فلسفهٔ علم، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۹، ۱۲۹–۱۵۲

نقش قواعد مثلثاتی در عناصر معماری ایران از دیدگاه غیاث‌الدین جمشید کاشانی

فاطمه فلاحی*

سعید میر ریاحی**، **حسین سلطان زاده*****، **محمد مهدی رئیس سمیعی******

چکیده

کاربرد قواعد محاسباتی سهم عمده‌ای در هماهنگی نسبت‌ها و عناصر معماری دارد. علم هندسه و کاربرد آن یکی از اصلی‌ترین ویژگی‌های معماری ایران است و توسعهٔ آن در معماری ایران از سده‌های هشتم و نهم آغاز شد و تا قرن دهم ادامه یافت. آنچه که از حیث مطالعات مثلثاتی عناصر معماری ایران در عصر تیموری مد نظر می‌باشد بهره‌گیری از دیدگاه ریاضی‌دان و اندیشمند قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی[1]، در اندازه‌گیری، محاسبات و قاعده‌مند کردن این عناصر است. یکی از دستاوردهای غیاث‌الدین تثلیث زاویه و دایره است که تکمیل کنندهٔ مثلثات و مقاطع مخروطی خیام می‌باشد. هدف این پژوهش پاسخ به این پرسش است که: آیا محاسبات و ایده‌های ریاضی‌دان ناموری چون کاشانی قابلیت به کار گرفته شدن در صنعت معماری را دارد؟ مبانی نظری پژوهش حاضر

* دانشجوی دکتری تخصصی معماری، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسندهٔ مسئول)، mehrnaz.ir@gmail.com

** دانشیار گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران، saiid.mirriahi@gmail.com

*** دانشیار، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، h72soltanzadeh@gmail.com

**** استادیار، گروه معماری، دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران، r_samiei@guilan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۵، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲

به دنبال پاسخ این سوال است که: آیا بین مباحث نظری و عملی هندسه و معماری ارتباط وجود دارد؟

در این پژوهش، بر اساس نسخ به‌جا مانده از ریاضی‌دانان ایرانی، ریشهٔ قواعد محاسباتی و ترسیمی برخی از عناصر معماری که از نظر پژوهشگر با قضیهٔ منلائوس مرتبط است، توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون در نرم‌افزار راینو ارزیابی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که محاسبات و ترسیمات کاشانی فقط تمرین عملی نظری نبوده و از قوانین مثلثاتی در ایستایی و پایداری عناصر معماری که تا قبل از آن برخی از آن‌ها تخریب می‌شدند استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: مثلثات و معماری، معماری ایران ، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، قضیهٔ منلائوس

۱. مقدمه

مقالهٔ چهارم رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» کاشانی، طاق و ازج، از معدود رساله‌های نگاشته شده برای اصحاب معماری در باب هندسهٔ اشکال کروی در عناصر معماری است. اشکال کروی از منظر اندیشمندان ایرانی همانند اشکال مستقیم‌الخط شناخته می‌شوند، با این تفاوت که اضلاع آنها کمان‌هایی از دوایر عظیمه کوچکتر از نصف دایره هستند. میزان کارآمدی سه ضلعی و یا مثلث محیط بر این اشکال موضوعی است که برخی اندیشمندان پیش از غیاث‌الدین به بررسی آن پرداختند. این اندیشمندان نسبت‌ها و روابطی را در مؤلفه‌های این اشکال هندسی کشف کردند که قضایای هندسی مسطحه را روی اشکال کروی برقرار می‌ساخت. کاشانی در رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» ضمن تکمیل این قضایا به تعمیم آن در صنعت معماری نیز پرداخت و راهکاری علمی در محاسبه و ترسیم برخی از عناصر معماری ارائه داد که منجر به پایداری در رفتار سازه‌ای این عناصر گردید.

خیام در ضمن بیان انتقادهای خود به کتاب اصول بر قضیهٔ نسبت مؤلفه شدیداً تأکید کرد؛ زیرا شکل قطاع که پایه و مبنای حل مسائل علم هیئت و اشکال و مثلثات کروی است، بر اساس همین نسبت مؤلفه به دست می‌آید (بی‌نا، ۱۳۸۸: ۷۵). دانشمندان دورهٔ اسلامی (قرن چهارم هجری و بعد از آن)، قضیهٔ منلائوس[۲] را شکل‌القطاع[۳] نامیده‌اند(بی‌نا، ۱۳۸۸: ۲۰). یونانیان برای حل مثلثات کروی قضیهٔ منلائوس را به کار می‌بردند و قضیه‌ای متشابه با قضیهٔ منلائوس در هندسهٔ مسطحه اثبات کردند (کندی، ۱۳۳۲: ۳۳٤–۳۳۵). دانشمندان ایرانی برای بیان قضیهٔ منلائوس از مفهوم جیب[٤] (معادل سینوس امروزی)

استفاده می‌کردند اما منلائوس و دیگر دانشمندان یونان باستان این قضیه را به وسیلهٔ وتـر دو برابر یک کمان[5] بیان کرده‌اند (مهدوی، ۱۳۹۰: ۱۹). موضوع رسالهٔ «وتر و جیب» کاشـانی بـه دست آوردن جیب یک درجه است. او در این رساله به تشکیل معادلهٔ جبـری بـا اسـتناد بـه قضایای هندسی و حل این معادله به روش تکرار پرداخته است. کاشانی بـرای سـاخت ایـن معادلهٔ جبری از قضیهٔ بطلمیوس (چهارضلعی محاط در دایره) و تثلیث کمان اسـتفاده نمـود (قربانی، ١٦٨؛ ١٧٦). کتاب «اشکال الکریة» از جمله آثار منلائوس است که با استناد به گفتـهٔ ابن ندیم، منلائوس پیش از بطلمیوس این کتاب را به رشتهٔ تحریر درآورده زیـرا بطلمیـوس در «مجسطی» از او یاد کرده است (امینی، ۱۳۹۲؛ ۳۲).

هدف مقالهٔ چهارم رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» کاشانی، ارائهٔ راه‌کارهـای علمـی و محاسـباتی طاق و ازج، گنبد و مقرنس برای صنعتگران است. عناصری که تا پیش از آن برخی شکسـته می‌شدند. کاشانی در این رساله قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد معماری را دسته‌بندی نمـود و بر اساس اندازهٔ هر دهانه قوسی را که از لحاظ ریاضی و معماری مناسب‌تر بود را پیشـنهاد داد. میزان کارایی این رساله از «محاسبهٔ سطح و حجـم سـاختمان» تـا «رویکـردی علمـی از منظر ریاضیات به معماری» موضوعاتی است که همواره در میان پژوهشگران با اختلاف نظـر همراه بود. از این رو سوال اصلی پژوهش، میزان انعکـاس اندیشـه‌هـای علمـی کاشـانی در عناصر معماری است. این پژوهش برای پاسخ به ایـن پرسـش از دو منظـر، نخسـت تفسـیر تاریخی و بررسی تکامل تدریجی آگاهی و ذهن اندیشمندان و دیگری، بازنمـایی ریاضـی و یا مدل‌سازی رایانه‌ای برای بررسی موضوع فوق بوده تا علـوم تـاریخی بـا نگـاهی باورمنـد سازمان‌دهی شود.

گام نخست این پژوهش بررسی اهمیت رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» در رویکـردی علمـی بـه صنعت ساخت و اجرای طاق و گنبد معماری است که بـا جسـتجوی ارتبـاط آخـرین بـاب مقالهٔ چهارم این رساله «طاق و ازج» با رسالهٔ دیگـر کاشـانی «وتـر و جیـب» همـراه اسـت. پژوهش در گام بعد بر سازگار ساختن گزاره‌های قاعده‌مند ریاضی، مستخرج از رسـاله‌هـای کاشانی، با نرم‌افزارهای محاسباتی رایانه‌ای تمرکز دارد و بر اساس منطق نحـو (دسـتور زبـان اشکال) طرح‌واره‌های کاشانی را تجزیه و تحلیل می‌نماید. بخش پایانی پژوهش بـا مـد نظـر قرار دادن قواعد ترسـیمی و محاسـباتی مطـرح شـده در رسـائل کاشـانی، چگـونگی تـأثیر اندیشه‌ها و ایده‌هـای کاشـانی را در پدیـدار شـدن قواعـد هندسـی طـاق و گنبـد در دوران تیموری، مشخص خواهد نمود.

قواعد ریاضیاتی و محاسباتی در رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» کاشانی الگوی هندسی تولید فرم در عناصر معماری است. از این رو، روش پژوهش بر پایهٔ استدلال منطقی متکی بر گزاره‌های قاعده‌مند ریاضیات استوار است. ابزار ارتباط دهندهٔ این قواعد، علوم محاسباتی موضوع رسالهٔ «وتر و جیب» با زبان اشکال موضوع رسالهٔ «طاق و ازج»، زبان برنامه‌نویسی پایتون در نرم‌افزار رایانه‌ای راینو می‌باشد. پایتون علاوه بر توابع محاسباتی، دارای پتانسیل شی‌گرایی و نحو است که با استفاده از افزونهٔ گراس‌هاپر وارد نرم‌افزار سه بعدی راینو می‌شود. در این پژوهش، روش‌های اجرای قوس توصیف شده توسط کاشانی در مقالهٔ چهارم رسالهٔ «مفتاح‌الحساب»، توسط زبان برنامه‌نویسی پایتون وارد فضای نرم‌افزاری راینو شده و میزان مطابقت قوس‌ها با علوم محاسباتی، موضوع رسالهٔ «وتر و جیب»، محاسبه می‌گردد. این روند، رویکرد علمی کاشانی از منظر ریاضیات در معماری را مشخص می‌سازد.

