۱\right)}{۲}.$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم که $\frac{۱\left(۱+۱\right)}{۲} = ۱$. پس $P(۱)$ درست است.

حال فرض می‌کنیم که $P(k)$ درست باشد، یعنی:

$$۱ + ۲ + \cdots + k = \frac{k\left(k+۱\right)}{۲}.$$

باید ثابت کنیم که $P(k+۱)$ نیز درست است. توجه می‌کنیم که با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$۱ + ۲ + \cdots + k + \left(k + ۱\right) = \frac{k\left(k + ۱\right)}{۲} + \left(k + ۱\right)$$

$$= \frac{(k + ۱)(k + ۲)}{۲}$$

پس $P(k+۱)$ نیز درست است و در نتیجه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

نکته ای که در اینجا باید به آن اشاره کرد، تفاوت استقرای ریاضی و استدلال استقرایی است. همانطور که دیدیم در استقرای ریاضی با آزمایش یک(یا چند)مورد و گذراندن مراحل اصل استقرای ریاضی، که در آن از استدلال استنتاجی استفاده

می‌شود، می‌توانیم مطمئن باشیم که نتیجه به دست آمده، کاملاً درست و یقینی است. اما در استدلال استقرایی با مشاهده چند مورد، حدسیه یا نتیجه ای می‌سازیم که قطعیتی در مورد آن وجود ندارد و احتمال رد شدن آن با پیدا شدن نمونه ای نادرست، وجود دارد.

۵) برهان خلف

برهان خلف، نوعی اثبات غیر مستقیم است و طی سه مرحله انجام می‌شود:

۱- فرض می‌کنیم نقیض آنچه می‌خواهیم اثبات کنیم، درست باشد(فرض خلف).

۲- نشان می‌دهیم که این فرض، نتیجه ای می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.

۳- وقتی به تناقض رسیدیم، نتیجه می‌گیریم فرضی که در ابتدا مورد نظر قرار داده بودیم، نادرست است.

به طور مثال فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم اگر مربع عددی فرد باشد، خود آن عدد نیز فرد است؛ یعنی اگر $n^۲$ فرد باشد، n نیز فرد است.

فرض کنیم(فرض خلف)که n زوج باشد. پس k وجود دارد که $n = ۲k$. بنابراین:

$$n^۲ = (۲k)^۲ = ۲\left(۲k^۲\right).$$

یعنی $n^۲$ زوج است که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل می‌شود و n باید عددی فرد باشد.

جمع بندی و نتیجه گیری

تجربه‌های تدریسی و تحقیقات متعدد نشان می‌دهند که دانش آموزان مدرسه ای، هم به استنتاج و هم به استقرای تجربی نیازمندند و بر این نکته اجماع وجود دارد که اثبات، قلب ریاضی است. اما همانطور که گلیدن(۱۹۹۶)هشدار داده است باید مراقب باشیم که به خاطر عجله ای که برای واقعی کردن ریاضی برای دانش آموزان داریم، ممکن است به این خطر بیفتیم که هرگز، به آنها ریاضی واقعی را معرفی نکنیم(غلام آزاد و گویا، ۱۳۸۵).

همچنین ریحانی و کلاهدوز(۱۳۹۱)بیان می‌دارند که:"علی رغم تاکید فراوان بر اهمیت و نقش استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه ای، بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش آموزان در همه سطوح تحصیلی در درک و فهم و ساخت و اثبات استدلال‌های منطقی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین، پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که برخی از دانش آموزان، ضرورت اثبات را درک نکرده و فقط در حد قبول شدن در امتحانات ریاضی برای آن اهمیت قائل‌اند."

بنابراین پیشنهاد می‌گردد تا با توجه به کارکردهای اثبات که در این مقاله نیز به آنها اشاره گردید، زمینه‌های آشنایی با فرایند استدلال و فواید آن در کتاب‌های درسی و مقالات علمی فراهم گردد. همچنین اثبات‌های زیبا و محکم و مستدل ریاضی به نحو موثرتری ارائه شود تا ریاضی فقط جنبه حفظی و ابزاری و رویه ای پیدا نکند.

منابع

۱) تال، دیوید(۱۳۸۵). ماهیت اثبات ریاضی. ترجمه: عرفان صفر، رشد آموزش ریاضی، دوره بیست و سوم، شماره۳، ص ص ۱۱ الی ۱۷.

۲) تیسوف، آ. ای. فه(۱۳۶۳). اثبات در هندسه. ترجمه: پرویز شهریاری و جلیل فقیهی، آشتی با ریاضیات، سال هفتم، شماره ۳، ص ص ۲۸۹ الی ۳۵۳.

۳) راس، کنت ا. (۱۳۸۵). ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه ای. ترجمه: فاطمه مرادی، محبوبه شریعتی و سپیده چمن آرا، رشد آموزش ریاضی، دوره بیست و سوم، شماره۳، ص ص ۳۰ الی ۳۳.

۴) رونده، فولکر(۱۳۹۵). چرا اثبات؟. ترجمه: فاطمه اختری و رسول نصر اصفهانی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۵۸، ص ص ۱۲۷ الی ۱۳۴.

۵) ریحانی، ابراهیم، وکلاهدوز، فهیمه(۱۳۹۱). فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه ای. رشد برهان ریاضی، دوره بیست و دوم، شماره۱، ص ص ۴۴ الی ۴۸.

۶) ریحانی، ابراهیم، وکلاهدوز، فهیمه(۱۳۹۲). ماهیت فرهنگی واجتماعی اثبات در آموزش ریاضی. رشد برهان ریاضی، دوره بیست و دوم، شماره۳، ص ص ۳۰ الی ۳۳.

۷) غلام آزاد، سهیلا، و گویا، زهرا(۱۳۸۵). نقش اثبات در برنامه درسی ریاضی مدرسه ای. رشد آموزش ریاضی، دوره بیست و سوم، شماره۳، ص ص ۴ الی ۱۰.

۸) کریمی فردین پور، یونس(۱۳۸۵). اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه ای. رشد آموزش ریاضی، دوره بیست و سوم، شماره۳، ص ص ۱۸ الی ۲۱.

۹) گویا، زهرا، گویا، مریم، ظهوری زنگنه، بیژن و دیگران(۱۳۹۳). ریاضی پایه دوره پیش دانشگاهی(چاپ بیستم). تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۰) Harel, G. (۲۰۰۸). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part I: focus on proving. ZDM Mathematics Education. ۴۰, ۴۸۷-۵۰۰.

۱۱) Harel, G., & Sowder, L. (۲۰۰۷). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

۱۲) Hanna, G. (۱۹۹۰). Some pedagogical aspects of proof. Interchange, ۲(۱), ۶-۱۳.