منطق‌پژوهی، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ــ پژوهشی)، سال دهم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۸، ۳۷ ــ۶۳

منطق فازی تک‌نرم گزاره‌ای با ادات صدق

عامر آمیخته*

لطف الله نبوی**

چکیده

منطق تک‌نرم UL یک منطق فازی، زیرساختاری و نیمه‌ربطی است. سیستم گنتزن UL از حذف قواعد انقباض و تضعیف از سیستم گنتزن منطق فازی گودل بدست می‌آید. UL فاقد «طرد شق ثالث»، «پارادوکس مثبت» و «پارادوکس منفی» است. تابع ارزش تک‌نرم تضعیفی ربطی از تابع t–نرم است. در این مقاله منطق جدید ULΔ را معرفی می‌کنیم. ULΔ با افزودن اپراتور وجهی Δ به UL بدست می‌آید. ULΔ که بسطی از منطق کلاسیک است، یک منطق موجهات نرمال نیمه‌خطی است. یعنی نسبت به یک جبر مرتب خطی به طور قوی صحیح و تمام است. ULΔ با قضیه‌ی $(p\to q)\vee\Delta(q\to p)$ از دیگر سیستم‌های استاندارد منطق موجهات متمایز می‌گردد. Δφ شهوداً تعبیر می‌شود که «صادق است که φ» یا به عبارت دقیق‌تر «به طور کلاسیک صادق است که φ». در این مقاله منطق نیمه‌کلاسیک ULΔ را با چهار رویکرد اصل موضوعی، حساب ابرشته‌ها، معناشناسی جبری و معناشناسی استاندارد معرفی می‌کنیم. فراقضیه‌هایی که بررسی می‌کنیم عبارت‌اند از: استنتاج دلتا، صحت قوی، تمامیت استاندارد قوی و تعریف‌پذیری منطق کلاسیک.

کلیدواژه‌ها: "منطق فازی"، "منطق تک‌نرم"، "ادات صدق"، "منطق موجهات نیمه‌خطی"، "تمامیت استاندارد".

* دانشجوی دکتری فلسفه، گرایش منطق، دانشگاه تربیت مدرس، amer.amikhteh@modares.ac.ir
** استاد گروه فلسفه و حکمت و منطق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران (نویسندهٔ مسئول)،
nabavi_l@modares.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۰۵

۱. مقدمه

منطق تک‌نرم (uninorm logic) UL اولین بار در مقالـه‌ی متکـالف و مونتاگنـا در سـال ۲۰۰۷ (Metcalfe & Montagna, 2007) معرفی شده است. یک سیستم منطقی را فـازی مـی‌خـوانیم اگر و تنها اگر نسبت به یک معناشناسی با مجموعه ارزش‌های [0,1] صـحیح و تمـام باشـد. UL که یک منطق زیرساختاری نیز هست از حذف قواعد انقباض (contraction) و تضـعیف (weakening) از «حسـاب ابررشـته‌هـای» (hypersequent calculus) منطـق فـازی گـودل G بدست می‌آید.

از آنجا که در UL پارادوکس مثبت یعنی فرمول $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ اثبات ناپذیر است این منطـق یک منطق نیمه‌ربطی نیز هست. اما یک منطق کاملاً ربطی نیست. چرا کـه در آن پـارادوکس فصلی یعنی فرمول $(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$ اثبات‌پذیر است. پارادوکس منفی، بـه راسـتگو (EQT) و از تناقض (EFQ) نیز در UL اثبات‌پذیر نیستند.

معناشناسی استاندارد UL مشابه با دیگر منطق‌های فازی بر تابع ارزش عطف فازی & بـه نام تابع تک‌نرم * مبتنی است. تابع تک‌نرم که تضـعیفی از تـابع t–نـرم اسـت اولـین بـار در ۱۹۹٦ (Yager & Rybalov, 1996) معرفی شده است. تابع تک‌نرم همان تابع t–نرم است تنهـا با این تفاوت که عضو خنثی آن (یعنی کوچکترین مقدار صدق) ثابت t (و نـه 1) اسـت. بـه عبارتی در UL بر خلاف منطق‌های فازی t–نرم، ارزش صدق، بزرگتر–مساوی t (و نه الزامـاً مسـاوی بـا 1) اسـت. همچنـین * در UL عطفـی (conjunctive) و پیوسـته‌ی چـپ (left-continuous) است.