۲. پیشینهٔ پژوهش

ترجمه و تحشیهٔ رسالهٔ ارزشمند غیاث‌الدین جمشید کاشانی «طاق و ازج» (جذبی، ۱۳۹۳ش)، آخرین باب مقالهٔ چهارم «مفتاح‌الحساب»، برای مقاصد عملی مساحی بناها و عمارات نوشته شده است. ترسیمات کاشانی در این رساله مقطع اغلب قوس‌های کمان‌ساز طاق و ازج تا آن زمان را شامل می‌شود. یوشکه‌ویچ و روزنفلد (۱۹۵٦م) نتیجه گرفته‌اند که کاشانی در «مفتاح‌الحساب» کلیهٔ عمل‌های نجومی که در جدول‌های دیگر وجود نداشت را کشف کرده و تردیدی نیست که رسالهٔ «وتر و جیب» به تعیین ثلث زاویه اختصاص دارد و کاشانی این رساله را اختصاصاً برای دقیق‌تر کردن جدول‌های مثلثاتی نوشته است. توجه به دانش ریاضیات در معماری، روش‌های به کار رفته در رسالهٔ «طاق و ازج»، دلایل تألیف رساله، باب‌ها و مسائل آن پرسش‌هایی را دربارهٔ کاربرد هندسهٔ مثلثاتی و ریاضیات در معماری مطرح می‌کند. از این رو به اختصار به روند تاریخی و تحولات ذهنی ریاضیدانان ایرانی پیش از کاشانی که بر ترسیم و تدقیق اشکال کروی تمرکز داشتند اشاره‌ای خواهیم داشت.

اوزدورال (۱۹۹۸) شکوفایی علوم ریاضی در معماری را مربوط به مجالس گفت و شنود میان برخی از ریاضی‌دانان بزرگ همانند ابوالوفا بوزجانی و اصحاب معماری دانسته و روشی را که ابوالوفا ارائه نمود، انعکاسی از ابتکارات او برای یافتن طریقی می‌داند تا بتواند قضیه‌ای نظری را به هنرورزانی که بالطبع با کارهای عملی سر و کار داشتند، تفهیم نماید نه

اینکه آنان را وادار کند تا کلیات ریاضیات آن عهد را فرا گیرند. با استناد به نتایج حاصل از پژوهش طاهری و ندیمی (۱۳۹۱) معماران پیش از ابوالوفا از دانش هندسهٔ مرتبط با حرفهٔ خود بی‌بهره نبودند ولی تا پیش از او (قرن چهارم) در جهان اسلام، دانش مکتوب ریاضیات معماری آن‌گونه که او به تدقیق و عمومی کردن آن دست یافت، وجود نداشت. نتایج بررسی طاهری (۱۳۹۰)، طاهری و ندیمی (۱۳۹۱) به همراه پژوهشگرانی چون بلوم (Bloom) (۱۹۹۳)، هولد (Holod) (۱۹۸۸) و صلیبا (Saliba) (۱۹۹۹) نشان داد که کارآمدی رسائل بوزجانی برای اهل صنایع و ارتباط اصحاب معماری با متون ریاضی شفاهی است و ارتباط ناچیزی میان اصحاب این دو قلمرو وجود دارد. این موضوع بحث برانگیز در پژوهش‌های دیگر طیفی از آرا متفاوت داشته است. پژوهشگران دیگری چون بولاتف (Bulatov)، چرباچی(Chorbachi) (۱۹۸۹)، اوزدورال (Ozdural) (۱۹۹۸)، نجیب اوغلو (Necipoglu) (۱۹۹۵) بر نقش علوم، متون ریاضی و ریاضی‌دانان در معماری دوران اسلامی تأکید دارند. اوزدورال (2000) با اشاره به پاره‌ای از مسائل مطرح شده در رسائل بوزجانی به این امر مهم دست یافته است که این طرح بعدها به کوشش عمر خیام جامهٔ عمل به خود پوشید. اوزدورال در سال (1998) به یک سند مهم دربارهٔ حل یک مسئلهٔ هندسی توسط عمر خیام اشاره داشت. نتایج پژوهش وی نشان داد که خیام دو راه حل، مقاطع مخروطی و مثلث قائم‌الزاویه‌ای معروف به مثلث خیام، برای این مسئله ارائه داد. اوزدورال پس از توضیح و تحلیل خواص این مثلث و تناسبات گنبدخانهٔ شمالی مسجد جامع اصفهان در خاتمه به این نتیجه رسید که «به نظر می‌رسد طرح هندسی گنبدخانهٔ شمالی تماماً بر اساس مثلث خیام صورت گرفته است».

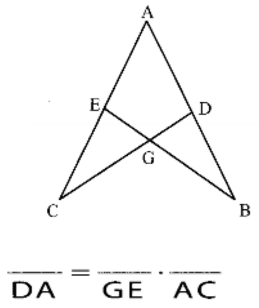
به طور کلی از دید پژوهشگران، دانش ریاضیات معماری در اواخر سدهٔ چهارم با تأثیر از فضای عقلانی فلاسفه و ریاضی‌دانان متولد شد. بوزجانی با تدقیق و تدوین مسائل هندسهٔ عملی مورد نیاز صنعات، راهی متمایز در بی‌نیاز نمودن اصحاب معماری از ریاضی‌دانان را آغاز نمود. طبق گفتهٔ اوزدورال این هدف با رویکرد مرزی خیام به ریاضیات تحقق یافت. این دانش‌ها در حدود سه قرن به تثبیت خود پرداختند اما نوآوری در آن‌ها وجود نداشت تا در قرن نهم بعد از حملهٔ مغولان و آشفتگی ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی دانشمند برجستهٔ ریاضیات در عصر تیموری ظهور کرد. طاهری و نورتقانی (۱۳۹۰) با استناد به رسالهٔ «طاق و ازج»، کاشانی را دانشمندی با نگاه‌های دقیق به معماری و صنعات می‌دانند که برای اندازه‌گیری کلیهٔ اشکال و احجام هندسی تقسیم‌بندی نسبتاً کاملی ارائه داده

است. نجیب اوغلو (۱۹۹۵) جداول محاسباتی از پیش آمادهٔ رسالهٔ کاشانی را بدون تأثیر در روند طراحی و تنها برای آسان نمودن محاسبات در کار معماران ذکر کرده است. خیری (۱۳۸۹) کاشانی را نخستین کسی می‌داند که ایستایی و رفتار سازه‌ای قوس‌ها را دسته‌بندی کرده و برای هر دهانه بر اساس اندازهٔ آن قوسی را که از نظر ریاضی و معماری بهترین بوده پیشنهاد داد. سمپلونیوس (۲۰۰۰) صحت محاسبات مربوط به قوس‌ها در جداول رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» را تا سه رقم اعشار ذکر نموده و جداول را برای تمام مقاصد علمی در آن عصر پاسخگو دانسته است.

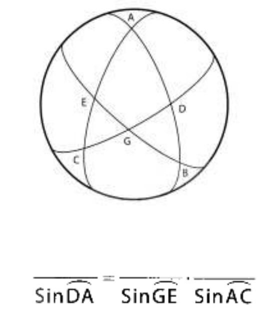
با توجه به چنین آراء همسانی که همگی بر تأثیر رسالهٔ کاشانی بر معماری و صنعات تأکید دارند، هدف پژوهش حاضر کشف منطق ریاضی نهفته در لایه‌های پنهان معماری ایران در دوران تیموری است تا از این طریق به تبیین قواعد محاسباتی و ریاضیاتی که ریشه در معماری ایرانی دارد دست یابد. احیاء منطق مثلثاتی ریاضیات در معماری ایران راهکارهای قابل استناد و راهبردهایی ارائه می‌دهند که می‌تواند ادامه دهندهٔ راه اندیشمندان ایران باشد.

۳. قضیهٔ منلائوس و قواعد محاسباتی ترسیمی اندیشمندان ایران

ریاضی‌دانان قرون دوم و سوم هجری روش یونانیان را برای حل مثلثات در علم هیأت به کار بردند، اما در قرن چهارم هجری عده‌ای از علماء ایرانی به جای قضیهٔ منلائوس قضایائی کشف کردند که از قضیهٔ قبل ساده‌تر بود. در رأس این پیشگامان علم ابوالوفا بوزجانی قرار داشت (کندی، ۱۳۳۲: ۳٤٠).



