مدل اصلاح یافته R+F(G) و جوابهای متقارن کروی ایستا

محمدی‌پور ناصر[۱]

چکیده

این کار با اضافه کردن $F(G)$ به کنش اینشتین-هیلبرت، جوابهای متقارن کروی ایستا در خلأ بررسی شده است. با معرفی ضریب نا معین لاگرانژی α، کنش را بازنویسی کرده و معادلات حرکت را به دست آورده ایم، سپس به ازاء $G = G_0$ جوابها مورد بررسی قرار گرفته که منجر به جواب دوسیته با $R_0 = 4\Lambda$ و $G_0 = \frac{8}{3}\Lambda^2$ شده است. برای دسته وسیعی از این مدل‌ها جواب را بدست آورده‌ایم. سپس کمیت های ترمودینامیکی را روی این جواب‌ها بررسی کردیم. اولین جواب، بدیهی دوسیته(شوارتز شیبدآنتی دوسیته) ودیگری یک جواب غیر بدیهی است.

کلید واژه ها: "گرانش اصلاح یافته"،"گاوس بونت"، "متقارن کروی".

[۱]. دانشگاه فرهنگیان، پردیس شهید مقصودی همدان، همدان، نویسنده مسئول، naser.kurd@cfu.ac.ir.

مقدمه

یکی از موضوعات کیهان شناسی نوین، انبساط شتابدار عالم است که داده‌های رصدی گواهی بر این امر هستند[۴و۳و۲و۱]. این شتاب توسط عبارتی به نام انرژی تاریک بیان می شود، که برای توصیف آن کاندیداهای زیادی با ویژگی‌های انرژی تاریک در نظرگرفته شده است.

یکی از مناسب ترین کاندیداها، ثابت کیهان شناسی است که البته از دو مشکل تنظیم ظریف و انطباق رنج می برد[۵]. یک میدان دینامیکی اسکالر، با رفتار کوینتسنس یا فانتوم را نیز می توان به عنوان یکی دیگر از کاندیداها نام برد[۶].

رویکرد دیگری که ریشه‌ی گرانشی دارد، اصلاح تئوری نسبیت عام اینشتین است. چرا که این نظریه ممکن است نتواند گرانش را در انرژی‌های خیلی بالا توصیف کند. بنا بر این نظریه‌های اسکالر-

تانسوری ارائه شدند که یکی از ساده‌ترین آنها نظریه‌ی برنز –دیکی است[۷].

بین همه‌ی نظریه‌های اصلاح گرانشی، می‌توان نظریه‌ی اصلاحی F(R) را به عنوان یکی از منا سب ترین توصیف ها برای انبساط شتابدار کیهان در نظر گرفت[۹و۸]. در این نظریه، به کنش استاندارد(کنش هیلبرت - اینشتین) جملاتی از انحناء اضافه می گردد که با کاهش انحناء اثر خود نشان می دهند و به خوبی می توانند انبساط شتابدار اخیرعالم را نشان دهند.

دسته‌ی دیگری از نظریه های اصلاحی گرانش، ریشه در نظریه‌ی ریسمان دارند و با اضافه کردن جملاتی مانند جمله‌ی گاوس –

بونت (GB) به کنش استاندارد، آن را اصلاح می کنند[۱۰].

نوجیری[۱] و دیگران نشان داده‌اند که می‌توان جواب‌های انرژی تاریک را از یک میدان اسکالر درگاوس –بونت به دست آورد[۱۱]. گرانش F(G) [۱۲] یکی دیگر از نظریه‌های گرانش اصلاح یافته است که می تواند نقش انرژی تاریک گرانشی را ایفا کند. در همین راستا، برخی چگالی لاگرانژی را به صورت جمع انحناء (اسکالر ریچی) با GB در نظر گرفته وآن را F(R,G) می‌خوانند[۱۴و۱۳].

