نقش غیاث‌الدین جمشید کاشانی در آموزش ریاضیات و ریاضیات محاسباتی

نرگس اکبری [*]

سید علیرضا اشرفی [**]

چکیده:

غیاث‌الدین جمشید کاشانی آخرین ریاضیدان دورهٔ باشکوه تمدن اسلامی است که تأثیر زیادی بر آموزش ریاضیات، ریاضیات محاسباتی و به‌خصوص ریاضیات معماری گذاشته است. در این مقاله، روش کاشانی در محاسبهٔ سینوس 1°، محاسبهٔ عدد π، استخراج ریشهٔ nام و مقایسهٔ آن با روش استوین، مسائل مرتبط با ارث مطابق شرع مقدس اسلام و قضیهٔ اعداد متحابه در نوشته‌های او مورد بررسی قرار گرفته است. مهم‌ترین نکتهٔ مقاله، تأکید بر نقش پراهمیت کاشانی در آموزش ریاضیات و ریاضیات مجاسباتی است؛ چنان‌که وی را می‌توان اولین دانشمند تاریخ دانست که به طور منظم مسائل ریاضیات معماری را مورد مطالعه قرار داده است.

کلیدواژه‌ها: غیاث‌الدین جمشید کاشانی، مفتاح الحساب، رسالهٔ وتر و جیب، رسالهٔ محیطیه، عدد پی، استخراج ریشه.

* کارشناس‌ارشد دانشگاه کاشان/ nargesakbari1391@gmail.com

** استاد دانشگاه کاشان/ ashrafi@kashanu.ac.ir

پژوهش‌نامه کاشان
شمارهٔ پنجم (پیاپی 13)
پاییز و زمستان 1393

1. مختصری دربارهٔ زندگی و آثار کاشانی

در منابع تاریخی اطلاعات زیادی دربارهٔ زندگی غیاث‌الدین جمشید کاشانی وجود ندارد. دلیل این امر آن است که پس از قرن دوازدهم زبان فارسی بر ایران و آسیای مرکزی به عنوان یک زبان ادبی مسلط شد، درحالی‌که زبان عربی به عنوان یک زبان علمی باقی ماند. لذا به دلیل فقدان منابع تاریخی، تنها زندگی کلی کاشانی را می‌توان شرح داد. هدف این مقاله ارائهٔ تصویری از زندگی علمی این ریاضیدان بزرگ ایرانی است. ما تأثیر کاشانی بر آموزش ریاضی و ریاضیات معماری را مورد بررسی قرار داده‌ایم. منبع اصلی ما در بررسی آموزشی کارهای کاشانی، رسالهٔ دکتری حکمت تعالی در سال 2011 و مراجع ***Root extraction by Al-Kashi and Stevin***، ***A study of Risala al-watar wa'l jaib*** و *Al-Risāla Al-Muhītīyya* به ترتیب برای مقایسهٔ استخراج ریشه توسط کاشانی و استوین، محاسبهٔ جیب یک درجه و محاسبهٔ عدد π می‌باشد.

نام کامل این دانشمند، غیاث‌الدین جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی است. لقب او غیاث‌الدین است که به معنای رهایی‌دهندهٔ مذهب می‌باشد. کاشانی در بین مورخان به الکاشی نیز معروف است. استفاده از این نام باعث شده است که برخی او را عرب و نه ایرانی در نظر گیرند. اولین تاریخ شناخته‌شده برای فعالیت علمی کاشانی سال 808 قمری، زمانی است که در کاشان اولین دنباله از سه ماه گرفتگی را نشان داد. در سال 809 قمری کاشانی اولین کتابش، *نردبام آسمان* را که در آن نحوهٔ محاسبهٔ فاصله و حجم اجرام آسمانی بیان می‌کند، کامل کرد. در سال 816 قمری دومین کتابش *زیج خاقانی* را که در کاشان نوشته بود، کامل کرد و به منظور برخورداری از کمک مالی سلطان الغ‌بیگ، فرزند شاهرخ و نوهٔ تیمور از پادشاهان تیموری که در بازهٔ زمانی 812 تا 853 قمری حکم‌فرمایی می‌کرد، به وی اهدا نمود. کاشانی در مقدمهٔ این کتاب از زندگی در فقر خود که به هنگام حل مسائل نجوم داشته است، شکایت می‌کند. برای مطالعهٔ بیشتر روی این موضوع ما به خوانندگان علاقمند توصیه می‌کنیم تا مرجع *Practical Arabic Mathematics* (ص194) را ملاحظه نمایند.

الغ‌بیگ برخلاف پدربزرگش که بیشتر عمر خود را صرف توسعهٔ قلمرو خود از طریق لشکرکشی به کشورهای دیگر می‌کرد، به عنوان یک پادشاه ستاره‌شناس و ریاضیدان به شهرت رسید. وی در سال 796 خورشیدی، مدرسه‌ای را در سمرقند که در آن زمان یکی از بزرگ‌ترین مؤسسات در جهان محسوب می‌شد، تأسیس کرد. زمانی‌که الغ‌بیگ در سال 796 خورشیدی، کاشانی را به همراه سایر ستاره‌شناسان برای کار در دربار سلطنتی به سمرقند دعوت کرد، کاشانی موفق شد از حمایت مالی مطمئنی برخوردار گردد. در سمرقند، کاشانی از مهمان‌نوازی عالی و حمایت سلطان برخوردار شد و با جدیت به تولید علمی خود ادامه داد. در این زمان کاشانی یک نامه برای پدرش فرستاد و در آن زندگی علمی خود را در سمرقند توصیف کرد. در این نامه، «او برای دانشوری و استعداد ریاضی الغ‌بیگ به‌ویژه توانایی او در انجام محاسبات ذهنی بسیار سخت، ارزش بسیاری قائل می‌شود. بیان این نکته در اینجا حائز اهمیت است که کاشانی بعد از خروج از کاشان مکاتباتی با پدر خود داشته و برخی از زوایای زندگی کاشانی از روی این مکاتبات به دست آمده است. در یکی از این نامه‌ها، کاشانی از تحقیر 60 یا 70 نفر از همکاران علمی الغ‌بیگ و ملاقات‌های علمی مکرر که توسط سلطان نظارت می‌شد، سخن می‌گوید. کاشانی چندین مثال از مسائل نجومی مطرح‌شده را در آنجا ارائه می‌کند. این مسائل برای دیگران بسیار سخت بود ولی توسط کاشانی به آسانی حل می‌شد.» (Practical Arabic Mathematics, p. 194) الغ‌بیگ از کاشانی خواست تا یک رصدخانهٔ بزرگ در سمرقند تأسیس کند، با این ویژگی که بزرگ‌تر از رصدخانهٔ موجود در مراغه در ایران که خواجه نصیرالدین طوسی اکثر زندگی کاری خود را در آنجا گذرانده بود باشد. کاشانی موفق به ساخت یک رصدخانهٔ بزرگ شد که از سه طبقه تشکیل شده بود. کاشانی در سحرگاه نوزدهم رمضان سال 832 قمری/ دهم تیرماه سال 808 خورشیدی درحالی‌که فقط حدود 40 سال سن داشت، به دست اشخاصی ناشناس و در محل رصدخانهٔ سمرقند کشته شد.

کاشانی در سراسر زندگی علمی خود هفت اثر در زمینهٔ ریاضی و هفده اثر در زمینهٔ نجوم از خود بر جای گذاشت. او در سال 830 قمری خلاصهٔ *مفتاح الحساب* را

کامل کرده و به الغ‌بیگ اهدا نمود. یکی از آثار ریاضی بزرگ او، رسالهٔ *محیطیه* است که در آن عدد 2π را با دقت 16 رقم بعد از اعشار حساب کرده است. «کاشانی در مقدمهٔ آن بیان می‌کند چقدر می‌خواهد خود را به تقریب نزدیک کند و کثیرالاضلاع‌ها (3×2^{28} ضلع!) چقدر بزرگ هستند و محاسبه چقدر باید دقیق باشد (در 9 رقم شصت‌گانه!). وی ادعا می‌کند که دقت محاسبه π به گونه‌ای است که وقتی از آن برای محاسبه محیط خورشید استفاده شود، با این فرض که قطر آن برابر با 6×10^5 در نظر گرفته شده باشد، خطا کمتر از ضخامت یک موی اسب خواهد بود. (Ibid) به این دلیل، برخی از مورخان، کاشانی را بطلمیوس دوم می‌نامند. بطلمیوس، ستاره‌شناس و ریاضیدان شهیر مصری است که در سال‌های 90 تا 168 میلادی در اسکندریه می‌زیست. معروف‌ترین اثر ریاضی وی کتابی به نام مجموعه ریاضیات است که در سال 150 میلادی نوشته شده است. به علاوه ریاضیدانان امپراتوری عثمانی، هر ریاضیدان ممتاز را الکاشی می‌نامیدند. ادوارد کندی که تقریباً 50 سال از عمرش را به ستاره‌شناسی در لبنان پرداخت، کاشانی را این‌گونه توصیف می‌کند: «کاشانی به خاطر توانایی فوق‌العاده در محاسبه، استفادهٔ آسان از اعداد شصت‌گانه، اختراع کسرهای اعشاری، کاربرد وسیع الگوریتم‌های تکرار و تقریب در محاسبات که حداکثر خطا را کنترل می‌کند و برنامه‌های در حال اجرا را در تمام مراحل بررسی می‌کند، اولین و مهم‌ترین دانشمند علوم محاسباتی است.» وی چنین ادامه می‌دهد که به نظر می‌رسد کاشانی یک ناظر کاملاً شایسته و یک کارشناس فنی نجومی است که نه قبل و نه بعد از او کسی همچون او یافت نمی‌شود.