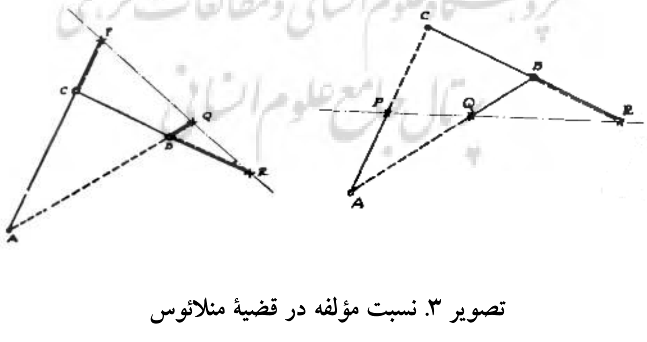
تصویر۱. شکل قطاع مسطح و نسبت بین اضلاع آن



تصویر ۲. شکل قطاع کروی و نسبت بین کمان‌های آن

شکل قطاع در ریاضیات دورهٔ اسلامی (قرن چهارم و بعد از آن) به دو چیز اطـلاق مـی‌شد. اول؛ شکلی که از تقاطع چهار پـاره‌خط(تصـویر ۱)، یـا چهـار کمـان از دوایـر عظیمـه (تصویر ۲) روی سطح یک کره حاصل می‌شود و دوم نسبتی است که بـین پـاره‌خـط‌هـا یـا کمان‌های این شکل برقرار است (مهدوی، ۱۳۹۰: ۱۸).

کار بدیع منلائوس برقراری تشابه میان اشکال مسطح و کـروی اسـت تـا قضـایا را روی سطح کره اثبات کند (امینی، ۱۳۹۲: ٣٦). روابطی که در تصاویر به آن‌هـا اشـاره شـد نسـبت مؤلفه نام دارد. در ریاضیات این دوران مفاهیم کسری بـه صـورت امـروزی وجـود نداشـت بلکه به جای محاسبهٔ کسرها و کار با نسبت‌ها از نسبت مؤلفـه اسـتفاده مـی‌شـد. در نسـبت مؤلفه ارزش مکانی حائز اهمیت اسـت از ایـن رو جابجـایی مقـادیر آن مسـتلزم اسـتفاده از قضایای دیگر بوده است.



تصویر ۳. نسبت مؤلفه در قضیهٔ منلائوس

(AP*BQ*CR=AQ*BR*CP)

منلائوس برای انجام چنین کاری مقالهٔ اول رسالهٔ خود را با قضایایی در مورد مثلث کروی تنظیم می‌کند چنانکه اقلیدس نیز مقالهٔ اول اصول را برای مثلث‌های مسطحه تنظیم کرده بود (امینی، ۱۳۹۲: ٣٦). قضیهٔ منلائوس (مقالهٔ اول کتاب اشکال‌الکریه) را می‌توان اینگونه مطرح کرد که: هرگاه قاطعی (PQR) سه ضلع مثلث (ABC) را قطع کند هر ضلع بر دو قطعه (داخله یا خارجه) تقسیم می‌شود و از این شش قطعه حاصل‌ضرب آن سه خط که انتهای مشترک ندارند مساوی است با حاصل‌ضرب سه قطعه خط دیگر (تصویر ۳) (کندی، ۱۳۳۲: ۳۳۵). بدیهی است از جابجایی طرفین تساوی نسبت بین اضلاع و به طبع آن کمان-ها مطابق آنچه علماء ایران بر اساس قوانین جبری کشف کرده‌اند حاصل می‌شود.

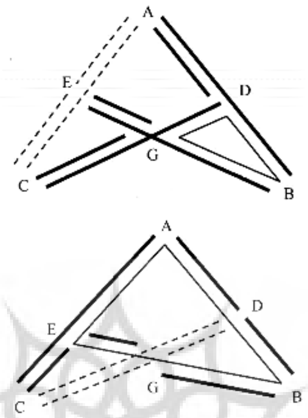
نصیرالدین طوسی نشان داد که تمام نسبت‌های مؤلفه‌ای را که می‌توان برای شکل‌القطاع نوشت از دو نسبت مؤلفه به دست می‌آید:

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BG}{GE}\cdot\frac{EC}{AC} \quad (۱)$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{EG}\cdot\frac{GC}{CD} \quad (۲)$$

وی دو نسبت یک (با استناد به تصویر ۳ سمت راست) و دو (با استناد به تصویر ۳ سمت چپ) را مطابق آنچه بطلمیوس ذکر کرده است به ترتیب تفصیل بطلمیوس و ترکیب بطلمیوس نامگذاری می‌کند و به طور مشابه نسبت ترکیب بطلمیوس برای حالت کروی (تصویر ۲) حاصل می‌شود (مهدوی، ۱۳۹۰: ۲۰). طبق تعریف، شکل قطاع مسطحه (تصویر ٤) از چهار خط (AB, BE, AC, CD) تشکیل شده است که دو به دو یکدیگر را در شش نقطه (A, B, C, D, E, G) قطع کرده‌اند. این چهار خط ارکان شکل قطاع هستند. بنا به تعریف نسبت مؤلفه از تلاقی یک مثلث و خط حاصل می‌شود. اگر در شکل دوم تصویر چهارم DGC را قاطع مثلث ABE بدانیم بنا بر قضیهٔ منلائوس بین قاطع و مثلث نسبت AC*GE*BD=DA*BG*EC برقرار است. از جابجایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف شدهٔ علماء ایران در جبر و مقابله، نسبت بین اضلاع مطابق نسبت اول (تصویر اول) حاصل می‌شود و از تناظر زوایای مثلث کروی و مسطحه نسبت‌های مؤلفه به همین طریق قابل اثبات بر روی سطح کروی (تصویر ۲) می‌باشد. و اگر در شکل اول تصویر دوم AEC را قاطع مثلث BDG بدانیم بنا بر قضیهٔ منلائوس بین مؤلفه‌های قاطع و مثلث نسبت AB*EG*CD=AD*BE*GC برقرار است. از جابجایی طرفین تساوی طبق قوانین کشف

شده علماء ایران در جبر و مقابله، نسبت بـین اضـلاع طبـق نسـبت دوم مؤلفـهٔ نصـیرالدین طوسی حاصل می‌شود. قانون دیگر قابل استنباط از قضـیه منلائـوس عـدم مشـارکت رکـن قاطع و ارکان مثلث (ترسیم شده با خط‌چین و خط نازک در تصاویر چهار و پنج) در قضـیهٔ نسبت مؤلفه‌ها است.



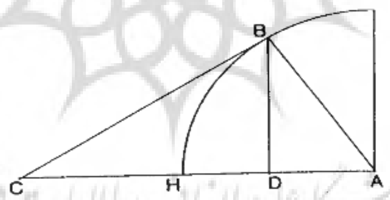
تصویر ۴. تفکیک شکل قطاع به قاطع و مثلث

اهمیت کار دانشمندان ایرانی (ابوالوفا، ابونصر و خجندی) ارتباط میان قوس‌ها و زوایـای کروی با جیب (سینوس) و ضل (تانژانت) و سایر توابع مثلثـاتی بـود. پیشـرفت دیگـر آنـان اثبات وجود رابطه بین زوایا و اضلاع هر مثلث کروی اسـت (کنـدی، ۱۳۳۲: ۳۴۱). راه‌حـل ابوالوفا برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث نه مانند خوارزمی بود و نه مانند اقلیدس. وی بـه خـوبی می‌دانست که این راه‌حل‌ها برای هنرورزان آنچنان انتزاعی است که نمی‌تواننـد از آن‌هـا سـر درآورند. در عوض ابوالوفا با تکیه بر ابتکارات خود مبنی بر تضعیف مربـع و تثلیـث زاویـه، قضیهٔ مطلقاً انتزاعی و نظری را به هنرورزانی که بالطبع با کارهـای عملـی سـر و کـار دارنـد تفهیم کرد بدون آنکه آنان را وادار کند تا کلیات ریاضیات آن عهد را فرا گیرند. طبق شـواهد موجود قضیهٔ منلائوس سر آغاز آفرینش طرح‌های مورد بحث این پژوهش در آثار معمـاری شد. سند مهم دیگری که در همین رابطه در رسالهٔ اوزدورال به آن اشاره شـد، رسـالهٔ بـدون عنوان فیلسوف و ریاضی‌دان مشهور ایرانی، عمر خیام است. راه‌حـل واسـط (مثلـث خیـام) روش دیگری برای درک بهتر هنرورزان از مسائل هندسی است. مثلثی کـه خـواص آن ذکـر شد دارای نسبتی هارمونیک است. تعریف ریاضی از ارتبـاط درسـت بـین انـدازه، موضـع و

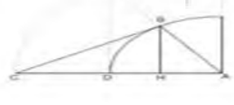
شکل اجزای گوناگون یک کل، تساوی نسبت‌ها است. حال باید دید ایـن مقولـه چگونـه در مثلث خیام به کار رفته است.