در این کار ما به بررسی جواب‌های متقارن کروی ایستا مدل‌های F(R,G) می پردازیم. از روش انجام شده در مرجع [۱۵] که جهت بررسی جواب‌های متقارن کروی ایستا مدل‌های F(R) استفاده شده، سود می بریم. مقاله شامل پنج بخش است. در بخش دوم با مشخص کردن کنش، معادلات میدان را در رویکرد متریک به دست می‌آوریم. جوابهای متقارن کروی ایستا و معادلات حرکت با استفاده از ضریب نامعین لاگرانژی را در بخش سوم استخراج می کنیم. در بخش چهارم جواب معادلات، به ازاء انحناء و λ ثابت را بررسی می کنیم ودر آخر نتیجه گیری و مروری بر کار را در بخش پنج ارائه می دهیم.

معادلات میدان و تانسور گرانشی اصلاح شده‌ی F(G)

کنش را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$s=\int d^4x\sqrt{-g}\left[R+F(G)\right]+S_M \qquad (۱)$$

---

[۱] Nojiri

که در آن R اسکالر ریچی و F(G) تابعی از عبارت $G = R^2 + R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ می باشد. $R^{\mu\nu}$ و $R^{\mu\nu\rho\sigma}$ به ترتیب تانسورهای ریچی و ریمان می‌باشند. با وردش گرفتن از کنش (۱) نسبت به متریک، معادلات میدان را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} + G^{f(G)}_{\mu\nu} \qquad (۲)$$

$G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین، $T_{\mu\nu}$ تانسور مومنتم–انرژی ماده و $G^{F(G)}_{\mu\nu}$ تانسور مومنتم–انرژی موثر ناشی از اصلاح هندسه است که:

$$G^{F(G)}_{\mu\nu} = -8\Big[R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma} g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - R_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + \frac{R}{2}\left(g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}\right)\Big] \nabla^{\rho}\nabla^{\sigma} F_{,G} - \left(G F_{,G} - F\right) g_{\mu\nu} \quad (3)$$

که $F_{,G} = \dfrac{dF}{dG}$ است.

جواب‌های متقارن کروی ایستا در خلاء

متریک متقارن کروی ایستا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$ds^۲ = -B(r) e^{۲\lambda(r)} dt^۲ + \frac{dr^۲}{B(r)} + r^۲ d\theta^۲ + r^۲ sin^۲ d\varphi^۲, \qquad (۴)$$

که در آن B(r) و λ(r) توابع نامشخصی از r هستند. شکل انحناء اسکالر و جمله‌ی گاوس–بونت در این متریک را بازنویسی می‌کنیم

$$R = ۳B'(r)\lambda'(r) + ۲B(r)\lambda''(r) + B''(r) + \frac{۴B'(r)}{r} + \frac{۴B(r)\lambda'(r)}{r} + \frac{۲B(r)}{r^۲} - \frac{۲}{r^۲} + ۲B(r)\lambda'(r)^۲, \quad (۵)$$

$$G = R^۲ - \left(B(r) + \frac{۲B'(r)}{r}\right)\left(۳B(r) + \frac{۴B'(r)}{r}\right) - \left(\frac{B'(r)}{r^۲} + \frac{B(r)}{r^۳} - \frac{۱}{r^۳}\right)\left(۱۶B'(r) + \frac{۱۲B(r)}{r} - \frac{۱۲}{r}\right),$$

(۶). در اینجا مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به r را با ʹ و" نشان داده‌ایم. با معرفی ضریب نامعین لاگرانژی α و استفاده از معادله‌ی (۵)، کنش (۱) را بازنویسی می‌کنیم

$$S=\int dt\int r^{۲}\, e^{\lambda(r)}dr[\frac{R}{۲}+F(G)-\frac{\alpha}{۲}[R-B''(r)$$
$$-۳B'(r)\lambda'(r)-۲B(r)\lambda'(r)^{۲}-۲B(r)\lambda''(r)+\frac{۲}{r^{۲}}$$
$$-۴\frac{B'(r)}{r}-۴\frac{B(r)\lambda'(r)}{r}-۲\frac{B(r)}{r^{۲}}]]. \qquad (۷)$$