بسیاری از مورخان، *مفتاح الحساب* را درخشان‌ترین اثر علمی کاشانی می‌دانند. دلیل این اعتقاد ابتدا تنوع وسیع مطالب دربرگیرنده و سپس نقشی است که در آموزش ریاضیات در جوامع اسلامی و حتی جوامع غربی داشته است. *مفتاح الحساب* در مقایسه با اکثر کتاب‌های درسی ریاضی قدیم، اما نه همه، یک کتاب درسی نسبتاً طولانی شامل تنوع وسیعی از موضوعات است. این کتاب شامل پنج مقاله در 276 صفحه است که مباحث حساب اعداد صحیح، حساب کسرها، حساب شصت‌گانه‌ها، هندسه و جبر را پوشش می‌دهد. این کتاب قرن‌ها توسط منجمان، معماران،

صنعتگران، نقشه‌برداران و بازرگانان به عنوان یک کتاب درسی ریاضی در جهان اسلام مورد استفاده قرار می‌گرفته است. کاشانی *مفتاح الحساب* را در قرن پانزدهم برای آموزش عملی ریاضیات به 500 طلبه در مدرسهٔ الغ‌بیگ که خود الغ‌بیگ نیز در این محفل علمی کاندیدا شده بود، مورد استفاده قرار داد. وی در نامهٔ زیر به پدرش (A newly found letter of al-Kashi on scientific life in Samarkand, p. 243) توصیفی از آموزش ریاضی به دست می‌دهد:

وضعیت شهر سمرقند که خدا آن را از سختی حفظ نماید، به شرح زیر است:

فرمانروای آن، الغ‌بیگ، هدیه‌ای بالغ بر سی هزار دینار در نظر گرفته که ده هزار دینار از آن برای طلاب اختصاص یافته است. ده هزار طلبه به طور پیوسته مشغول آموزش و یادگیری و واجد شرایط دریافت کمک مالی هستند. به همین تعداد طلابی از طبقهٔ اشراف وجود دارند که در خانه‌های خود ساکن هستند. در میان آن‌ها 500 نفر وجود دارند که شروع به مطالعه ریاضیات کرده‌اند. از 12 سال گذشته الغ‌بیگ که خدا سلطنت او را تداوم بخشد، به ریاضیات علاقمند است. طلاب نیز بیش از حد به آن تمایل دارند و برای آن سخت در حال کارند. درحقیقت، آن‌ها به سختی تلاش می‌کنند. این هنر (ریاضی) در 12 مکان آموزش داده می‌شود. بنابراین امروزه وضعیت آموزش و یادگیری ریاضی، هیچ همتایی را در فارس و عراق ندارد. 24 محاسب وجود دارند که تعدادی از آن‌ها به مطالعهٔ ستاره‌شناسی و تعدادی دیگر به مطالعهٔ عناصر اقلیدس پرداخته‌اند.

به دلیل نوع طلبه‌ها، *مفتاح الحساب* یک اهمیت کاربردی دارد که مناسب برای آموزش در زمانی است که ریاضیات واقعاً مورد نیاز شغل‌های متفاوت بود. ریاضیات نظری برای محققان بود درحالی‌که *مفتاح الحساب* اهمیت نظری ندارد. برای مثال رساله‌های 1و2 برای بازرگانان و حسابگران حرفه‌ای، رسالهٔ 3 برای منجمان، رسالهٔ 4 برای مهندسان و معماران و رسالهٔ 5 برای قضات مناسب بودند. تأثیر این کتاب برای قرن‌ها در کشورهای مختلف گسترش یافت و مدارس در سلسله‌های ایران بین سال‌های 1450 تا 1500 میلادی از آن استفاده می‌کردند. کاشانی قبل از مرگش، شرح مختصری از این کتاب (*تلخیص المفتاح*) را که شامل 30 فصل در 57 صفحه است،

نوشت. او در مقدمهٔ آن، دلیل مختصر کردن نسخهٔ *مفتاح الحساب* را فراهم آوردن راهنمایی برای مبتدیان این علم بیان می‌کند. چون این نسخه تقریباً برای دو قرن به‌طور گسترده در ایران مورد استفاده قرار می‌گرفت، عبدالرزاق کاشانی فرزندِ نوهٔ کاشانی در سال 1589 میلادی، *تلخیص المفتاح* را دوباره‌نویسی کرد. (Osmanh Medreselerinde llim, p. 234-235) با گسترش امپراتوری عثمانی در قرن شانزدهم، از آنتالیا در شرق به بالکان در غرب، استفاده از *مفتاح الحساب* در مدارس عثمانی افزایش یافت. *تلخیص المفتاح* به زبان فارسی و ترکی ترجمه شده بود تا به مردم امپراتوری عثمانی اجازهٔ مطالعه و تمرین ریاضیات دهد. بسیاری از ایرانی‌ها و عرب‌ها برای تجارت به آنتالیا آمدند و این کتاب برای آموزش ریاضیات به آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت. همچنین این کتاب به قبایل عربی که به سرزمین‌های عثمانی سفر می‌کردند، آموزش داده می‌شد. (Ibid, p. 236) به علاوه شبه‌جزیرهٔ عربستان، به عنوان بخشی از امپراتوری عثمانی، شاهد استفاده از این کتاب در مدارس خود بود. قضات در مکه و در قرن‌های شانزدهم و هفدهم علاوه بر فقه، *مفتاح الحساب* را برای یادگیری ریاضیات مطالعه می‌کردند. یکی از مهم‌ترین اهداف این کتاب حل مسائل وراثت با استفاده از روش کاشانی و با استفاده از کسرها و جبر بود. (Ibid, p. 235)

مفتاح الحساب در امپراتوری عثمانی نسبت به سایر کتاب‌های درسی ریاضی از نفوذ و اعتبار خاصی برخوردار بود. خلیل فید افندی (1674ـ1722م) در کتاب خود، مسائلی دربارهٔ جبر و تعدادی مثال از *مفتاح الحساب* را قرار داد. محمدعلی بیرجندی (قرن هفدهم و هجدهم میلادی) در کتاب خود که دربارهٔ مساحت است، رسالهٔ 4 از *مفتاح الحساب* را توضیح و تفسیر کرده است. در قرن هجدهم میلادی، رسالهٔ 4 توسط ابراهیم راز بن علی به ترکی ترجمه شد. در اینجا توجه به این نکته حائز اهمیت است که آموزش‌وپرورش یکی از عوامل مهم در توسعهٔ امپراتوری عثمانی بود و وزارت آموزش‌وپرورش همگانی در سال 1857 میلادی به سبب نیاز به هماهنگ کردن افزایش تعداد مدارس دولتی به طور مؤثری پدیدار شد. برخی از مورخان اعتقاد دارند که تأسیس این وزارت یک گام به سوی سکولاریزاسیون آموزش‌وپرورش همگانی بود. برای مطالعهٔ بیشتر در این خصوص مرجع ***The modernization of*** *public education in the Ottoman Empire, 1839-1908* (ص8) توصیه می‌شود. قاضی احمد مهتر پاشا، وزیر مشهور عثمانی، یک پیغام برای احمت جودت پاشا، وزیر آموزش‌وپرورش عثمانی نوشت تا *مفتاح الحساب* را سفارش دهد. سپس احمت جودت آن را خواند و تصمیم گرفت آن را به عنوان یک کتاب درسی در مدارس رسمی عثمانی استفاده کند. (Osmanh Medreselerinde llim, p. 234-236)

انجمن علمی برای تاریخ علم عربی‌اسلامی در فرانکفورت، کاشانی را در سال 1998 میلادی به عنوان دانشمند ویژه انتخاب کرد و جلد پنجاه‌وششم از سری خود را به او اختصاص داد. این جلد شامل مطالعهٔ موضوعات مختلفی از آثار مختلف کاشانی است. پال لوکای (Al-Kashi, Ghiyathaddin Djamshid Ibn Mas'ud Ibn Mahmud, p. 83-225) با استفاده از جبر به مطالعه و ترجمهٔ برخی از قطعات منتخب رسالهٔ 5 کاشانی پرداخته است.

تمدن اسلامی در قرون وسطی، همچون تمام اروپا، دچار یک دوگانگی میان ریاضیات نظری و عملی شد. ریاضیات عملی موضوع مشترک بود، «درحالی‌که ریاضیات نظری و استدلالی متعلق به متخصصان بود». (Issues in the History of Countries Mathematics Teaching in Arab, p. 629) کاشانی کتابش را برای استفاده طلاب معماری، نقشه برداری، حسابداری و تجارت طراحی کرد و ریاضیات پایه و پیشرفته را برای منجمان ارائه کرد. (Aladdin's Lamp: How Greek science came to Europe Through the Islamic World, p. 203)

کاشانی در مقدمهٔ خود دربارهٔ دستاوردهای ریاضی قبلی خود می‌گوید و دلایل نوشتن *مفتاح الحساب* را توضیح می‌دهد:

«از زمانی که قضایای حساب و هندسه را مطالعه کردم تا زمانی که حقایق آن‌ها را عمیقاً درک کنم، ظرافت‌های آن‌ها را به طور گسترده کامل و ترفندهای آن‌ها را کشف کردم. مسائل آن‌ها را حل و بسیاری از جزئیات و پیچیدگی‌های خاص آن‌ها را هویدا نمودم. اکثر آنچه را که پیشینیان نتوانستند بفهمند را فهمیدم، همچنین زیج خاقانی را برای تکمیل زیج ایلخانی با دقت زیاد کامل کردم. در زیج خاقانی همه آنچه را که در تمام زیج‌ها ناشناخته بود، جمع‌آوری و برای آن‌ها اثبات‌های هندسی ارائه کردم.

همچنین زیج تشیلت و چندین جدول را کامل و چند مقالهٔ دیگر مانند *سلم السما* که راه حلی برای تعیین فاصله و حجم اجرام آسمانی است و رسالهٔ *محیطیه* را که حاوی نتایجی راجع به نسبت میان قطر و محیط[1] است نوشتم. چندین مسئله را که توسط کارشناسان حرفه‌ای حساب از من خواسته شده بود، حل کردم. گرچه برخی از آن‌ها را نمی‌توان با شش فرم جبری حل نمود. از طریق این آثار یک دانش بزرگ برای تسهیل آثار پیشینیان در ریاضیات با روش‌های واضح‌تر به دست آوردم. سپس تصمیم به جمع‌آوری و روشن کردن نتایج آن کردم تا برای طلبه‌ها قابل استفاده باشد. لذا این کتاب را که شامل تمام آنچه حسابگران حرفه‌ای به آن نیاز دارند، نوشتم. در این کتاب از طول آزاردهنده و اختصار خسته‌کننده اجتناب کردم. یک قانون ریاضی برای تقریباً همه چیز وجود دارد تا به آسانی در دسترس منجمان قرار گیرد.» (Jamshid al-Kashi: Miftah al-Hisab, p. 36-37)

با توجه به آنچه کاشانی در مقدمه‌اش بیان می‌کند، یکی از مهم‌ترین دلایل نوشتن *مفتاح الحساب*، دسترسی آسان و سریع به ریاضیات توسط محاسبان و مهندسان است. ازآنجایی‌که این دو واژه به چندین حرفه اشاره می‌کند، بحث دربارهٔ جزئیات آن‌ها باارزش است. در آن زمان محاسب به هر کسی که با حساب سروکار داشت، گفته می‌شد. کاشانی در نامهٔ خود به پدرش فضای آموزشی در مدرسهٔ سمرقند را چنین بیان می‌کند:

«500 نفر شروع به مطالعهٔ ریاضیات کرده‌اند. 24 محاسب و تعدادی ستاره‌شناس وجود دارند. همچنین تعدادی شروع به مطالعهٔ اصول اقلیدس کرده‌اند.» (A newly found letter of al-Kāshī on scientific life in Samarkand, p. 243)

انواع بسیاری از جمع‌آوری مالیات در جهان اسلام وجود دارد که یکی از آن‌ها جمع‌آوری زکات برای دولت است. زکات به شکل‌های مختلف در برداشت محصولات کشاورزی، گله، طلا، نقره، زمین و کالا قابل پرداخت است. (The Zakat Handbook; Charity in Islam)

در آن زمان شغلی به نام محاسب ارث وجود داشت که هدف آن تقسیم ارث مطابق شرع مقدس اسلام بود. برای تمامی مسلمانان توزیع ارث تحت قانون شرع

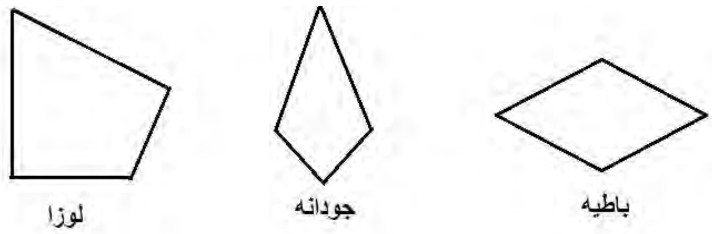
الزامی است. به همین دلیل دانشمندان بسیاری خود را وقف یادگیری و آموزش ارث با استفاده از حساب کسرها و جبر کردند و حساب به عنوان بخشی از علوم اسلامی در نظر گرفته شد. (On Mathematics in the History of Sub-Saharan Africa, p. 360) خوارزمی نیمهٔ دوم کتاب خود را به مثال‌هایی دربارهٔ ارث اختصاص داده است. (Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, p. 63) جابر بن حیان چندین کتاب در زمینهٔ ریاضیات نوشته است که سه کتاب آن دربارهٔ ارث است؛ برای مثال، *علوم فی علم الحساب* برای استفاده محاسبان ارث است. کاشانی رسالهٔ 5، فصل 4، بخش 2 را به ارث از طریق مثال‌های حل‌شده توسط جبر اختصاص داده است. وقت‌نگهداری شغل دیگری بود که در آن به محاسبهٔ اوقات شرعی جهت نماز می‌پرداختند. مسلمانان نیاز به خواندن پنج نماز روزانه در زمان‌های مشخص مطابق با موقعیت خورشید دارند، در هر مسجدی یک وقت‌نگهدار، زمان را برای نماز محاسبه می‌کرد.

مشابه «محاسب»، «مهندس» نیز به حرفه‌های بسیاری همچون معماران، نقشه‌برداران و صنعتگران اشاره دارد. ازآنجایی‌که مردم مطابق با حجم یا مساحت ناحیه‌ای که می‌خواهند تکمیل کنند، به صنعتگری می‌پردازند، ضروری است که ابعاد ساختمان را بدانند. کاشانی به روش‌های مختلف برای ساختن چندین عنصر از ساختمان تمرکز کرد. بخش 9 در رسالهٔ 4 به عنوان مساحت ساختمان‌ها نامیده شده است که در آن به چگونگی مساحت سطوح، حجم قوس‌ها، خزانه‌ها، گنبدها و مقرنس‌ها می‌پردازد. برای این کار، کاشانی پنج روش برای کشیدن نمای قوس‌ها تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار توضیح می‌دهد. این کار بدیع کاشانی را می‌توان آغاز ریاضیات معماری دانست. ایوونه دولد- سمپلونیوس (Qubba for al-Kashi, video tape) این را در یک فیلم مستند که در آن با استفاده از کامپیوتر به تجسم روش کاشانی می‌پردازد، نشان داده است.

چون در اسلام به افراد تا حدودی برای به تصویر کشیدن اشکال تحریک‌آمیز اجازه داده نشده بود، هندسه به یکی از الزامات هنر اسلامی تبدیل شد. به همین دلیل، الگوهای هندسی به وفور در تزئینات کار موزاییک‌سازان، تجار و دیگر صنعتگران به

کار می‌رفت. همکاری قوی میان ریاضیدانان و صنعتگران وجود داشت و بسیاری از مسائل ریاضی با برگزاری جلسات میان ریاضیدانان و صنعتگران حل می‌شد. چنین جلساتی یک پدیدهٔ گسترده در جهان اسلام بود. «کاشانی مسئله‌ای را که دربارهٔ یک وسیلهٔ تسطیح مثلثاتی بود در مکان ساخت‌وساز رصدخانهٔ سمرقند در طول یک جلسه صنعتگران، ریاضیدانان و دیگر مقامات حل کرد.» (Mathematics and Arts, p. 171)

بزرگ‌ترین بخش در *مفتاح الحساب*، رسالهٔ 4 دربارهٔ اندازه‌گیری است که در آن کاشانی مساحت اشکال دو بعدی، مساحت سطح و اجسام سه بعدی را حساب می‌کند. پیدا کردن مساحت یک مثلث بدون داشتن ارتفاع آن، از انواع مثال هایی است که مورد بررسی قرار گرفته است. آنچه در این مثال مورد نیاز است این است که طول سه ضلع مثلث را بدانید و سپس استفاده از فرمول هرون است. این روش برای نقشه‌برداران و کشاورزان مفید است، زیرا آن‌ها می‌توانستند مساحت زمینشان را بدون وارد شدن به زمین برای پیدا کردن ارتفاع پیدا کنند و بدین‌ترتیب محصول خود را از آسیب در امان نگه دارند. همچنین می‌بینیم برخی از اشکال مسطح و سه‌بعدی معمولاً در برنامه‌های درسی مدرن استفاده می‌شوند و ما متوجه عدم وجود اشکال دیگر مانند لوزا، جودانه، باطیه، دفی، شلجمی و... هستیم. اما این اشکال در آن زمان به دلیل کاربردشان بسیار مهم بودند. (نک: شکل 1) کاشانی در مقدمهٔ خود برای چنین اشکال هندسی به طور ضمنی هدف خود را نشان می‌دهد؛ برای مثال می‌گوید: «اگر هر دو ضلع مجاور، برابر باشند و دو جفت برابر نباشند و دو قطر داخل آن یکدیگر را قطع کنند، آن را کیت می‌نامیم که دارای دو زاویهٔ مقابل برابر هستند. حال اگر این دو زاویه قائمه باشد، سازندگان آن را لوزا و اگر این دو زاویه باز باشد، نجاران آن را جودانه و اگر تند باشد، ستاره‌شناسان آن را باطیه می‌نامند. در زیر اشکال آن‌ها را آورده‌ام.» (Jamshid al-Kashi: Miftah al-Hisab, p. 219)



شکل 1: سه نوع کیت

چون کاشانی یکی از ستاره‌شناسان مشهور زمان خود و نویسندهٔ چندین رساله ستاره‌شناسی بود، رسالهٔ 3 را به منجمان اختصاص داد و آن را روش محاسبهٔ منجمان[2] نام نهاد. در واقع، امروزه ستاره‌شناسی (تنجیم) به معنای ستاره‌بینی است ولی در آن زمان به معنای ستاره‌شناسی بود. یکی از مخاطبان کاشانی، تجار و بازرگانان بودند. بسیاری از مسلمانان تاجر بودند و سمرقند محل توقف بسیار مهمی در مسیر تجارت غرب- شرق بود. یکی از دقیق‌ترین موضوعات در رسالهٔ 2 (حساب کسرها) حساب ارز است که کاشانی نحوهٔ معامله با پول را توضیح می‌دهد. سپس کسرها را معرفی می‌کند و توضیح می‌دهد، او بین سیستم‌های دیگر کسرهای مورد استفادهٔ مردم، تمایز قائل می‌شود و اولین کسی بود که به طور سیستماتیک کسرهای اعشاری را بررسی کرد. کاشانی سعی به تسهیل محاسبات برای بازرگانان داشت. به‌علاوه یک فصل کامل از کتابش را به توضیح چگونگی ضرب و تقسیم این ارزها اختصاص داد.

ستاره‌شناسان از کسرهای مخلوط استفاده می‌کردند به طوری که مخرج آن‌ها شصت یا توان‌هایی از آن بود و از هرچه که بعد از آن می‌آید، صرف‌نظر و به ترتیب آن‌ها را دقیقه، ثانیه، ثالثه، رابعه و... می‌نامند. به پیروی از سیستم ستاره‌شناسان، کسرها را با مخرج‌هایشان استفاده کردیم. آن‌ها را به ترتیب یک‌دهم، دودهم، سه‌دهم و... نامیدیم. افرادی که با سیاق سروکار دارند و بازرگانان و حتی اکثر مردم عادی از دنیک، طسوج و شعیر استفاده می‌کردند به طوری که هر دینار معادل 6 دنیک و هر طسوج معادل 4 شعیر است. آن‌ها شعیر را به دنیک، طسوج و شعیر و... تقسیم کردند. (Jamshid al-Kashi: Miftah al-Hisab, p. 106-107)

بررسی اعداد متحابه یکی از معدود کارهای کاشانی در بخشی از ریاضیات است

که امروزه به نظریهٔ اعداد معروف است. اعداد اعداد متحابه دو عدد طبیعی متفاوت‌اند که مجموع مقسوم‌علیه‌های سرهٔ هریک، برابر با دیگری است. در اینجا مقسوم‌علیه سرهٔ یک عدد، مقسوم‌علیه صحیح مثبتی به جز خود عدد است. کوچک‌ترین جفت اعداد متحابه (220و284) است. در اینجا شیوهٔ کاشانی در یافتن یک جفت اعداد متحابه را مطرح می‌کنیم. اولین فرمول شناخته‌شده برای اعداد متحابه توسط ثابت بن قره کشف شد. وی ثابت نمود (On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers, p. 571) که اگر p، q و r اعداد اولی به شکل $p=3\times 2^{n}-1$، $q=3\times 2^{(n-1)}-1$ و $r=9\times 2^{(2n-1)}-1$ باشند که $n>1$ عددی طبیعی است، آن‌گاه $2^{n}pq$ و $2^{n}r$ اعداد متحابه هستند. این قضیه را دوباره فرما و دکارت کشف کردند و اویلر آن را تعمیم بخشید: $(2^{n}pq, 2^{n}r)$ یک جفت اعداد متحابه هستند، هرگاه $p = (2^{(n-m)}+1)\times 2^{m}-1$، $q = (2^{(n-m)} + 1) \times 2^{n} - 1$ و $r = (2^{(n-m)}+1)^{2} \times 2^{n+m} - 1$ اعداد اول باشند، که $n> m \geq 1$. (On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers, p. 571) نقل زیر از کاشانی است:

«می‌خواهیم یک جفت اعداد متحابه، دو عدد متفاوت که اجزای هریک برابر با دیگری است بیابیم. یک عدد از توان‌های 2 را طوری می‌یابیم که اگر یک بار آن را در 3/2 ضرب کنیم و بار دیگر آن را در 3 ضرب کنیم و سپس یک را از هر دو حاصل ضرب کم کنیم، آنگاه هیچ عددی به جز یک، آن دو عدد را نمی‌شمارد. اگر این عدد را بیابیم، آن را اولین مانده یا اولین مفرد و دومین عدد را دومین مانده یا دومین مفرد می‌نامیم. می‌توان دید که دومین مفرد منهای دو برابر اولین مفرد برابر با یک است. سپس اولین مفرد را در دومین مفرد ضرب می‌کنیم و حاصل ضرب را سومین مفرد می‌نامیم. سپس یک بار 2^{N} برابر سومین مفرد و یک بار 2^{N} برابر مجموع اولین مفرد و دومین مفرد را به دست می‌آوریم. حاصل ضرب اولی، عدد متحابه اول است. اگر به عدد متحابه اول، حاصل ضرب دومی را اضافه کنیم، عدد متحابه دوم به دست می‌آید. (JAMSHID AL-KASHI: MIFTAH AL-HISAB, P. 484)

مقایسهٔ روش کاشانی با روش‌های ثابت بن قره و اویلر ممکن است توجه را به ظرافت‌های ساختارهای ریاضی جلب کند. این مقایسه ممکن است سؤالات زیر را

پدید آورد:

- آیا روش کاشانی متفاوت از روش ثابت بن قره است؟
- آیا روش کاشانی نیاز به اول بودن r ندارد؟
- r چه هست؟
- آیا اول بودن p و q، اول بودن r را نتیجه می‌دهد؟ به عبارت دیگر اگر p و q اول باشند، r=p+q+pq یک عدد اول است؟
- آیا می‌توان یک مثال نقض بیاوریم؟ اگر p و q نوع خاص کاشانی را داشته باشند، چه طور؟
- آیا می‌توان تمام اعداد متحابه را یافت؟
- آیا هر عدد متحابه می‌تواند با استفاده از این فرمول تولید شود؟

2. مقایسهٔ استخراج ریشه توسط کاشانی و استوین

در سال 1585 میلادی، سیمون استوین کتاب تأثیرگذاری را به زبان فرانسوی منتشر کرد و آن را حساب نامید. در واقع، کتاب حاوی دو جلد است که در جلد اول، تعاریف و در جلد دوم عملکرهایی آمده است که شامل قوانین حساب معمولی، رادیکال‌ها، چندجمله‌ای‌ها و معادلات هستند. در فصل دوم این کتاب، استوین بخشی را به استخراج ریشه‌ها اختصاص داده است. او در کتاب خود روش جدیدی را برای استخراج ریشهٔ اعداد صحیح و کسرها با هر درجه ارائه کرد. مسئلهٔ استخراج ریشه به طور گسترده مورد مطالعهٔ پیشینیان قرار گرفته و روش‌های بسیاری در چندین قرن توسعه یافته بود. (In The extraction of the n-th root in the sexagesimal notation) در اینجا، به دو مثال که نشئت گرفته از دو دانشمندی است که بیشترین تأثیر را در سرزمین‌های خود در دوره‌های زمانی مختلف داشتند، نظر می‌افکنیم. در روش استوین، درمی‌یابیم نقایصی وجود دارند که عمدتاً به دلیل ساده‌سازی برخی بهینه‌ها ظاهر می‌شوند. به همین دلیل اصلاحاتی که روش استوین را ماندگارتر کند ایجاد می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم گرچه روش‌های ارئه‌شده توسط کاشانی و استوین متفاوت به نظر می‌رسند، الگوریتم اساسی آن در حقیقت یکسان است. یادآور می‌شویم، با دانش ما هیچ ارتباط مستقیمی میان اثبات کاشانی و استوین وجود ندارد.

برگرن[3] (Episodes in the mathematics of Medieval Islam) توجیهی را برای استخراج ریشه‌ها فراهم می‌کند. قبل از ورود به بحث مقایسهٔ این روش‌ها، کمی به زندگی استوین می‌پردازیم. سیمون استوین یک دانشمند فلاندرزی بود که در سال 1548 میلادی در بلژیک متولد شد و در فوریهٔ 1620 میلادی در هایو در گذشت. کار او شاخه‌های بسیاری همچون معماری، جغرافیا، ریاضیات، موسیقی و دریا نوردی را در بر می‌گرفت. مهم‌ترین پیشرفت علمی او زمانی رخ داد که وی نزد پرنس موریس، در حساب گلف، ابتدا مشاور و سپس در موقعیت‌های دیگر یک افسر عمومی و مشغول به کار بود. استوین دانشمند مشهوری بود که از وی در پذیرش و انتشار بسیاری از مفاهیم ریاضی در اروپا کمک گرفته می‌شد؛ برای مثال، به واسطهٔ ترجمهٔ انگلیسی کتاب *حساب* است که توماس جیرسون یک ارز اعشاری در ایالت متحدهٔ امریکا پیشنهاد داده است. معرفی بسیاری از نمادهای ریاضی که هنوز مورد استفاده هستند، همچون نماد جذر، از دیگر میراث استوین است. استوین نیز همچون کاشانی، اغلب در کتاب خود، مثال‌ها و روش‌های بسیاری را برای حل یک مسئله داده شده فراهم می‌سازد. این یک شباهت قابل‌ملاحظه با کاشانی است که در کتاب حساب او مشاهده می‌کنیم. مطالب آورده شده از استوین در این مقاله، بخشی از کتاب حساب اوست.

1ـ2. استخراج ریشه در کار کاشانی

در *مفتاح الحساب*، کاشانی فرایند استخراج ریشه را از طریق یافتن ریشه آغاز می‌کند. او ایدهٔ دورهایی را که در روش استخراج ریشه، مرکزی هستند توضیح می‌دهد. سپس، الگوریتم استخراج ریشه را توصیف و طرح اولیهٔ آن را به طور کلی برای یک عدد دلخواه توصیف می‌کند. الگوریتم با استفاده از یک جدول اجرا می‌شود و توضیح او فقط به صورت زبانی است. او الگوریتم را با استفاده از تعدادی مثال توضیح می‌دهد، ولی یک توجیه رسمی برای اینکه چرا الگوریتم به کار می‌آید ارائه نمی‌کند. عبدالقادر داخل (In The extraction of the n-th root in the sexagesimal notation) و برگرن (Episodes in the mathematics of Medieval Islam) یک توجیه نظری برای الگوریتم پیدا می‌کنند. کاشانی سپس به توصیف یک الگوریتم کلی

برای تقریب یک ریشه از هر درجه ادامه می‌دهد. الگوریتم کلی یک تعمیم طبیعی از الگوریتم جذر است. لذا با توصیف الگوریتم جذر با برخی جزئیات، شروع می‌کنیم و سپس حالت کلی را برای استخراج ریشه‌ها ارائه می‌کنیم.

کاشانی در فصل پنجم *مفتاح الحساب*، الگوریتم جذرش را توصیف می‌کند. در اینجا توصیف او را با استفاده از زبان و نماد ریاضیات مدرن بیان می‌کنیم. به منظور فراهم آوردن یک شرح مختصر و واضح، بدون از دست دادن کلیت، الگوریتم را با استفاده از یک عدد صحیح با یک تعداد ارقام داده‌شده توضیح می‌دهیم. سپس حالت کلی یک عدد صحیح همراه با هر تعداد ارقام نیز واضح خواهد بود. توصیف استخراج ریشهٔ nام در زیر آمده است:

عدد صحیح N داده شده است. ارقام آن به گروه‌های دورقمی که کاشانی آن‌ها را دور می‌نامد، تقسیم شده‌اند. برای تجسم این مطلب، فرض کنید N یک عدد صحیح شش‌رقمی به صورت $N=abcdef$ باشد. در این الگوریتم، دورها تعداد ارقام بخش صحیح جذر را مشخص می‌کنند؛ برای مثال، چون N دارای 3 دور است، بخش صحیح جذر، یک عدد سه‌رقمی است؛ یعنی، یک عدد در صدتایی‌ها. پس از ایجاد دورها، کاشانی برای یافتن بخش صحیح جذر از دور سمت چپ شروع می‌کند. لذا کاشانی ابتدا جذر ab را می‌یابد. برای این منظور، او بزرگ‌ترین عدد صحیح A را که مجذور آن کمتر یا مساوی با ab است، به دست می‌آورد. A اولین رقم بخش صحیح $\sqrt{N}$ از سمت چپ است. سپس تفاضل $p_0=ab-A^2$ را حساب می‌کند و عدد جدید p_0cd را تشکیل می‌دهد که در آن p_0cd الحاق p_0 و cd است. مشاهده می‌شود که چون ab یک عدد دو رقمی و p_0 یک عدد یک رقمی است، p_0cd در صدگان قرار دارد. سپس، کاشانی بزرگ‌ترین عدد صحیح B را که در $(2A\times10+B)B \leq p_0cd$ صدق می‌کند را می‌یابد. عدد B رقم دوم $\sqrt{N}$ است. برای یافتن رقم سوم، کاشانی تفاضل $p_1=p_0cd-(2A\times10+B)B$ را در نظر می‌گیرد و عدد p_1ef را که در آن p_1ef از الحاق p_1 و ef تشکیل می‌شود، در نظر می‌گیرد. در این مرحله، همان‌گونه که برای یافتن A و B عمل کرد ادامه می‌دهد. او بزرگ‌ترین عدد صحیح c را که در آن رابطه $(2AB\times10+C)C\leq p_1ef$ صدق می‌کند، می‌یابد که در آن AB الحاق A و B است و

C رقم سوم (از سمت چپ) بخش صحیح $\sqrt{N}$ است. در پایان، تفاضل $p_2=p_1ef-(2AB\times10+C)C$ را حساب می‌کند. اگر $p_2=0$، آنگاه فرایند تمام است. در غیر این صورت، کاشانی p_2 را به عنوان صورت بخش کسری جذر و $(2AB\times10+C)C+1=2ABC+1$ را به عنوان مخرج آن در نظر می‌گیرد. بنابراین $\frac{P2}{(2ABC+1)}$ بخش کسری جذر خواهد بود. به عبارت دیگر $ABC\frac{P2}{2ABC+1}$ تقریبی برای $\sqrt{N}$ است.