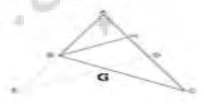
٤. جایگاه مثلث خیام در علوم محاسباتی اندیشمندان ایران

اوزدورال معتقد است روش‌های ابوالوفا برای حل مسـئلهٔ صـنعتگران در شکسـت طـاق‌هـا ناکام ماند زیرا صرفاً به صنعتگران نشان می‌داد که چگونـه مـی‌تواننـد مشـکل را بـه روشـی موجه حل نمایند. گرچه برتری ابوالوفا در ایجاد رابطه میان تئوری و عمل است اما دیـدگاه‌های خیام در رابطه با عرف هندسه با اتکـا بـه ادعاهـای تئـوری‌اش بـه عمـل نزدیـک بـود (Ozden, 2015: 3). خیام با ذکر این موضـوع کـه بیشـتر مخاطبـان او افـرادی هسـتند کـه بـا کارهای عملی سر و کار دارند می‌کوشد تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقـدور از مقـاطع مخروطی کمتر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیر ریاضی‌دان آسان‌تـر باشـد (اوزدورال، ۱۹۹۸: ۱۹۵). این قواعد برای اهل تجربه و عمل ارائه گردید اما در نهایـت قبـل از بـه پایـان رساندن آن، خیام دریافت که اصحاب صنایع در صورتی که مایـل باشـند خـود ایـن کـار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیـل روش واسط، روشی دوم خیام برای حل مسائل مطرح شده برای اصحاب صنایع بود.



تصویر ۵. مثلث خیام



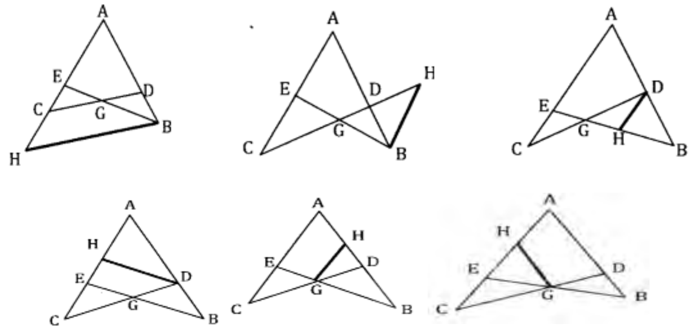


تصویر ۶. روند تبدیل مثلث خیام به قضیهٔ منلائوس

تصویر ۷. برهان شکل قطاع در حالت مسطحه

عمر خیام این مسئله را اینگونه مطرح ساخت: یک ربع دایره بـه مرکـز A را در نقطـهٔ B چنان تقسیم کنیم که اگر خط BD عمـود بـر شـعاع AH ترسـیم شـود $\frac{AH}{BD} = \frac{AD}{DH}$، گـردد (تصویر ۵) (Ozdural, 1998: 701). خیام روش مرزی حل ایـن مسـئله را بـه شـیوه‌ای دیگـر مطرح کرد که منجر به معرفی مثلث خیام گردید (تصویر ۵). وی برای معرفی ساختار مثلـث قائمهٔ ABC، جمع عمود و ضلع کوچک این مثلث را برابر وتـر قـرار داد (AC=AB+BD)، و در رابطه‌ای دیگر ضلع میانه مثلـث را برابـر مجمـوع ضـلع کـوچکتر و AD قـرار مـی‌دهـد (BC=AB+AD) (اوزدن، ۲۰۱۵؛ ۵۳). آنگاه AD را برابر با مقدار دلخواه ۱۰ و BD را برابـر بـا X فرض کرد و مسئله را به معادلهٔ درجهٔ سوم $X^3+200X=20X^2+2000$ تبدیل کرد (Ozdural, 1998: 702). هرچند خیام برای استخراج این معادله از ترسیمات بسیار پیچیده‌ای بهـره مـی‌برد، اما اثبات آن با توجه به قوانین محاسباتی و پایهٔ مثلثاتی حال حاضر کار چنـدان پیچیـده‌ای نیست. با استناد به روابط مثلثاتی می‌توان گفت که جواب حل این معادله نقطهٔ اسـت کـه می‌بایست تانژانت زاویهٔ ۵۷ درجه باشد. این قـوانین بـه همـراه بسـط و توسـعهٔ آن توسـط کاشانی از جمله مباحثی است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد.

جهت کشف این تناسبات هارمونیک، مثلث ABC خیام را طوری بسط می‌دهـیم کـه بـا مثلث متناظر و متساوی ADE شکل پایه و اولیه قضیهٔ منلائـوس حاصـل شـود (تصـویر ٦). برای این منظور به مرکز A و شعاع AC کمانی رسـم مـی‌کنـیم تـا در راسـتای AB نقطـهٔ E حاصل شود. اجزاء این دو مثلث نظیر به نظیر بـا هـم برابـر هسـتند. AB=AD شـعاع کمـان کوچکتر، AC=AE شعاع کمان بزرگتر و A=A زاویهٔ مشترک بین دو ضلع است. بنـابراین دو مثلث برابر هستند و ED=BC می‌باشد. با حذف خطوط کمان‌ها خطوط حاصله شیوهٔ برهـان شکل قطاع در حالت مسطحه خواهد شد (تصویر ۷). در این تصویر اگر ADE مثلث اصـلی و BC قاطع باشد، از برخورد قاطع با مثلث اصلی مثلث دوم BGE به نام مثلث خنثی حاصـل می‌شود. در این برهان از یکی از اضلاع مثلث خنثی (مثلاً B) خطی مـوازی یکـی از ارکـان مثلث اصلی (مثلاً BH) خارج می‌شود تا رکن دیگر مثلث را در نقطهٔ H قطـع گـردد. از هـر مثلث خنثی به شش طریق می‌توان خطوط موازی ترسیم نمود (تصویر ۸).



تصویر ۸. شش روش برهان شکل قطاع، **ABE** مثلث اصلی، **CD** قاطع و **BGD مثلث خنثی**

ترسیم این خطوط موازی مثلث‌های متشابه در حالت‌های مختلفی ایجاد می‌نمایند. در تصویر هشت با ترسیم خط موازی BH با رکن DE از نقطهٔ B قوانین ذیل حاصل می‌شود:

$$\Delta \mathrm{ABH} \sim \Delta \mathrm{AED} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{AB}}{AE}$$

$$\Delta \mathrm{CBH} \sim \Delta \mathrm{CGD} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{GD}} = \frac{\mathrm{CG}}{CB}$$

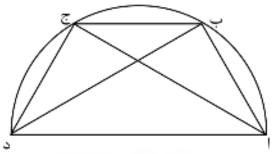
با حذف BH از طرفین تساوی بالا و ضرب آن‌ها در هم خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{GB} = \frac{AE}{AB} * \frac{CG}{CB}$$

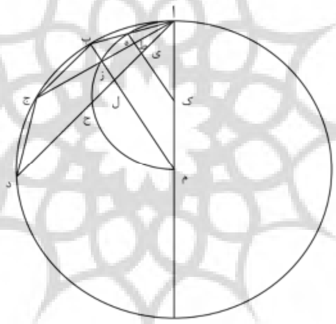
نسبت مؤلفهٔ مستخرج شده از این شکل‌القطاع با نسبت مؤلفهٔ قضیه منلائوس مطابقت دارد و این مهم استفادهٔ خیام از مفاهیم جبری در راه‌حل مرزی برای تعیین نسبت مؤلفه‌های اضلاع و به دنبال آن راه‌حل واسط در تعیین زاویه را مشهود می‌سازد.

کاشانی برای محاسبهٔ مساحت اشکال هندسی دیگر، نظیر مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج تا شانزده ضلعی منتظم، اعدادی را حساب کرده تا برای محاسبهٔ مساحت این اشکال مربع ضلع آن را در عدد مذکور ضرب کنند (کاشانی، بی‌تا: ۲۱). محاسبهٔ وتر ثلث یک زاویه با استفاده از یک معادلهٔ جبری از جمله روش‌هایی است که توسط جمشید کاشانی برای حل مسئلهٔ تثلیث زاویه عرضه شده است. پس از او دیگر ریاضی‌دانان مانند قاضی‌زادهٔ رومی رساله‌هایی بر مبنای این رسالهٔ کاشانی تألیف کردند. میرزا ابوتراب نطنزی ریاضی‌دان عصر قاجار نیز به این مسئله پرداخته است. روش او اساساً هندسی است و از لحاظ ریاضی با روش جبری جمشید کاشانی هم‌ارز است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۱). در بیان استخراج جیب یک درجه تألیف قاضی‌زادهٔ رومی آمده است: «ذی‌اربعه‌الاضلاعی که در دایره‌ای واقع شود، مجموع مسطح ضلعین متقابلین او مساوی مسطح قطرین او است.» (تصویر ۹) (سوادی،

۱۳۸۷: ۷۷). در جایی دیگر ذکر شده؛ «دایرهٔ ابجد بـه مرکـز م رسـم کنـیم و هـر یـک از قوس‌های اب، بج، جد به قدر دو[٦] درجه فصل کنـیم و اوتـار اب، بج، جد، اج، اد وصـل کنیم و قطر ام اخراج کنیم و بر منصف ام، یعنی بـر نقطـهٔ ک، نصـف دایـرهٔ ام رسـم کنـیم. لامحاله اب، اج، اد را تنصیف کند بر نقطه‌های ه ز ح؛ به جهت آنکه اقطـاری کـه از نقطـهٔ م بر این نقطه‌های سه‌گانه می‌آید، عمود باشد بر هر یک از این اوتار سه‌گانه به شکل سـی‌ام از مقالهٔ سیم» (تصویر ۱۰) (سوادی، ۱۳۸۷: ۷۸–۷۷).