وردش نسبت به R مقدار $\alpha=۱+۴RF_{,G}$ را به ما داده که با قرار دادن در معادله ی (۷) و انتگرال گیری جزء به جزء لاگرانژی را به صورت تابعی از R، G، B، λ و مشتقات مرتبه اول آن ها نسبت به r به دست می‌آوریم:

$$L=r^{۲}e^{\lambda(r)}[\left(\frac{R}{۲}+F-۴R^{۲}F_{,G}\right)+۲RF_{,G}(۲\frac{B'(r)}{r}$$
$$+۲\frac{B(r)}{r^{۲}}-\frac{۲}{r^{۲}})-۲R'F_{,G}(B'(r)+۲\lambda'(r)B(r))$$
$$-۲RG'^{F,GG}\left(B'(r)+۲\lambda'(r)B(r)\right)]. \qquad (۸)$$

اولین معادله‌ی حرکت را با وردش نسبت به λ استخراج می‌کنیم:

$$۴Rr^{۲}F_{,G}\left[\frac{B'(r)}{r}+\frac{B(r)}{r^{۲}}-\frac{۲}{r^{۲}}\right]+\left(۲r^{۲}F_{,G}\right)[B'(r)$$
$$+۴\frac{B(r)}{r}+۴B(r)\frac{F_{,GG}}{F_{,G}}G']R'+۲B(r)R''+۲rR^{۲}F_{,GG}$$
$$[(B'(r)+۴\frac{B(r)}{r})G'+۲B(r)\frac{F_{,GGG}}{F_{,GG}}G'^{۲}+$$
$$۲B(r)G'']+r^{۲}(\frac{R}{۲}+F-۴R^{۲}F_{,G})=۰. \qquad (۹)$$

معادله‌ی (۹) مستقل از λ است. دومین معادله‌ی حرکت را از وردش نسبت به B(r) محاسبه می‌کنیم:

$$۲Rr^{۲}\lambda'(r)F_{,G}\left[\frac{R'}{R}+\frac{F_{,GG}}{F_{,G}}G'+\frac{۲}{r^{۲}}\right]-$$
$$۲Rr^{۲}[F_{,GGG}G'^{۲}+F_{,GG}G'']-۲R''r^{۲}F_{,G}$$
$$-۴r^{۲}G'R'F_{,GG}=۰ \qquad (۱۰)$$

بررسی جواب‌ها به ازاء λ و R ثابت

در معادله‌ی (۱۰)، وقتی λ و R را ثابت در نظر می‌گیریم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$G''F_{,GG}+G'^{2}F_{,GGG}=o,$$
$$\frac{d^{2}}{dr^{2}}F_{,G}=o, \qquad (11)$$

که می‌توان ازآن F را به صورت تابعی از r محاسبه کرد،

$$F_{,G}=ar+b, \qquad (12)$$

a و b ثابت های انتگرال گیری هستند. در تعدادی از مقالات جواب‌های متقارن کروی برای مدل های F(R) بررسی شده است [۱۷و۱۶و۱۵]. سباستیانی[1] و زربینی[2] برای مدل‌های F(R) جوابی مشابه معادله‌ی (۱۲) به دست آورده اند[۱۵]. از آنجا که R و λ ثابت در نظر گرفته شده‌اند لذا می‌توان R را باز نویسی کرد:

$$R=B''(r)+4\frac{B'(r)}{r}+2\frac{B(r)}{r^{2}}-\frac{2}{r^{2}}. \qquad (13)$$

به راحتی می توان از معادله‌ی (۱۳) به جواب‌های شوارتزشیلد دوسیته و آنتی‌دوسیته رسید. با گرفتن مشتق ار معادله‌ی (۹) نسبت به r و در نظر گرفتن R و λ ثابت به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$B''(r)(6ar^{3}+4br^{2})+12ar^{2}B'(r)-(12ar^{2}+8b)B(r)+(4ar+8b-4aR_{0}r^{3})=0, \qquad (14)$$

در اینجا R_0 مقدار ثابت انحناء است. جواب عمومی معادله‌ی (۱۴) به صورت زیر به دست می آید.