در اینجا ذکر این مطلب لازم است که کاشانی در تقریب عدد π استفادهٔ زیادی از الگوریتم بالا برای تقریب جذر کرد. (Al-Kashi’s determination of π to 16 decimals in an old manuscript) در ادامه الگوریتم کاشانی را با ذکر مثال‌هایی تشریح می‌کنیم.

مثال 1. در این قسمت، مثالی برای استخراج جذر که برگرفته از *مفتاح الحساب* است ارائه می‌کنیم و نحوهٔ اجرای الگوریتم توصیف‌شده را در بالا با استفاده از یک جدول، همان‌گونه که کاشانی ارائه کرده، نشان می‌دهیم. این مثال مهم است، زیرا یک چارچوب عملی فراهم می‌کند. ما در توصیف کلی برای وضوح بیشتر از نمادهای یکسان استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم جذر عدد 331781 را بیابیم. کاشانی این عدد را به دورهای دو رقمی $ab=33$، $c=17$ و $ef=81$ با استفاده از یک جدول به صورت زیر تقسیم می‌کند.

33	17	81

ابتدا بزرگ‌ترین عدد صحیح A را می‌یابد که مجذور آن کمتر یا مساوی با دور 33 است،. $A^2\leq33$؛ $A=5$ و آن را بالا و پایین جدول قرار می‌دهد تا جدول بعدی به دست آید.

5		
33	17	81
8		
5		

حال $p_0=33-5^2=8$ را محاسبه و آن را زیر 33 قرار می‌دهیم. عدد 817 را در نظر

گرفته و دو برابر 5 یعنی 10 را بالای 5 پایینی به نحوی که یک رقم به سمت راست حرکت داده شده باشد، می‌نویسیم.

5		
33	17	81
8		
1	0	
5		

سپس، بزرگ‌ترین عدد صحیح B را که $(2\times5\times10+B)B\le817$ یافته که با انجـام محاسبات ریاضی $B=7$ است و آن را بالا و پایین ستون دوم می‌نویسیم.

5	7	
33	17	81
8		
1	07	
5		

تفاضل $p_1=817-(2\times5\times10+7)7$ به مقدار $p_1=68$ منتهی می‌شود که آن را در ستون دوم زیر 17 قرار داده و به عدد 688 می‌رسیم. همچنین رقم آخر 17 را دو برابر کرده و سپس آن را بالای 107 به نحوی که یک رقم به سمت راست حرکت داده شده باشد، می‌نویسیم.

5	7	
33	17	81
8	68	
	11	4
1	07	
5		

حال بزرگ‌ترین عدد صحیح C را که $(114\times10+C)C\le6881$ می‌یابیم. این عدد به وضوح $C=6$ است که آن را بالا و پایین ستون سوم می‌نویسیم.

5	7	6
33	17	81
8	68	
	11	46
1	07	
5		

سپس با محاسبهٔ $P_2=6881-(2\times57\times10+6)6$ به مقدار $p_2=5$ می‌رسیم که آن را در ستون سوم و زیر 81 قرار می‌دهیم. بخش صحیح جذر پیدا شده و $p_2=5\neq0$ صورت بخش کسری جذر است. با دو برابر کردن رقم آخر 1146، عدد 1152 به دست می‌آید. بنابراین مخرج بخش کسری برابر با 1153=1+1152 خواهد بود. لذا جذر خواسته‌شده به صورت زیر است:

$$\sqrt{331781}\approx576\frac{5}{1153}.$$

2ـ2. استخراج ریشه‌های مرتبهٔ بالاتر در کار کاشانی

الگوریتمی مشابه ولی محاسباتی خسته‌کننده‌تر می‌تواند برای استخراج تقریب ریشهٔ مرتبه‌های بالاتر به کار برود. کاشانی یک توصیف کلی از الگوریتم خود را برای استخراج ریشه‌ها از هر مرتبه، مجدداً به صورت شهودی ارائه می‌کند. او روش خود را از طریق یافتن ریشهٔ پنجم عدد $N=44240899506197$ توضیح می‌دهد. ما این مثال را پس از آنکه روش کلی کاشانی را با استفاده از زبان و نماد ریاضیات مدرن توصیف کنیم، در نظر خواهیم گرفت. با استفاده از نمادهای بخش قبل فرض کنید $N=a_1a_2\ldots a_m$ یک عدد m رقمی است که در آن $m\geq2$. برای استخراج ریشه nام، کاشانی ارقام N را به دورهایی به طول n تقسیم می‌کند که این تقسیمات از سمت راست شروع می‌شود. او به دور سمت چپ نگاه می‌کند. فرض کنید $N=a_1a_2\ldots a_k$ که $k\leq n$ دور سمت چپ باشد. او ابتدا بخش صحیح ریشه را می‌یابد. برای این منظور، بزرگ‌ترین عدد صحیح A را که توان nام آن کمتر یا مساوی با عدد تشکیل‌شده توسط دور است می‌یابد؛ $A^n\leq$. عدد A $a_1a_2\ldots a_k$ رقم سمت چپ بخش صحیح $\sqrt[n]{N}$ خواهد بود. برای جست‌وجوی رقم بعدی ریشه، کاشانی تفاضل $p_0=a_1a_2\ldots a_k-A^n$ را حساب کرده و عدد جدید $p_0a_{k+1}\ldots a_{k+n}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $a_{k+1}\ldots a_{k+n}$ دور دوم (از سمت چپ) N و $p_0a_{k+1}\ldots a_{k+n}$ الحاق p_0 و $a_{k+1}\ldots a_{k+n}$ است. او سپس مقدار

$$f_1(B)=\left(\binom{n}{1}10^{n-1}A^{n-1}B^0+\ldots+\binom{n}{n-1}10^1A^1B^{n-2}+\binom{n}{n}10^0A^0B^{n-1}\right)B$$

را در نظر می‌گیرد. کاشانی $f_1(B)$ را در چندین مرحله و به کمک یک جدول محاسبه می‌کند. توصیه می‌کنیم خوانندگان علاقه‌مند، کتاب (Episodes in the mathematics of

Medieval Islam) را برای مطالعهٔ بیشتر ملاحظه نمایند. او بزرگ‌ترین عدد صحیح B را که $f_1(B)\le p_0a_{k+1}\dots a_{k+n}$ می‌یابد. در اینجا B رقم دوم (از سمت چپ) بخش صحیح $\sqrt[n]{N}$ است. برای یافتن رقم سوم، تفاضل $p_1=p_0a_{k+1}\dots a_{k+n} - f_1(B)$ را در نظر گرفته و عدد $p_1a_{k+n+1}\dots a_{k+2n}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $a_{k+n+1}\dots a_{k+2n}$ دور سوم (از سمت چپ) N و $p_1a_{k+n+1}\dots a_{k+2n}$ الحاق p_1 و $a_{k+n+1}\dots a_{k+2n}$ است. حال مقدار

$$f_2(C)=\left(\binom{n}{1}10^{n-1}(AB)^{n-1}C^0+\dots+\binom{n}{n-1}10^1(AB)^1C^{n-2}+\binom{n}{n}10^0(AB)^0C^{n-1}\right)C$$

را در نظر گرفته و بزرگ‌ترین عدد صحیح C را که $f_2(C)\le p_1a_{k+n+1}\dots a_{k+2n}$ می‌یابیم. عدد C رقم سوم (از سمت چپ) بخش صحیح $\sqrt[n]{N}$ خواهد بود. کاشانی این فرایند را ادامه می‌دهد تا زمانی که m/n تمام ارقام بخش صحیح $\sqrt[n]{N}$ به دست آید. آخرین تفاضل $P\lceil m/n\rceil$ است که در آن $\lceil m/n\rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح ناکمتر از است. اگر $P\lceil m/n\rceil=0$ آنگاه فرایند به پایان می‌رسد و $\sqrt[n]{N}$ عدد صحیح r=ABC... است. در غیر این صورت $\sqrt[n]{N}\approx r\frac{u}{v}$ تقریبی برای ریشه است که در آن r=ABC... بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که

$r^n\le N$. ،$=N-r^n$ $u=p\lceil m/n\rceil$ و $v=(r+1)^n-r^n$

بنا بر نظر راشد (The development of Arabic mathematics between arithmetic and algebra) الگوریتم کاشانی برای استخراج ریشهٔ nام، حالت خاصی از آن چیزی است که به عنوان روش رافینی- هورنر شناخته شده است که عبدالقادر داخل بیان می‌کند این یک نام‌گذاری غلط است، زیرا «این روش، قبل از اینکه رافینی و هورنر به دنیا بیایند، مدت‌ها توسط ریاضیدانان مسلمان و چینی استفاده می‌شده است.» (In The extraction of the n-th root in the sexagesimal notation) همچنین راشد بیان می‌کند که الگوریتم کاشانی نشئت‌گرفته از مدرسهٔ کرجی[4] است. در اینجا ابوبکر محمد بن حسن کرجی، ریاضیدان و آب‌شناس مشهور ایرانی در نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم هم‌دورهٔ ابوریحان بیرونی و بوعلی‌سیناست. وبکه مستشرق آلمانی در سال 1853 میلادی، بخشی از کتاب الفخری کرجی را به زبان فرانسوی منتشر ساخت که در آن نشان داده شده است. بخش عظیمی از کارهای فیبوناچی از ریاضیدان‌های

مسلمان و به‌خصوص کرجی اقتباس شده است.