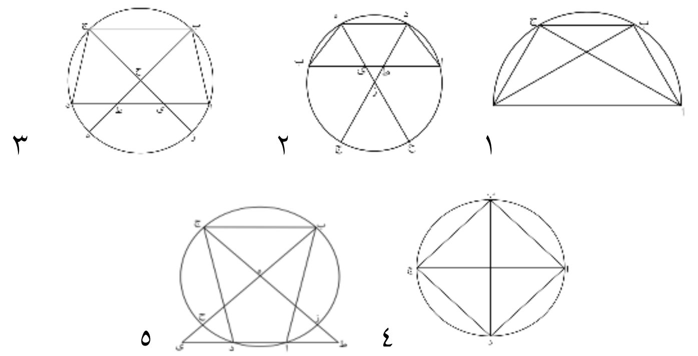
تصویر ۹: ذی اربعه‌الاضلاع



تصویر ۱۰: قطاع قائمه مستخرج از نقاط سه‌گانه

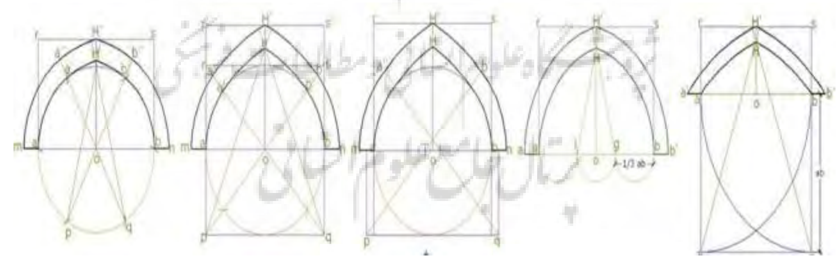
و به این‌صورت خطوطی قائمه از مرکز دایره بر این نقاط سه‌گانه فرود مـی‌آیـد. کاشـانی با همین قواعد به محاسبهٔ جیب یک درجه دست یافت. وی در ابتدا ثابـت کـرد کمـان‌هـای ایجاد شده بر دایرهٔ کوچکتر نصف کمان‌های ایجاد شده بر روی دایـرهٔ بزرگتـر هسـتند و بـا تکیه بر جیب سه درجه (ایجاد شده بر روی دایرهٔ کوچک) به محاسبهٔ جیب یک درجه نائـل گشت. مثلثی شبیه به مثلث خیام اما با زاویهٔ ٦۰ درجه (مثلث خیـام دارای زاویـهٔ ۵۷ درجـه بود) در ترسیمات کاشانی مشهود است. به نظر می‌رسد تثلیث زاویه تلاشی اسـت بـرای بـه دست آوردن چندضلعی‌های منتظم و برای حل آن دانش مقاطع مخروطی لازم است.

کاشانی جیب یک درجه را بر حسب جیب سه درجه از راه حل جبـری و حـل معادلـهٔ درجهٔ سومی به صورت $aX=X^3+b$ محاسبه کرده است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲۵).



تصویر ۱۱: پنج حالت تشریح هندسی تثلیث کمان توسط ابوتراب نطنزی

ابوتراب پس از تشریح روش کاشانی در تثلیث کمان روش خود را در پنج حالت مختلف (تصویر ۱۱) ذکر کرد. روش اثباتی برای سه حالت اول، سوم و پنجم یکسان و برای دو حالت دوم و چهارم بدیهی است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲٦). در حالت اول طبق اثبات کاشانی؛ در هر چهارضلعی محاط در دایره، مجموع حاصل‌ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل‌ضرب دو قطر (سوادی، ۱۳۸۷؛ ۹٦). در حالت دوم (شکل دوم تصویر ۱۲) قوس‌های BC، AB & CD را برابر در نظر می‌گیریم، بنابراین وترهای مقابل به آن‌ها نیز با یکدیگر برابر هستند. همچنین قوس‌های رو به رو به زاویهٔ مرکزی O نیز با هم برابرند درنتیجه زاویهٔ CDA نصف قوس AC است و با زاویهٔ COB برابر است (دوست‌قرین، ۱۳۸۸: ۲۷–۲٦).



تصویر ۱۲. پنج روش ترسیم قوس برگرفته از کتاب مفتاح الحساب کاشانی

شیوهٔ ترسیم اشکال بی‌ارتباط با قواعد هندسی تثلیث کمان به نظر نمی‌رسد. نسبت مؤلفه‌ها از قرون سوم و چهارم به بعد همواره به عنوان برهانی اثباتی و کمی کنندهٔ ترسیمات هندسی مسائل بسیاری را مرتفع ساخت. بعد از آشنایی با مثلث خیام و ارتباط آن با قضیهٔ منلائوس و تدقیق آن توسط کاشانی موارد استعمال آن‌ها را در معماری ایران جستجو خواهیم نمود. در ادامه به عناصر معماری اشاره خواهد شد که این قضایا در نظام‌مند ساختن‌شان مؤثر بوده‌اند. بدیهی است که هدف این پژوهش دست یافتن به منطق ریاضی نهفته در این عناصر می‌باشد.

۵. قواعد محاسباتی و ترسیمی کاشانی در طاق و گنبد معماری

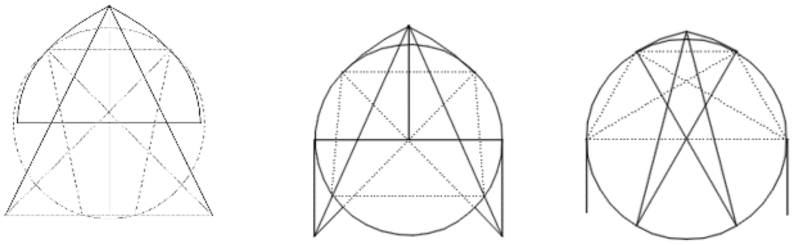
طرح‌های پیچیدهٔ هندسی که زینت‌بخش بناهای تاریخی ایران هستند به گونه‌ای پیوند خورده‌اند تا ترکیب‌های بی‌شماری را بر روی دیوارها و نقش و نگارهای دلفریب مقرنس‌ها به وجود آورند. علم ظریف هندسه نه تنها در تزئینات بلکه در ترکیبات هندسی سازه‌ای بنا از جمله گنبدها و قوس‌ها تأثیر چشم‌گیری داشت. البته به راحتی می‌توان چنین اظهار نظری را اغراق‌آمیز دانست و یا حتی رد کرد اما باید اذعان داشت، استدلالی که اساس رابطهٔ مشترک بین تکامل هندسه و معماری را تشکیل می‌دهد می‌تواند نقیض این فرض باشد که معماران هنرورز فاقد هر گونه نبوغ هندسی بودند. یک پیوند آشکار میان هندسه و معماری، توصیف‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب مفتاح‌الحساب راجع به مقرنس و مساحت سطح و حجم طاق، ازج و گنبدها است. در ادامه توصیف‌های مربوط به طاق و گنبد ذکر شده در معماری را با استناد به قواعد زبان اشکال در علوم محاسباتی تحلیل خواهیم نمود.

در تعریف غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوسی که آن را قوس حقیقی (شکل دوم تصویر ۱۳) می‌نامد پوششی است که روی دو تکیه‌گاه که بین دو خط موازی واقع شده‌اند قرار می‌گیرد و سه روش ترسیمی اول[۷] از پنج بخش[۸] تشکیل یافته‌اند (دولد سمپلونیوس، ۲۰۰۷: ٦۳). کاشانی مبنایی را برای ترسیم طاق‌ها ارائه داده که می‌توان با تقسیم دایره به روش اول و دوم به عددهای دیگری دست یافت و همچنین تقسیمات دیگر قطر دایره در روش سوم و چهارم گونه‌های دیگر طاق را ترسیم نمود (تصویر ۱۲) (طاهری و نورتقانی، ۱۳۹۰: ۱۲٤). کاشانی متذکر می‌شود که می‌توان کمان‌ها را حول نقاط دیگر بر روی خطوط داخل و خارج نیم‌دایره قرار داد اما محاسبات آن پیچیده‌تر خواهد شد (دولد سمپلونیوس، ۲۰۰۷:

٦٥). در سه روش اول این ترسیمات قواعد موجود در نسبت مؤلفه‌ها که بر پایهٔ شکل-القطاع (قضیهٔ منلائوس) شکل گرفته‌اند و فرم برش خوردهٔ لوزه در راس طاق به چشم می-خورد، همچنین میزان تأثیر پنج حالت تشریح تثلیث کمان (تصویر ۱۱) کاشانی که توسط ابوتراب نطنزی هندسی گردید در ترسیم این کمان‌ها قابل ارزیابی به نظر می‌رسد. قوس‌ها در واقعیت تنوع بیشتری نسبت به پنج نوع معرفی شده توسط کاشانی دارند. قابل ذکر است کاشانی به مقاطع بیضی شکل برای قوس‌ها اشاره‌ای نکرده است. اگر قوس‌هایی غیر از پنج مدل ارائه شده مورد بررسی قرار گیرند بایستی نزدیک‌ترین مدل به قوس را اختیار کرد. گولومبیک و ویلبر از مقایسهٔ قوس‌های کاشانی و قوس‌های واقعی دوران تیموری دریافتند که هدف کاشانی محاسبهٔ سطح و حجم بوده است اما به دلیل نبود اطلاعات کافی در خصوص اجرای آن توسط معماران اظهار نظر نکرده اند، و به این معنی است که یک محاسبهٔ ساده ما را به یک تقریب ظریف که هدف نهایی است رهنمون می‌سازد که با استناد به آن می‌توان این ترسیمات را توسط قواعد تثلیث کمان کاشانی به دیگر قوس‌ها تعمیم داد. به عنوان مثال علاوه بر نسبت مؤلفه‌هایی که در سه روش اول در ترسیمات کاشانی مشاهده می‌شود دو روش اول قابل انطباق با حالت اول و سوم تثلیث کمان است که خود توسط حالت پنجم بسط داده شده‌اند و روش سوم ترسیم قوس قابل انطباق با حالت پنجم تثلیث کمان است که طبق آنچه که قبلاً ذکر شد هندسه‌ای بدیهی ایجاد کرده‌اند. کاشانی کتاب مفتاح‌الحساب خود را با شرح مثلث و قواعد حاکم بر آن آغاز کرد و جهت ریاضی کردن عناصر معماری از همان قواعد بهره برده است. بنابراین وجود رابطه میان قوانین مثلثاتی و عناصر معماری امری بدیهی به نظر می‌رسد.