$$B(r)=\frac{4b+2ar+aR_{0}r^{3}}{2(2b+3ar)}+\frac{D_{1}}{2br+3ar^{2}}+\frac{D_{1}r^{2}}{3(2b+3ar)}, \qquad (15)$$

D_1 و D_2 ثابت های انتگرال گیری هستند. با در نظر گرفتن $a=0$ به جواب بدیهی شوارتزشیلد دوسیته و آنتی‌دوسیته می رسیم

$$B(r)=1+\frac{C_{1}}{r}+C_{2}r^{2}, \qquad (16)$$

که در مقایسه با جواب شوارتزشیلد دوسیته و آنتی‌دوسیته می توان C_1 و C_2 را به دست آورد:

---
[1] Sebastiani
[2] Zerbini

$$C_۱ = \frac{D_۱}{۲b} = -۲M \ , \ C_۲ = \frac{D_۲}{۶b} = \frac{\Lambda}{۳}. \qquad (۱۷)$$

جواب معادله ی (۱۴) به ازاء b=۰ به صورت زیر است:

$$B(r) = \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{R_.}{۲}r^۲ + C_۳ r + \frac{C_۴}{r^۲}\right), \qquad (۱۸)$$

معادله ی (۱۸) یک جواب متقارن کروی ایستا غیر بدیهی در مدل های F(R,G) است که $C_۳$ و $C_۴$ ثابت‌های انتگرال گیری هستند.

نتیجه گیری

در این کار، معادلات حرکت را برای متریک متقارن کروی ایستا به روش ضریب نامعین لاگرانژی برای گرانش اصلاح یافته‌ی F(R,G) استخراج کرده ایم. در این رویکرد نشان دادیم که برای دسته‌ی بزرگی از متریک‌ها معادلات حرکت به یک معادله تبدیل می‌شود. در حل این معادله علاوه بر جواب های دقیقی که می شناختیم یک جواب جدید را نیز به دست آورده ایم.

منابع

[۱] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. ۷۱۷, ٥٦٥ (۹۹۹۹).

[۲] C. L. Bennett et al., Astrophys. J. Suppl. ١٤٨,١ (٢٠٠٣).

[۳] M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D ٦٩, ١٠٣٥٠١(٢٠٠٤).

[٤] S. W. Allen, et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. ٣٥٣, ٤٧٧ (٢٠٠٤).

[٥] P. J. Steinhardt, Critical Problems in Physics (٩٩٩٧), Princeton University Press.

[٦] T. Padmanabhan, Phys. Repts. ٣٨٠, ٢٣٥ (٢٠٠٣); E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D ١٥, ١٥٥٣ (٢٠٠٦); Y -F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J. Q. Xia, Phys. Rep. ٤٩٣, ١, ١-٦٠ (٢٠١٠).

[٧] C. Brans and C. H. Dicke, Phys. Rev. ١٢٤, ٩٢٥ (١١٦١).

[٨] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. ٤, ١١٥ (٢٠٠٧).

[٩] S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv:٠٨٠١.٤٨٤٣ [astro-ph]; arXiv:٠٨٠٧.٠٦٨٥ [hep-th]; A. De Felice, S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. (٢٠١٠). arXiv:١٠٠٢.٤٩٢٨.;

T. P. Sotiriou and V.Faraoni,arXiv:٠٨٠٥.١٧٢٦ [gr-qc]; F. S. N. Lobo, arXiv:٠٨٠٧.١٦٤٠ [grqc]; S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. ٤٠, ٣٧٧ (٢٠٠٨); M. R. Setare, Int. J. Mod. Phys. D١٧, ٢٢١٩, (٢٠٠٨); Astrophys. Space Sci.٣٢٦, ٢٧, (٢٠١٠)

[١٠] I. Antoniadis, J. Rizos and K. Tamvakis, Nucl. Phys. B ٤١٥ (٩٩٩٤) ٤٩٧; S. Kawai, M. A. Sakagami and J. Soda, Phy. Lett. B ٤٣٧ (٩٩٩٨) ٢٨٤, [arXiv:gr-qc/٩٨٠٢٠٣٣]; S. Kawai and J. Soda, Phy. Lett. B ٤٦٠ (٩٩٩٩) ٤١, [arXiv:gr-qc/١١٠٣٠١٧];P. Kanti, J. Rizos and K. Tamvakis, Phys.