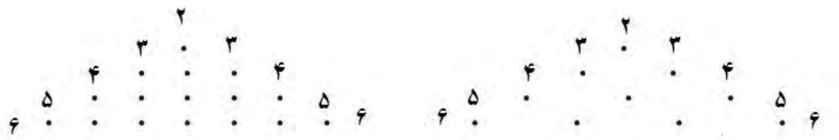
مثال 2. کاشانی روش خود در مثال 1 را برای یافتن ریشهٔ پنجم $N=44240899506197$ شرح می‌دهد. از توصیف الگوریتم کلی، با استقرا درمی‌یابیم که تقریب او $R=r\frac{u}{v}$ را فراهم می‌کند که در آن r بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که $N\geq r^5$، $u=N-r^5$ و $v=(r+1)^5-r^5$. بنابراین، خروجی این مثال خاص برابر با $536\frac{21}{414237740281}$ خواهد بود. ارقام r یکی پس از دیگری با استفاده از دورها به دست آمده‌اند. در مورد ریشهٔ پنجم، دورها دارای 5 رقم هستند و در حالت کلی در ریشه nام دورها دارای n رقم هستند. دورها ارقام 10^0، 10^5، 10^{10}، ... در N را می‌شمارند (هرکدام یک توان پنجم کامل هستند) و تعداد دورها، تعداد ارقام r را تعیین می‌کند. در این مثال $r=ABC$، هر رقم متناظر با یکی از سیکل‌های 4424، 08995 و 06197 است. مرحلهٔ اول الگوریتم، یافتن بزرگ‌ترین عدد صحیح A است که $A^5\leq 4424$. در این صورت $A=5$. در یافتن دیگر ارقام، کاشانی ملزم به استفاده از معادلهٔ

$$(x+y)^5-y^5=(((((\binom{5}{5}y+\binom{5}{4}x)y+\binom{5}{3}x^2)y+\binom{5}{2}x^3)y+\binom{5}{1}x^4)y)y$$

می‌شود. او کارش را در یک جدول با جزئیات بیشتر مرتب می‌کند تا محاسبهٔ مقدار سمت راست معادلهٔ اخیر را آسان کند. گرچه بیشتر، جزئیات شمارشی مورد بحث هستند، ایدهٔ اصلی که در پس فرایند باقی می‌ماند یکسان است. جزئیات بیشتر می‌تواند در (Episodes in the mathematics of Medieval Islam) یافت شود.

3_2. استخراج ریشه در کار استوین

استوین در کتاب حساب خود، 16 مثال از نوع استخراج ریشه ارائه می‌کند. او با روشن ساختن زمینه‌هایی برای طرح کلی در مسئله XVIII چنین آغاز می‌کند. «یک عدد هندسی ساده داده شده است، ریشهٔ مورد نظر آن را بیابید.» برای حل این مسئله، استوین شبه‌مثلث‌های پاسکال زیر را فراهم می‌کند:



سپس از آن‌ها در استخراج جذر، ریشهٔ سوم، ریشهٔ چهارم و ریشهٔ پنجم استفاده می‌کند. همانند مثال‌های کاشانی، هیچ اثبات یا توجیهی برای اینکه چرا الگوریتم کار می‌کند وجود ندارد. با این حال، بررسی می‌شود که ریشهٔ پیداشده همان ریشهٔ مورد نظر است. همچون الگوریتم کاشانی در اینجا نیز الگوریتم کلی، تعمیم طبیعی از الگوریتم جذر است. با توصیف الگوریتم جذر آغاز می‌کنیم. در بررسی‌هایمان از الگوریتم، مثال اول استوین را همان‌گونه که در کتابش توصیف کرده، بیان و آن را به زبان ریاضیات مدرن بیان می‌کنیم. روش استوین نقایصی دارد و این روش در حالت کلی کار نمی‌کند؛ برای مثال، استوین ریشه عدد 186624 را به دست می‌آورد و جذر صحیح را که برابر با عدد 432 است می‌یابد. ولی اگر همین الگوریتم را برای به دست آوردن جذر عدد 331781 که قبلاً از روش کاشانی برای یافتن جذر آن استفاده کردیم به کار ببریم، متوجه می‌شویم که روش استوین در این مثال به کار نمی‌آید. ما این موضوع را با دو عدد، بیان کرده و نشان می‌دهیم که روش استوین با شکست مواجه می‌شود. سپس برای رفع نقایص اصلاحاتی را ارائه می‌کنیم.

عدد 186624 داده شده است. می‌خواهیم جذر عدد مذکور را به دست آوریم. زیر عدد داده‌شده دو خط موازی می‌کشیم و بین این دو خط یک نقطه زیر رقم اول از سمت راست قرار می‌دهیم. مشابهاً نقطه‌ای را زیر رقم 6 و سپس نقطه‌ای را زیر رقم 8 قرار می‌دهیم. به طور مشابه اگر ارقام بیشتری وجود داشته باشد، یکی در میان زیر ارقام نقطه می‌گذاریم. این سه نقطه، سه موقعیت ارقام ریشه را نشان می‌دهند.

۱۸	۶۶	۲۴
•	•	•

برای به‌دست‌آوردن بخش صحیح جذر، ابتدا بزرگ‌ترین عدد صحیح را که مجذور آن کمتر یا مساوی با 18 است، به دست می‌آوریم که برابر با 4 می‌باشد. 4 را روی نقطهٔ اول زیر 8 قرار می‌دهیم. سپس، مجذور 4 را از 18 کم می‌کنیم، 2 به دست می‌آید. 2 را بالای 8 قرار می‌دهیم و 16 و 18 را خط می‌زنیم. وضعیت آن‌ها به صورت زیر است:

		۲
۲۴	۶۶	~~۱۸~~
۰	۰	۴
		~~۱۶~~

برای یافتن رقم دوم جذر، 20 را کنار رقم به‌دست‌آمده از جذر در سمت چپ قرار می‌دهیم. 20 را در 4 ضرب می‌کنیم، 80 به دست می‌آید که با تقسیم 266 بر 80 جزء صحیح 3 حاصل می‌شود. حال 3 را روی نقطهٔ دوم زیر 6 قرار می‌دهیم و سپس آن را کنار 20 می‌نویسیم. همچنین زیر 3، مجذور آن یعنی 9 را قرار می‌دهیم. در این صورت وضعیت ارقام به صورت زیر است:

		۲	۳.	۲۰.	۴.
۲۴	۶۶	~~۱۸~~	۹.		
۰	۳	۴			
		~~۱۶~~			

سپس، 20 را در 4 ضرب و پس از آن حاصل را در 3 ضرب می‌کنیم، 240 به دست می‌آید. حال با افزودن 240 به مجذور 3، 249 حاصل می‌شود. آن را زیر 266 قرار می‌دهیم. تفاضل میان 266 و 249، 17 است. لذا وضعیت آن‌ها به صورت زیر است:

	۱۷	~~۲~~	۲۴۰.	۳.	۲۰.	۴.
۲۴	~~۶۶~~	~~۱۸~~	۹.	۹.		
۰	۳	۴	۲۴۹.			
	~~۴۹~~	~~۱۶~~				
		~~۲~~				

برای یافتن رقم سوم جذر، همانند یافتن رقم دوم عمل می‌کنیم. آن‌ها را همچون بالا کنار 20 قرار می‌دهیم و آنچه را به عنوان ارقام جذر یافته‌ایم یعنی 43 کنار 20 قرار می‌دهیم. با ضرب 20 در 43، 860 به دست می‌آید که جزء صحیح تقسیم 1724 بر 860، برابر با 2 است. 2 را روی نقطهٔ سوم میان دو خط قرار می‌دهیم و سپس 2 را کنار 20 می‌نویسیم و مجذور 2 را زیر 2 قرار می‌دهیم. در این صورت وضعیت آن‌ها

به صورت زیر است:

۴۰	۲۰۰	۳۰	۲۴۰	~~۲~~	۱۷	
		۹۰	۹۰	~~۱۸~~	~~۶۶~~	۲۴
			۲۴۹۰	۴	۳	۲
۴۳۰	۲۰۰	۲۰		~~۱۶~~	~~۴۹~~	
		۴۰		~~۲~~		

سپس، 20 را در 43 ضرب می‌کنیم. حاصل 860 است که با ضرب آن در 2 به عدد 1720 می‌رسیم. حال 1720 را کنار 2 می‌نویسیم وآن را با مجذور 2 جمع می‌کنیم، مجموع 1724 است که آن را زیر خودش قرار می‌دهیم. لذا وضعیت آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:

۴۰	۲۰۰	۳۰	۲۴۰	~~۲~~	~~۱۷~~	
		۹۰	۹۰	~~۱۸~~	~~۶۶~~	~~۲۴~~
			۲۴۹۰	۴	۳	۲
۴۳۰	۲۰۰	۲۰	۱۷۲۰۰	~~۱۶~~	~~۴۹~~	~~۲۴~~
		۴۰	۴۰	~~۲~~	~~۱۷~~	
			۱۷۲۴۰			

ادعا می‌کنیم 432 جذر خواسته شده است. توجه کنید که با ضرب 432 در خودش به عدد 186624 می‌رسیم که برابر با عدد مجذور داده شده است. لذا 432 جذری است که برای اثبات لازم داشتیم.

3. معرفی رسالهٔ وتر و جیب

رسالهٔ *وتر و جیب* یکی از سه دستاورد ریاضی مهم غیاث‌الدین جمشید کاشانی است که به محاسبهٔ سینوس و وتر یک‌سوم زاویه با استفاده از سینوس و وتر معلوم می‌پردازد. کاشانی از جیب معرفی رسالهٔ *وتر و جیب* α استفاده می‌کند تا sinα را در پایهٔ 60 نمایش دهد. بنابراین جیب یک درجه=60×سینوس یک درجه است.

نسخهٔ اصلی این رساله گم شده است. با این حال، چون هستهٔ اصلی این رساله دربارهٔ محاسبهٔ سینوس یک درجه بود، تعدادی از همکاران و ادامه‌دهندگان راه کاشانی، همچون سایر ریاضیدانان و ستاره‌شناسان، تفاسیری را به عربی و نیز فارسی

دربارهٔ محاسبهٔ سینوس یک درجه با استفاده از روش تکرار کاشانی نوشتند.