در بخش قبل سعی کردیم تا نشان دهیم که کاشانی چگونه با دقت، ضرایب قوس‌ها را محاسبه کرده است. دهانهٔ هر قوس منشاء و اساس کلیهٔ قوانین برای بدست آوردن ارزش نسبت‌ها به منظور قاعده‌مندسازی مشخصات مشتق شده از هر پوسته است. در اینجا تعیین سه پارامتر اصلی نقاط مرکزی و موقعیت شکست بالای قوس ضروریست اما تجزیه و تحلیل طاق‌ها و گنبدها مستلزم شناخت قوس‌هایی است که با حرکت و دورانشان، این عناصر حاصل می‌شوند. برای تسهیل در ارائه و تنظیم یک ساز و کار هندسی، علاوه بر قضیهٔ منلائوس سیستمی مبتنی بر پنج حالت هندسی تثلیث کمان که توسط ابوتراب نطنزی از دست‌نوشته‌های کاشانی تشریح شده است، پیشنهاد می‌گردد (تصویر ۱۳). در این مطابقت از اتصال نقاط تلاقی قوس‌ها و خطوط کمان ساز با یکدیگر حالت مختلف تثلیث

کمان استخراج شده است. این عملکرد به انعطاف‌پذیری تجزیه و تحلیل و تعریف قواعد هندسی تولید نمونه‌های متداول برای طاق و گنبد کمک کننده خواهد بود.



تصویر ۱۳. تطبیق قوس‌های مستخرج از کتاب مفتاح الحساب (خطوط ممتد) و اصول هندسی تثلیث کمان (خطوط منقطع)، تصاویر از سمت راست ۱. تطبیق قوس نوع اول و حالت اول تثلیث کمان۲. تطبیق قوس نوع دوم و حالت سوم تثلیث کمان ۳. تطبیق قوس نوع سوم و حالت پنجم تثلیث کمان

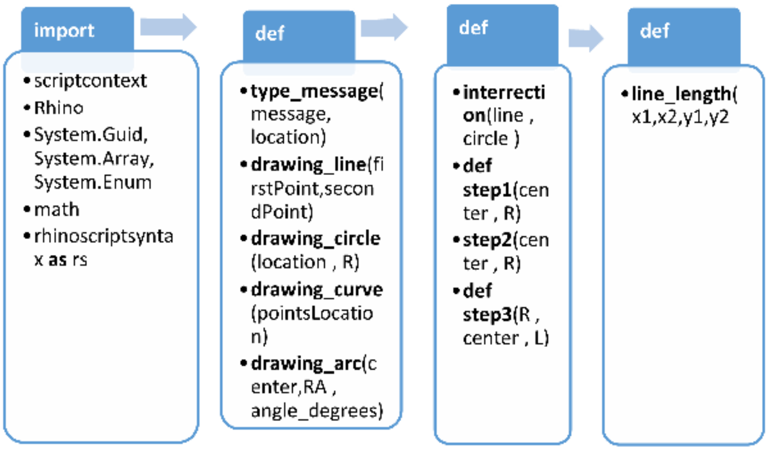
دو روش نخست کاشانی قوس‌های سه مرکزی را به وجود می‌آورد. در روش نخست، زاویه‌ای که دو قسمت قوس را تقسیم می‌کند ٦٠ درجه است. روش دوم مستلزم آن است که دایره را به هشت قسمت تقسیم کنیم تا نتیجهٔ آن زاویهٔ صاعد ٤٥ درجه باشد. اختلاف اساسی میان دو نوع طاق در انتخاب زاویهٔ صاعد و قوس دوم قرار دارد (ویلبر و همکاران، ۱۹۸۸: ۲۱۱). زاویهٔ ٦٠ درجه برعکس زاویهٔ ٤٥ درجه در پای طاق شیب‌دارتر و در نقطه راس کم عمق‌تر است. اگر مرکز دایره در قوس روش دوم بر روی پایهٔ عمودی قرار گیرد راس طاق بلندتر و شیب‌دارتر خواهد شد. در مقایسهٔ نمونه‌های واقعی طاق‌های تیموری با سرمشق‌هایی که کاشانی به توصیف آن پرداخته است، می‌خواهیم به این پرسش پاسخ دهیم. آیا عملیات ریاضیات در معماری را کاشانی درست مورد توجه قرار داده است یا رسالهٔ او فقط تمرین عملی و نظری بوده است؟

٦. ارزیابی سرمشق‌های کاشانی با زبان برنامه‌نویسی پایتون

بررسی مطالعات موجود نیازمند آزمون‌های مدل‌های فیزیکی است. از این رو سه روش اول اجرای قوس را که کاشانی در کتاب «مفتاح‌الحساب» به توصیف آن پرداخته است به وسیله زبان برنامه نویسی پایتون وارد فضای نرم‌افزاری راینو کرده و میزان مطابقت میان قوس‌های ترسیم شده با اصول هندسی تثلیث کمان را ارزیابی کردیم. در این روند تمرکز بر ترسیم

قوس‌ها دقیقاً بر اساس روش ترسیم در کتاب مفتاح‌الحساب بوده و در انتها اصـول هندسـی ذکر شده (تصویر ۱۳) در میان نقاط کلیدی این قوس‌ها ارزیابی شد.

زبان برنامه‌نویسی پایتون پتانسیل‌های جدیدی با قابلیت شی‌گرایی و نحـو (دسـتور زبـان اشکال) برای برنامه‌نویسی در نرم‌افزار راینو ارائه می‌دهد (Rutten, 2011: 1). اسکریپت‌هـا در این برنامه، پرونده‌های متنی هستند که به طور هم‌زمان و برخط تفسیر می‌شوند. اسکریپت‌هـا قابلیت کنترل دارند و این کنترل اسکریپت را قادر می‌سازد تا دستورالعمل خاصی را اجرا یـا تکرار کند (Rutten, 2011: 3). از ایـن، رو، در اسـکریپت روش اول، ابتـدا کـدهای ترسـیمی راینو و محاسبات ریاضیاتی فراخوانی (import) شدند و برای ساده کردن تماس به آن‌هـا نـام مستعار داده شد. این روند با اعلام توابع(def) اصلی ادامه یافت. تـابع اول خلـق آبجکـت‌هـا است و اگر آبجکت‌ها ایجاد نشوند برای جلوگیری از بروز خطا زیر روال‌هـا متوقـف مـی-شوند. به دنبال تابع اول چهار تابع طبق توصیف کاشانی ترسیم خـط (دهانـهٔ طـاق)، ترسـیم دایره به مرکز مشخص وبه قطر دهانهٔ طاق، تقسیم دایره و ترسیم کمان‌ها طبق ضوابط تعیـین شد. در تابع آخر از نرم‌افزار خواسـته شـده چهارضـلعی محـاط بـر دایـره و قطرهـای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب و محاسبه کند که آیا طبق اصول هندسی تثلیـث کمـان، مجمـوع حاصل‌ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل‌ضرب دو قطر، و در صورت مغـایرت میـزان خطا محاسبه شود. در اسکریپت روش دوم و سوم به دلیل پیچیدگی‌هـای موجـود در روش ترسیم و انطباق طاق با قوانین تثلیث کمان، تابع دیگری (interrection) در سـه مرحلـه (step) به توابع فوق اضافه گردید. در مرحلهٔ اول (def step 1) از نرم افزار خواسته شده تا برخـی از کمان‌های و خطوط ترسیم شده در توابع پیشین را انتخاب نماید و در دو مرحلـهٔ آخـر (def step 2 & def step 3) از نرم افزار خواسته شده چهارضلعی محاط بـر دایـره و قطرهـای آن را (مطابق تصویر ۱۳) انتخاب کند و بعـد از آن محاسـبات را انجـام داده و میـزان مغـایرت را تعیین نماید (نمودار ۱). در این سه شیوهٔ ترسیم میزان خطـا بـه ترتیـب صـفر، ۰.٦٥ و ١.٦٦ درصد اعلام شده است. بـه عبـارت دیگـر، در روش اول طـاق مطابقـت کامـل بـا اصـول هندسی تثلیث کمان را نشان داده است و در روش دوم و سوم به ترتیـب مطابقـت طـاق بـا اصول هندسی تثلیث کمان دارای خطای نزدیک به نیم و یک و نیم درصد است.