Rev. D ٥٩ (٩٩٩٩) ٠٨٣٥١٢; N. E. Mavromatos and J. Rizos, Phys. Rev. D ٦٢ (٢٠٠٠) ١٢٤٠٠٤; T. Koivisto and D. F. Mota, Phys. Lett. B ٦٤٤ (٢٠٠٧) ١٠٤, [astro-ph/٠٦٠٦٠٧٨]; T. Koivisto and D. F. Mota, Phys. Rev. D ٥٥ (٢٠٠٧) ٠٢٣٥١٨, [hep-th/٠٦٠٩١٥٥]; M. Satoh, S.Kanno and J. Soda, Phys. Rev. D ٧٧ (٢٠٠٨) ٠٢٣٥٢٦, [arXiv: ٠٧٠٦.٣٥٨٥]; M. Satoh and J. Soda, JCAP ٠٨٠٩ (٢٠٠٨) ٠٩٩, [arXiv:٠٨٠٦.٤٥٩٤].

[١١] S. Nojiri, S. D. Odintsov and M. Sasaki, Phys. Rev. D٧١ (٢٠٠٥) ٩٢٣٥٠٩.

[٩٢] S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. ٤ (٢٠٠٧)١١٥; G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini,Phys. Rev. D ٧٣ (٢٠٠٦) ٠٨٤٠٠٧; S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Phys.Lett. B ٦٣١ (٢٠٠٥) ١; S. Nojiri, S. D. Odintsov and M. Sami, Phys. Rev. D ٧٤, ٠٤٦٠٠٤ (٢٠٠٦); S. Nojiri and S. D. Odintsov, J. Phys. Conf. Ser. ٦٦, ٠١٢٠٠٥ (٢٠٠٧); S. Capozziello, E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B ٦٧١, ٩٩٣ (٢٠٠٩);C. G. Bohmer and F. N. Lobo, [arXiv:gr-qc/٠٩٠٢.٢٩٨٢v٣]; K. Nozari, T. Azizi, M. R. Setare, JCAP ٠٩١٠:٠٢٢, (٢٠٠٩); J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali, Eur.Phys.J.C٦٤, ٤٣٣, (٢٠٠٩); J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali, Phys. Lett. B ٦٧٩, ٣٠٢, (٢٠٠٩).

[١٣] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D ٧١, ٠٦٣٥١٣ (٢٠٠٥).

[١٤] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D ٥٥, ٠٨٦٠٠٢ (٢٠٠٧).

[١٥] L. Sebastiani, S. Zerbini, arXiv:١٠١٢.٥٢٣٠v٣ [gr-qc].

[١٦] S. Capozziello, A. Stabile and A. Troisi, Class. Quant. Grav. ٢٥, ٠٨٥٠٠٤ (٢٠٠٨). [arXiv:٠٧٠٩.٠٨٩١ [gr-qc]]; T. R. P. Carames, E. R. BezerradeMello, Eur. Phys. J. C ٦٤, ١١٣-١٢١ (٢٠٠٩). [arXiv:٠٩٠١.٠٨١٤[gr-qc]]; T. Multamaki and I. Vilja, Phys. Rev. D ٧٤, ٠٦٤٠٢٢ (٢٠٠٦); Phys. Rev. D ٧٦, ٠٦٤٠٢١ (٢٠٠٧); R. Sa_ari, S. Rahvar, Phys. Rev. D٧٧, ١٠٤٠٢٨ (٢٠٠٨); R. Safari, S. Rahvar, Mod. Phys. Lett. A٢٤, ٣٠٥-٣٠٩ (٢٠٠٩).

[١٧] M. Sharif, H. R. Kausar, arXiv:١١٠٢.٤١٢٤ [gr-qc].