بحث ما در این فصل براساس رسالهٔ شرحی بر زیج الغبیگ است که توسط منجم و ریاضیدان ایرانی، نظام‌الدین عبدالعلی بن محمد بن حسین بیرجندی معروف به عبدالعلی بیرجندی به زبان فارسی نوشته شده است. در محاسبهٔ سینوس یک درجه دو بخش وجود دارد: در بخش اول، کاشانی قضیهٔ بطلمیوس (اگر یک چهارضلعی در یک دایره محاط باشد، حاصل‌ضرب دو قطر برابر با مجموع حاصل‌ضرب دو ضلع غیرمجاور خواهد بود) را برای یک چهارضلعی محاط در یک دایره به کار می‌برد تا معادلهٔ درجهٔ سوم معروفش را به دست آورد. سپس یک الگوریتم تکرار هوشمندانه و با همگرایی سریع را برای محاسبهٔ سینوس یک درجه که ریشهٔ معادله درجه سومش است، ابداع کرد که تا 17 رقم در دستگاه اعشاری (دهگانی) و 10 رقم در دستگاه شصت‌گانه صحیح است. کاشانی نگارش این رساله را در سال 1424میلادی آغاز کرد و در سال 1427 میلادی به پایان رسانید. شایان ذکر است که تمام تفاسیر دربارهٔ رسالهٔ *وتر و جیب*، پس از مرگ کاشانی نوشته شده است، زیرا در این نسخه‌های خطی نام کاشانی همراه با کلمهٔ رَحِمَه الله به معنای «خدا رحمت کند او را» آمده که برای اشاره به اشخاص فوت‌شده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

محاسبهٔ مقدار سینوس یک درجه با دقت بالا یک چالش جدی برای تمام ریاضیدانان و منجمان به‌ویژه بطلمیوس و نصیرالدین طوسی از روزهای آغازین پیدایش مثلثات بود. پس از مرگ کاشانی، همکاران او شروع به مباحثه و ارائهٔ محاسبهٔ سینوس یک درجه به همان شیوهٔ کاشانی کردند. در رصدخانهٔ سمرقند، برای منجمان و ریاضیدانان، ارائه و بحث دربارهٔ آثار علمی یکدیگر رایج بود. کاشانی با افتخار و با صراحت نوشتن رسالهٔ *وتر و جیب* را در مقدمهٔ رسالهٔ *مفتاح الحساب* بیان می‌کند. بدون شک او بایستی کتابش را به همکاران خود نشان داده یا حداقل آن‌ها را از محتوای رسالهٔ *وتر و جیب* آگاه کرده باشد. لذا آیا امکان دارد کسی از روی قصد نسخهٔ خطی کاشانی را گم کرده باشد؟ یا آیا امکان دارد کسی محتوای آن را کپی و سپس نسخهٔ اصلی را از بین ببرد؟ این‌ها دلایل دیگری در حمایت از استدلال قربانی (کاشانی‌نامه) است که بیان می‌کند (الف) کاشانی رسالهٔ *وتر و جیب* یک درجه را

کامل کرده و (ب) قاضی‌زاده رومی و بیرجندی هرکدام، یک کپی از رسالهٔ *وتر و جیب* را در اختیار داشته‌اند. قربانی (کاشانی‌نامه) ادعا می‌کند که رساله‌ای دربارهٔ تعیین سینوس یک درجه با دقت بالا توسط دقیق‌ترین هندسه‌دانان، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، نوشته شده و این رساله توسط قاضی‌زادهٔ رومی، نویسندهٔ تفسیری بر چقمینی که درحقیقت خلق دوبارهٔ رساله *وتر و جیب* است، ویرایش و بازبینی شده است.

در زمان کاشانی، مثلثات نقش بسیار مهمی در مطالعهٔ ستاره‌شناسی، ستاره‌بینی، کشتیرانی، نقشه‌برداری و بسیاری از رشته‌های دیگر داشت. مطالعهٔ موضوعات مذکور نیازمند تأسیس جداول مثلثاتی با مقادیر صحیح توابع مثلثاتی بود. مقدار سینوس یک درجه اساس محاسبات تمام این جداول بود. به همین دلیل، محاسبهٔ یک مقدار با دقت بالا برای سینوس یک درجه یک چالش جدی برای ریاضیدانان و ستاره‌شناسان حداقل از زمان بطلمیوس و شاهکار نجومی مشهورش، *المجسطی* بود. یک مقدار با دقت بالا برای سینوس یک درجه به همراه فرمول‌های مثلثاتی اساسی همچون $\sin(\alpha \pm \beta)=\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$، $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، $\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$ فرمول دو برابر زاویه و فرمول نصف زاویه، افراد را قادر به یافتن $\sin n^\circ$ و $\sin(\frac{1}{2n})^\circ$ به ازای هر عدد صحیح n می‌کند. همچنین می‌توان به خوبی از $\sin n^\circ$ و $\sin(\frac{1}{2n})^\circ$ و الگوریتم‌های مثلثاتی برای یافتن سینوس زوایای کوچک‌تر استفاده کرد. بنابراین چه کسی استعداد، همت والا، بصیرت و ابتکار برای مقابله با چنین وظیفهٔ به ظاهر غیرممکن داشت؟ چه کس دیگری، ولی قطع به یقین، بطلمیوس دوم جمشید کاشانی است! محاسبهٔ سینوس یک درجه توسط کاشانی و البته محاسبه عدد π با دقت خیره‌کننده برای زمان او، درحقیقت انرژی‌زا و الهام‌بخش است.

4. رسالهٔ محیطیه

رسالهٔ محیطیه یکی از مهم‌ترین آثار کاشانی و در واقع شاهکار وی در فن محاسبه در دستگاه شصت‌گانه به شمار می‌آید. این رساله در شعبان سال 827 قمری (جولای 1424 میلادی) به زبان عربی نوشته شد. کاشانی در این رساله مقدار π را که تا آن زمان نسبت محیط به قطر دایره نامیده می‌شد، تا شانزده رقم اعشار محاسبه کرد. همان‌طور که در مقدمهٔ رسالهٔ *محیطیه* آمده است، محاسبهٔ π توسط ارشمیدس،

ابوالوفاء بوزجانی و ابوریحان بیرونی، انگیزه‌ای شد تا کاشانی این رساله را برای بهبود تقریب π توسط این سه دانشمند معروف بنویسد. انگیزۀ دیگر کاشانی برای نوشتن این رساله، نیاز شدید برای جداول مثلثاتی با دقت بالا در ارتباط با تحقیقات پیشرفته ستاره‌شناسی بود. کاشانی یک چندضلعی منتظم محاطی و یک چندضلعی منتظم محیطی را که هریک دارای 3×2^{128} ضلع بودند، استفاده کرد تا نسبت محیط به قطر دایره متناظر با آن را برای به‌دست‌آوردن یک تقریب برای π که بهتر از همۀ تقریب‌های به‌دست‌آمده π توسط ریاضیدانان و منجمان پیشین در سرتاسر کرۀ خاکی در آن زمان بود، محاسبه کند. کاشانی رسالۀ *محیطیه* را با نام و یاد خدای تبارک و تعالی آغاز می‌کند: «به نام خداوند بخشندۀ مهربان». کاشانی دربارۀ محاسبه عدد π توسط ارشمیدس، ابوالوفا بوزجانی و ابوریحان بیرونی بحث می‌کند. آنچه در زیر آمده، خلاصه‌ای از (The introduction of al-Risāla al-Muhītīyya) است. کاشانی رساله‌اش را با «حمد و سپاس مخصوص خدایی است که آگاه از نسبت قطر به محیط دایره است...» آغاز می‌کند و بخشش و راهنمایی را از خداوند تعالی طلب می‌کند. سپس بیان می‌کند که ارشمیدس ثابت کرده که محیط دایره کمتر از سه برابر قطر به اضافۀ یک‌هفتم قطر ($3d+\frac{1}{7}d$) و بزرگ‌تر از سه برابر قطر به اضافه $\frac{10}{71}$ قطر است. لذا تفاضل این دو مقدار $\frac{1}{497}$ قطر است. ارشمیدس محیط چندضلعی منتظم محاطی (محیطی) با 96 ضلع که کمتر (بیشتر) از محیط دایره است، حساب کرده است.

بوزجانی تقریبی برای نصف وتر کمان یک درجه را با فرض اینکه قطر دایره 120 واحد است، به دست آورده است. او این نتیجه را در 720 ضرب کرد تا محیط چندضلعی منتظم محاطی با 720 ضلع را به دست آورد. سپس محیط چندضلعی منتظم محیطی مشابه را نیز به دست آورد. او بیان می‌کند که محیط این دایره باید 376 واحد به اضافۀ یک کسر باشد که این کسر بیشتر از 0;59,10,59 و کمتر از 0;59,23,54,12 و تفاضل این دو مقدار 0;0,12,55,12 است. ابوریحان بیرونی وتر یک کمان دو درجه را حساب کرد و آن را برای محاسبۀ محیط چندضلعی منتظم محاطی با 180 ضلع (6;16, 59, 10, 48, 0) به کار برد و محیط چندضلعی منتظم محیطی مشابه با 180 ضلع (6;17, 1, 58, 19, 6) را به دست آورد. سپس میانگین این

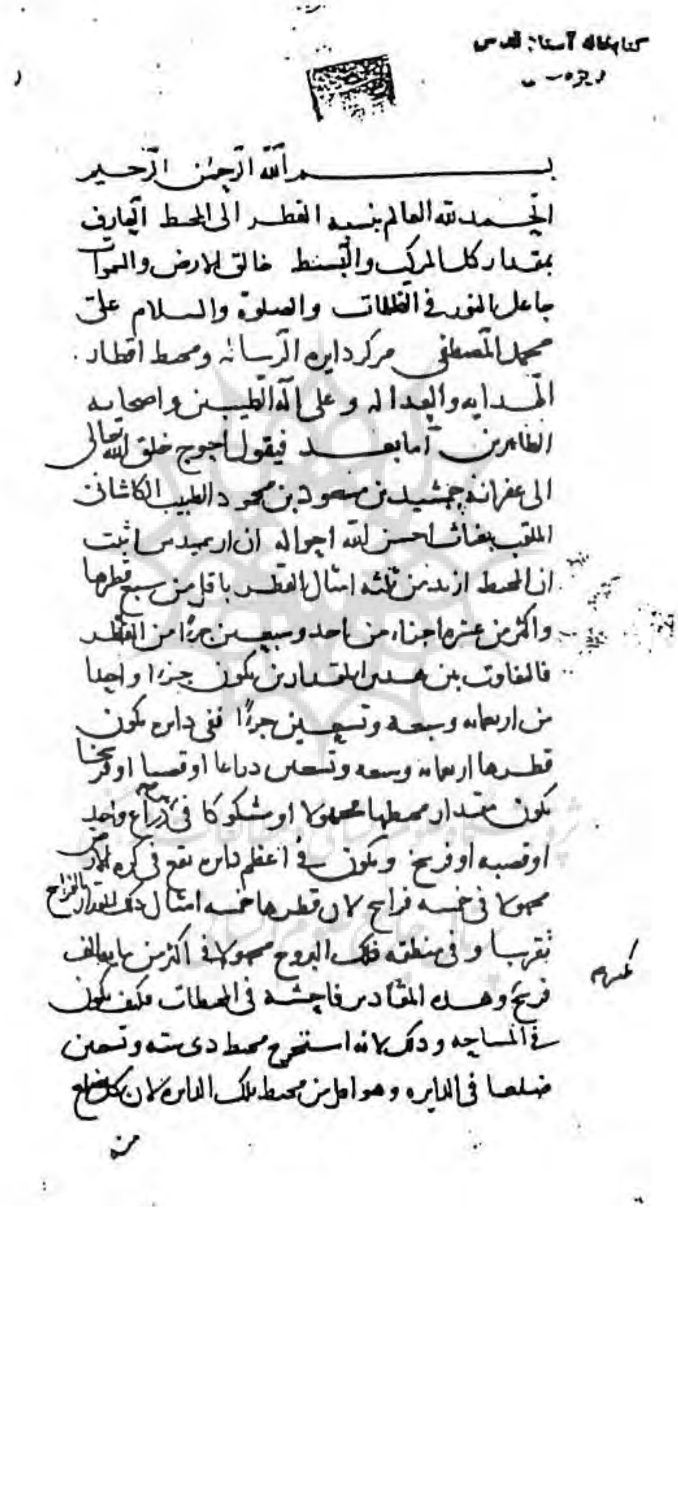
دو محیط را به عنوان محیط دایره در نظر گرفت.