نمودار ۱: اسکریپت ترسیم قوس با تشریح کاشانی (در زبان برنامه‌نویسی پایتون) و بررسی میزان انطباق آن با تثلیث کمان

به صورت نصف و یا قطعه‌ای از یک کرهٔ توخالی هستند. همچنین می‌توانند به شکل مخروط ضلع‌دار (هرم) و یا بر اساس شکلی که از چرخش یکی از انواع طاق‌ها حول محوری که از راس آن گذشته و به وسط قاعدهٔ آن عمود است، حاصل شوند (کاشانی، بی‌تا؛ ۳۷). کاشانی در رساله‌اش به چهار نوع گنبد اشاره می‌کند. نیم‌کروی، بخشی از کره، یک مخروط چند وجهی و بالاخره گنبدی که از چرخش یک قوس پیرامون مرکزش بدست آمده باشد. هر یک از قوس‌ها و طاق‌ها را می‌توان حول مرکزش چرخاند (ویلبر و همکاران، ۱۹۸۸؛ ۲۱۷). از این رو مطالعات فوق قابل استناد و بررسی برای هر دو عنصر معماری طاق و گنبد خواهد بود.

۷. فلسفهٔ تکنولوژی ساخت طاق و گنبد معماری در عصر تیموری

تکنولوژی پدیده‌ای است که همواره همراه انسان بوده و او را در دستیابی به مقاصدش یاری کرده است (بابایی، ۱۳۹۸؛ ۱). نظریه‌های علمی بر اساس قدرت تبیینی و شواهد تجربی ارزیابی می‌شوند و تایید آن‌ها مستقل از خواسته و ارادهٔ انسان‌ها است، در حالی‌که در تکنولوژی خواست و ارادهٔ انسان دخیل است (پایا و منصوری، ۱۳۹۷؛ ۱٤۸). تکنولوژی ساخت طاق و گنبد معماری ایران در دوران تیموری با پیدایش قوس‌های کمان‌ساز متنوع،

بلند و تیزه‌دار همراه بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان عصر تیموری مقالهٔ چهارم از رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» را به محاسبه، ترسیم و اندازه‌گیری عناصر معماری اختصاص داده است. این رساله با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز می‌شود و در باب نهم از مقالهٔ چهارم با بررسی و ارزیابی برخی از عناصر معماری پایان می‌پذیرد. کاشانی ذکر می‌نماید: «پیشینیان صرفاً دربارهٔ اندازه‌گیری طاق و قوس صحبت کرده‌اند و به مسائل مرتبط با آن نپرداخته‌اند. اما من این کار را کرده و برای آن روشی علمی ارائه داده‌ام که در اندازه‌گیری ساختمان‌ها به کار می‌رود». به نظر می‌رسد رویکرد علمی غیاث‌الدین در تثلیث زاویه و رسالهٔ «وتر و جیب» در دستیابی به تکنولوژی ساخت طاق و گنبد تیموری و قوس‌های مرتفع و تیزه‌دار مؤثر بوده است.

قوس‌های کمان‌ساز طاق و گنبد در تکنولوژی ساخت این عناصر نقش عمده‌ای دارند. قوس در تعریف هندسی خط و یا شکلی منحنی است و در اصطلاح معماری به باریکهٔ طاقی که بین دو دیوار قرار دارد، اطلاق می‌شود. به عبارتی دیگر به کمانی که طاق از لحاظ شکلی تابع آن است، قوس گفته می‌شود. ازج[۹] واژه‌ای عربی است و غیاث‌الدین این واژه را برای طاق به کار برد. قوس‌ها در دوران قبل از اسلام و حتی تا قرون اولیه بعد از اسلام در ایران غالباً مازه‌دار هستند اما به تدریج پوشش‌های تیزه‌دار جای آن را گرفت. در قوس مازه-دار رأس هلالی شکل و یا بخشی از بیضی است و رأس قوس تیزه‌دار تیز است و از تقاطع حداقل دو قوس منحنی ایجاد می‌شود. از عمده‌ترین دلایل جایگزینی قوس تیزه‌دار مرتفع-تر نشان دادن بنا در مقایسه با قوس مازه‌دار است. ساخت طاق‌ها و گنبدهای بلند با تحمل نیروهای فشاری بیشتر گواه آشنایی ایرانیان با ضوابط ترسیم قوس از لحاظ ریاضی و هندسی است.

۸. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

تقسیم کره توسط دوایر عظیمه مطابق قضیهٔ منلائوس و رسم اشکال ساده بر سطح آن توسط بوزجانی در باب انتهایی رساله‌اش آغاز شده است. وی در این باب شرح داد که چگونه با ترسیم این دوایر بر سطح کره می‌توان کره را به قسمت‌های مساوی تقسیم کرد و در ادامه این تقسیمات را به ترسیمات اشکال متفاوت بر سطح کره مرتبط ساخت. در قرون بعد، خیام و پس از آن کاشانی از جمله ریاضی‌دانانی بودند که آثار به جا مانده از آنان قابل تحلیل و تطبیق با مفاهیم هندسهٔ کاربردی مرتبط با معماری است که بوزجانی در رسالهٔ

خود در تبیین آن اهتمام ورزیده بود. تضعیف مربع و تثلیث زاویه راه‌حل‌هایی هستند که ابوالوفا در کتاب اعمال هندسی خود مطرح نموده است. موارد ذکر شده از جمله مباحثی بودند که ذهن ریاضی‌دان‌ها را بسیار به خود مشغول کرده و حاصل آن کشف مقاطع مخروطی بود که تاثیر بسزایی در جهش و پیشرفت بسیاری از علوم و معماری داشت.

روش‌های ابوالوفا برای حل مسئلهٔ صنعتگران در شکست طاق‌ها ناکام ماند و فقط به صنعتگران نشان داد که چگونه می‌توانند مشکل را به روشی موجه حل نمایند. برتری شاخص ابوالوفا در ایجاد رابطه میان تئوری و عمل است، اما دیدگاه خیام در رابطه با عرف هندسه با اتکا به تئوری‌اش به عمل نزدیک شد و خیام در تشریح مثلث خود کوشید تا روشی پیدا کند که در آن حتی‌المقدور از مقاطع مخروطی کمتر استفاده شود تا درک آن برای افراد غیر ریاضی‌دان آسان‌تر باشد. روش خیام برای اهل تجربه و عمل ارائه گردید اما در نهایت خیام دریافت که اصحاب صنایع در صورتی که مایل باشند خود این کار را انجام دهند به مقدماتی از اصول و مفاهیم مقاطع مخروطی نیاز دارند و به همین دلیل روش واسط روشی دوم خیام برای حل مسائل مطرح شده از جانب اصحاب صنایع بود. استفاده از مثلث خیام و شیوهٔ ترسیم آن به یک معادلهٔ درجهٔ سوم منجر گردید که خیام با استفاده از مقاطع مخروطی به حل آن فائق آمد. نقوش ترسیمی که در آن‌ها از مثلث خیام استفاده می-شود به اشکال دیگری منجر می‌گردد که در اشکال مستخرج شده توسط ریاضی‌دانان قرن نهم، غیاث‌الدین جمشید کاشانی بررسی گردید. محاسبات هندسی این اشکال توسط کاشانی بسط داده شد و در نهایت تکمیل گردید.

کاشانی رسالهٔ «مفتاح‌الحساب» را با مثلث و مسائل مربوط به آن آغاز و در محاسبهٔ جیب یک درجه از مثلثی شبیه به مثلث خیام (مثلث قائم‌الزاویه ۵۷ و ۳۳ درجه) استفاده کرد، با این تفاوت که او هر جیب را معادل یک واحد در حساب شصتگانی محاسبه کرد. مثلث کاشانی برای محاسبهٔ جیب یک درجه در حساب شصتگانی برابر با مثلث قائم‌الزاویهٔ ٦۰ و ۳۰ بود. ثابت ابن قره و به دنبال آن ابوالوفا بوزجانی در تضعیف مربع و تثلیث زاویه از مثلث‌های قائم‌الزاویه با همین نسبت (نسبت اضلاع یک به دو) استفاده کرده اند. کاشانی بر اساس تجربیات خود در ایستایی و رفتار سازه‌ای قوس‌ها که تا قبل از آن برخی از آن‌ها شکسته می‌شدند. این قوس‌ها را طراحی و ترسیم کرده است. او قوسی که از نظر ریاضی و معماری کاربردی است را پیشنهاد داد و قوس دوم را (دارای نیم درصد خطا نسبت به حالت ایده‌آل اصول هندسی است) قوس حقیقی در معماری دانسته و روش دیگری را

برای خیز بیشتر مطرح کرد که بر اساس اصـول هندسـی اسـتوار اسـت. از نظـر پژوهشـگر کاشانی قواعد مثلثاتی ریاضیات در معماری را به درستی مورد توجه قـرار داده اسـت و ایـن تمرین عملی و نظری نبوده است. او با علم به وجود میـزان خطـا کـه بـه معنـای خـروج از تثلیث کمان با خطایی نزدیک به یک درصد (قابل اغماض در علم آمـار) اسـت قـوس‌هـای مناسبی را از نظر معماری و ریاضیاتی پیشنهاد داده است و گواه آن قوس نوع اول بـا تقسـیم دایره تحت زاویهٔ شصت درجه می‌باشد که دارای خطای صفر درصد است.

پی‌نوشت‌ها

۱. تاریخ تولد کاشانی به طور دقیق در منابع نیامده است. ابوالقاسم قربانی در «کاشانی‌نامه» بـا اسـتناد به برخی از قرائن تاریخ تولد کاشانی را در حدود ۷۹۰ ق. می‌داند. وی تاریخ درگذشـت غیـاث-الدین را نوزدهم رمضان ۸۳۲ ق. ذکر کرده است.

۲. منلائوس اسکندرانی دانشمند یونان باستان، قضیهٔ اول مقالهٔ سوم از کتاب الاشـکال‌الکریـه وی بـه قضیهٔ منلائوس معروف است که به چهار کمان متقاطع از دایره‌های عظیمه روی سطح کـره بیـان می‌شود.

۳. منلائوس در مقالهٔ سوم کتاب خود قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنـد کـه تـا پـیش از قضـیهٔ ابـداع سینوس‌ها در قرن چهارم هجری، تمام محاسبات مربوط به کمان‌های روی کـره بـا اسـتفاده از آن انجام می‌شد. این قضیه امروز به نام خود منلائوس معروف است و در دورهٔ اسلامی (قرن چهـارم و بعد از آن) شکل‌القطاع نامیده شد. این قضیه در مجسطی بطلمیوس در هر دو حالـت مسـطح و کروی ذکر شده است.

٤. از نظر دانشمندان دورهٔ اسلامی جیب از جنس طول بود اما سینوس امـروزه بـه صـورت نسـبت تعریف می‌شود. جیب یک کمان معادل حاصلضرب شعاع دایـرهٔ مفـروض و سـینوس آن کمـان است. در گذشته برای کسینوس یک کمان یا زاویهٔ لفظ جیب تمام یعنی جیب متمم آن کمـان یـا زاویه استعمال می‌شد.

۵. به جای کلیهٔ توابع مثلثاتی کنونی یونانی‌ها فقط یک تابع به کار می‌بردند که آن را تـابع وتـر مـی-نامند. و علامت اختصاری آن crd است و تعریف این تابع این است که اگـر هـر عـدد مفروضـی مانند X را مقدار درجه زاویهٔ مرکزی قرار بدهیم به طوری‌که شعاع دایره مربوطه مسـاوی شصـت باشد وتر آن زاویهٔ مرکزی crdX می‌شود.

٦. از دید پژوهشگر این رقم بر مبنای اعداد شصتگانی نوشته شده و هر واحد برابر شصت است.

۷. اولین نوع برای دهانه‌های کمتر از پنج ذراع، نوع دوم برای پنج، ده و حداکثر پانزده ذراع و نوع سوم برای دهانه‌های بزرگتر از ده باع بسیار مناسب است.

۸. دو بخش از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری کوچکتر یا مساوی دهانه بر روی دو تکیه‌گاه، دو بخش دیگر از یک استوانه یا حلقه یا شکل طبل با قطری بزرگتر از اولی با ارتفاع برابر بر روی راس دو بخش اول، قطعه‌ای به شکل لوزی که قوس‌ها را به هم متصل می‌کند. در روش چهارم قوس تنها دو قطعهٔ استوانه‌ای همراه با سنگ بالای طاق تشکیل شده و در روش پنجم تنها شامل دو بخش استوانه‌ای است.

۹. فرق طاق و ازج در نسبت عرض و یا همان عمق به دهانهٔ آن‌ها است. عرض طاق بیشتر از دهانهٔ آن نیست ولی در ازج ممکن است بیشتر و گاهی به اندازهٔ عرض آن باشد.

کتاب‌نامه

امینی، حسن. (۱۳۹۲). تعبیر کروی هندسهٔ مسطحه در بخش هندسی الاشکال الکریه منلائوس، تاریخ علم، ١٤، ٤٤: ٤٦–٣١.

اوزدورال، آلپای. (۱۹۹۸)، عمر خیام و معماری، ترجمهٔ: ناصر کنعانی. (۱۳۸۰). فرهنگ، ۳۹ و ٤٠، صص ۲۵۲–۱۸۹.

بابایی، سعیده. (۱۳۹۸). فلسفهٔ تکنولوژی بورگمان: مروری انتقادی، فلسفه علم، ۹:۲، صص: ۳۳–۱.

بی‌نا، (۱۳۸۸). رسالهٔ فی شرح ما أشکل من مصادرات کتاب اصول اقلیدس، کتاب ماه علوم و فنون، ۱۱۸، صص: ۷۷–٦٠.

پایا، علی. منصوری، علی‌رضا. (۱۳۹۷). علم و تکنولوژی: تفاوت‌ها، تعامل‌ها، و تبعات آن‌ها، فلسفه علم، ۸:۲ صص: ۱۵۸–۱۳۱.

خیری، علی. (۱۳۸۹). قوس معماری ایرانی اسلامی در «مفتاح‌الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی، کتاب ماه علوم و فنون، (۱۲۹)۲، صص: ۳٤–۲۸.

دوست‌قرین، فاطمه. (۱۳۸۸). رسالهٔ میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه، تاریخ علم، ۸ صص: ۲۹–۱.

سمپلونیوس، ایوونه دولد. (۲۰۰۰). روش کاشانی برای محاسبهٔ قوس‌ها، ترجمهٔ: علیرضا اشرفی و محمدرضا احمدی، (۱۳۸٤)، آیینه میراث ویژهٔ تاریخ علم، ۳:۲۸، صص: ۷۷–٦١.

سوادی، فاطمه. (۱۳۸۷). رساله‌ای فارسی دربارهٔ محاسبهٔ جیب یک درجه، تاریخ علم، ٦، صص: ۱۰٤–٦۹.

طاهری، جعفر. (۱۳۹۰). نقد بر تحقیق و تصحیح «ترجمه کتاب النجاره» بوزجانی، کتاب ماه علوم و فنون، شمارهٔ ۵۳، صص: ۹–۳.

طاهری، جعفر و ندیمی، هادی. (۱۳۹۱). بازخوانی میراث ابوالوفا بوزجانی در صنعات معماری، تاریخ علم، ۱۳، صص: ۹۱–۶۵.

طاهری، جعفر و نورتقانی، عبدالحمید. (۱۳۹۰). دانش ریاضیات معماری در آثار کاشانی، کتاب ماه علوم و فنون، (۵۲)۲، صص: ۱۳۰–۱۲۱.

قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۶۸). کاشانی‌نامه: احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، چاپ دوم، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

کاشانی، غیاث‌الدین جمشید. (بی‌تا). رسالهٔ طاق و ازج، ترجمهٔ: سید علیرضا جذبی، (۱۳۹۳). چاپ سوم، تهران: انتشارات سروش.

کندی، ای. اس. (۱۳۳۲). نکته‌هایی دربارهٔ هیأت اسلامی، علوم اجتماعی: فرهنگ ایران زمین، ۱، صص: ۲۹۱–۳۴٦.

مهدوی، یونس. (۱۳۹۰). قضیهٔ منلائوس در کتاب کشف القناع ، کتاب ماه علوم و فنون. (۱۳۸)۲:۵، صص: ۲۹–۱٦.

نجیب اغلو، گل‌رو. (۱۹۹۵). هندسه و تزئین در معماری اسلامی (طومار توپقایی)، ترجمهٔ: مهرداد قیومی بید هندی. (۱۳۹۷). چاپ سوم، تهران: روزنه‌کار.

ویلبر، دونالد و همکاران. (۱۹۸۸). معماری تیموری در ایران و توران، ترجمهٔ: کرامت‌الله افسر و محمد یوسف کیانی، (۱۳۷٤)، چاپ اول، تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور.

یوشکه‌ویچ، آدولف. روزنفلد، بوریس. (۱۹۵٦). غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ترجمهٔ: پرویز شهریاری، (۱۳۵۸)، ماهنامهٔ علمی و فرهنگی هدهد، ۱:۲، صص: ۱٦–۸.

Ozden, Denise. (2015). THEORY AND PRACTICE OF GEOMETRY IN MEDIEVAL ARCHITECTURE IN THE MIDDLE EAST (10th-14th CENTURIES), A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL OF SOCIAL SCIENCES OF MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY, etd.lib.metu.edu.tr, retrieved: 08/2019.

Ozdural, Alpay. (1998). A Mathematical Sonata for Architecture: Omar Khayyam and the Friday Mosque of Isfahan, Technology and Culture, Vol. 39, No. 4, PP: 699-715.

Ozdural, Alpay. (2000). Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World, Historia Mathematica, Vol. 27, No. 2, pp: 171-201

Rutten, David. (2011). Python for Rhinoceros 5, Rhinocervs, Revision 3, http://designalyze.com/sites/default/files/tutorial_files/RhinoPythonPrimerRev3.pdf, retrieved: 01/2020. \