کاشانی مقدمهٔ رسالهٔ *محیطیه* را با بیان اینکه محاسبهٔ π توسط ارشمیدس، بوزجانی و بیرونی گیج‌کننده است، به پایان رسانید. لذا او خواست محیط یک دایره با این ویژگی که قطر آن 600 هزار برابر قطر زمین است، حساب کند. تفاضل میان نتیجهٔ این محاسبه و مقدار واقعی محیط به عرض موی یک اسب نمی‌رسد. در جملهٔ آخر مقدمه، کاشانی نوشت: «... درحالی‌که از خدای بخشنده عزیز که هدایتگر به راه راست است تقاضای یاری می‌کنم، این رساله را دربارهٔ تعیین محیط دایرهٔ مشتمل بر ده بخش و یک نتیجه‌گیری می‌نویسم و آن را *المحیطیه* نام نهادم.»

پال لوکی، پژوهشگر برجستهٔ آلمانی، دربارهٔ این رساله چنین آورده است: «اگر رسالهٔ محیطیه کاشانی به دست ریاضیدانان غربی معاصر وی رسیده بود، از آن پس مردم مغرب‌زمین از برخی منازعات و تألیفات دربارهٔ اندازه‌گیری دایره بی‌نیاز می‌شدند.» این رساله شامل ده فصل و یک نتیجه‌گیری است: فصل اول دربارهٔ تعیین وتر کمانی است که مجموع دو کمان است با این ویژگی که اولی وترش معلوم و دومی مساوی با نصف مکمل اولی تا نیم‌دایره است. فصل دوم دربارهٔ تعیین محیط کثیرالاضلاع محاطی دلخواه و محیط کثیرالاضلاع محیطی مشابه آن است. فصل سوم دربارهٔ این است که محیط دایره را به چند ضلع (کمان برابر) تقسیم کنیم و این عمل را تا مرتبهٔ شصت‌گانی ادامه دهیم تا محیط دایرهٔ مذکور، با دقت عرض یک موی اسب حاصل شود. فصل چهارم دربارهٔ محاسبات است. فصل پنجم دربارهٔ استخراج طول یک ضلع از کثیرالاضلاع منتظم محاط در دایره است که تعداد اضلاع آن 1، 2، 8، 12، 48 (در دستگاه شصت‌گانی) می‌باشد. فصل ششم دربارهٔ استخراج محیط کثیرالاضلاع منتظم محاط در دایره و محیط کثیرالاضلاع منتظم محیطی مشابه آن است که تعداد اضلاع هریک 805306368 باشد. فصل هفتم دربارهٔ نادیده گرفتن آخرین رقم از محاسبات قبلی در کسرهای افزودنی و کاهشی است. فصل هشتم دربارهٔ تبدیل اندازهٔ محیط دایره به ارقام هندی (عربی) با فرض معلوم بودن شعاع دایره است. فصل نهم دربارهٔ نحوهٔ محاسبه با دو جدول است. فصل دهم دربارهٔ تعیین تفاوت میان دستاوردهای کاشانی است با آنچه سایر ریاضیدانان مشهور به دست آورده‌اند. در

نتیجه‌گیری به اثبات خطای ابوالوفا بوزجانی و ابوریحان بیرونی می‌پردازد.

در پایان این مقاله، به ترتیب صفحات اول و آخر نسخه اصلی رسالهٔ محیطیه واقع در کتابخانه مرکزی آستان قدس رضوی می‌آید.



بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله العالم بنسبة القطر الى المحيط البارئ
بمقادير كل المركب والبسيط خالق الارض والسموات
جاعل النور في الظلمات والصلوة والسلام على
محمد المصطفى مركز دائرة الرسالة ومحيط اقطار
الهداية والعدالة وعلى آله الطيبين واصحابه
الطاهرين اما بعد فيقول احوج خلق الله تعالى
الى غفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشاني
الملقب بغياث احسن الله احواله ان ارشميدس اثبت
ان المحيط ازيد من ثلثة امثال القطر باقل من سبع قطرها
واكثر من عشرة اجزاء من احد وسبعين جزءا من القطر
فالتفاوت بين هذين المقدارين يكون جزءا واحدا
من اربعمائة وسبعة وتسعين جزءا ففي دائرة يكون
قطرها اربعمائة وسبعة وتسعين ذراعا او قصبا او فرسخا
يكون مقدار محيطها مجهولا او مشكوكا في ذراع واحد
او قصبة او فرسخ ويكون في اعظم دائرة تقع في كرة الارض
مجهولا في خمسة فراسخ لان قطرها خمسة امثال ذلك المقدار
تقريبا وفي منطقة فلك البروج مجهولا في اكثر من مائة الف
فرسخ وهذا المقدار فاحش في المحيطات فكيف يكون
في المساحة وذلك لانه استخرج محيط ذي ستة وتسعين
ضلعا في الدائرة وهو اطول من محيط تلك الدائرة لان كل ضلع
من

پی‌نوشت‌ها:

1. در این کتاب کاشانی عدد π را تا 16 رقم درست اعشار حساب کرده است.

2. فی طریقهٔ الحساب المنجمین.

3. Berggren

4. Karaji's school

منابع

ـ *بطلمیوس و کاشانی*، جعفر آقایانی چاوشی، مرکز نشر میراث مکتوب ویژه‌نامه تاریخ علم، تهران، 1382.

ـ *کاشانی‌نامه: احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، ابوالقاسم قربانی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، 1368.

_ Issues in the History of Mathematics Teaching in Arab Countries, Abdeljaouad, M., Paedagogica Historica 42 (4 , 5): 629-664. 2006.

_ Miftah al-Hisab. (edition, and commentary by Amad Sa'id al-Dimirdash and Muammad Hamdi al-Hifni al-Shaykh), Al-Kashi, G.J.M., Cairo: Dar al-Katib al-Arabi, 1969.

_ Miftah al-Hisab. (edition, commentary and notes by Nabulsi Nader), Al-Kashi, G.J.M., Damascus: University of Damascus Press, 1977.

_ Jamshid al-Kashi: Miftah al-Hisab, Al-Nabulsi, N. Damascus, Syria: Ministry of High Education, 1977.

_ Root extraction by Al-Kashi and Stevin, Aydin, N; Hammoudi, Lakhdar., Arch. Hist. Exact Sci. 69 (3), 291-310, 2015.

_ The introduction of al-Risāla al-Muhītīyya: an English translation, Azarian, M. K., Int. J. Pure Appl. Math. 57 (6), 903-914, 2010.

_ A study of Risāla al-watar wa'l jaib ("The treatise on the chord and sine"), Azarian, M. K., Forum Geom. 15, 229-242, 2015.

_ Al-Risāla Al-Muhītīyya: A Summary, Azarian, M. K., Missouri Journal of Mathematical Sciences 22 (2), 64-85, 2010.

_ A newly found letter of al-Kāshī on scientific life in Samarkand, Bagheri, M., Translated from the Persian. Historia Math. 24 (3), 241-256, 1997.

_ Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Bergrren, J. L., New York: Springer Verlag (2003).

_ Episodes in the mathematics of Medieval Islam, Berggren, J. L., Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1986.

_ On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers, Borho, W., Mathematics of Computation 26 (118): 571-578, 1972.

_ In The extraction of the n-th root in the sexagesimal notation. A study of chapter 5, treatise 3 of Miftah al-hisab, Dakhel, A., ed. W.A. Hijab, and E.S. Kennedy. Beirut: American University of Beirut, 1960.

_ Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kashi, Dold-Samplonius, Y. Centaurus 35 (34): 193-242, 1992.

_ Qubba for al-Kashi, video tape, Dold-Samplonius, Y. American Mathematical Society, 1995.

_Aladdin's Lamp: How Greek science came to Europe Through the Islamic World, Freely, J., New York: Vintage Books, 2009.

_On Mathematics in the History of Sub-Saharan Africa, Gerdes, P., Historia Mathematica, 21: 345-76, 1994.

_ {Al-Kashi’s determination of π to 16 decimals in an old manuscript, Hogendijk, J. P., Zeitschrift fr Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 18: 73–152, 2009.

_ Osmanh Medreselerinde llim [Sciences in the Ottoman Schools], Izgi, C., Topkapi, Istanbul: Iz Yayincilik, 1997.

_ A History of Mathematics, Katz, V., New York: HarperCollins College Publishers, 1993.

_ Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World, Ozdural, A., Historia Mathematica 27: 171-201, 2000.

_ The development of Arabic mathematics between arithmetic and algebra, Rashed, R., (trans: Armstrong, A.F.W.). Dordrecht: Kluwer, 1994.

[25]. Charity in Islam: a Comprehensive Guide to Zakat, Senturk, O. Summerset, New Jersey: The Light, 2007.

_ Al-Kashi, Ghiyathaddin Djamshid Ibn Mas'ud Ibn Mahmud: Texts and studies, Sezgin, F. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1998.

_ The modernization of public education in the Ottoman Empire, 1839-1908: Islamization, Autocracy, and Discipline (Ottoman Empire and Its

Heritage), Somel, S., Leiden: Brill, 2001.

_ The Zakat Handbook: a Practical Guide for Muslims in the West, Zakat F. The Zakat Foundation of America. Bloomington, Indiana: Author-House, 2008.