ادات یا محمول صدق Δ اولین بـار در مقالـه‌ی بـاز در سـال ۱۹۹٦ (Baaz, 1996) بـه G اضافه شد. $\Delta\varphi$ شهوداً تعبیر می‌شود که «صادق است که φ» یا به عبـارت دقیـق‌تـر «بـه طـور کلاسیک صادق است که φ». Δ در منطق‌های فازی t–نرم توسط تـابع ارزش δ بـا ضـابطه‌ی $\delta(x)=\begin{cases}1, & x=1\\0, & x\neq 1\end{cases}$ تعبیر شده است. در زبان طبیعی یک جمله خبری را ترد (crisp) یا معمـولی می‌خوانیم اگر و تنها اگر فاقد مفاهیم مبهم باشد. به عنوان مثال «تهران پایتخت ایـران اسـت» یک جمله‌ی ترد ولی «علی بلندقد است» یک جمله‌ی فازی یا غیرتـرد اسـت. متنـاظراً یـک گزاره ترد است اگر و تنها اگر منطقاً یا صادق باشد یا کاملاً کاذب. با اضافه شـدن اپراتـور Δ به زبان منطق‌گزاره‌ای فازی، گزاره‌های ترد به فرم $\Delta\varphi$ قابل ترجمه هسـتند. در ایـن صـورت

استدلال زیر که در منطق‌های فازی بدون اصل انقباض (مانند منطق فازی لوکاسیه‌ویچ Ł و منطق ضربی Π) بدون ادات Δ نامعتبر بودند با اضافه شدن Δ معتبر خواهند شد:

«اگر امروز یکشنبه است، فردا دوشنبه است.
امروز یکشنبه است.
پس، فردا دوشنبه است.»

زیرا در منطق‌های فازی غیرمنقبض قاعده وضع مقدم در حالت کلی برقرار نیست. اما برای گزاره‌های ترد برقرار است. نکته قابل توجه این است که در منطق‌های فازی به علاوه ادات Δ منطق کلاسیک تعریف‌پذیر می‌شود. ازین جهت همه‌ی استدلال‌های اثبات‌پذیر منطق کلاسیک در این منطق‌ها نیز اثبات‌پذیرند. بنابراین این منطق‌ها در واقع منطق‌های نیمه‌کلاسیک هستند. به این معنا که این منطق‌ها بسطی[1] از منطق کلاسیک هستند.

در این مقاله ابتدا به عنوان مقدمه منطق فازی UL را با چهار رویکرد اصل موضوعی، حساب ابررشته‌ها، معناشناسی استاندارد و معناشناسی جبری گزارش می‌دهیم. این گزارش بسیار فشرده خواهد بود. و خواننده علاقمند برای توضیحات بیشتر و دیدن سیستم‌های قوی‌تر می‌تواند به کتاب (Metcalfe et al., 2009) مراجعه کند. سپس در بخش نوآوری به معرفی و بررسی منطق فازی با ادات صدق ULΔ با تابع صدق $\delta(x)=\begin{cases} t, & x\geq t \\ 0, & x<t \end{cases}$ می‌پردازیم.

۲. ساختار نحوی منطق فازی تک‌نرم گزاره‌ای

۱.۲ زبان صوری UL

تعریف ۱. زبان UL که آن را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ی $\{\wedge,\vee,\&,\to,t,f,\bot\}$ است. مجموعه‌ی متغیرها که آن را با Var نشان می‌دهیم یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی مثل $\{p_i|i\in\mathbb{N}\}$ است. و مجموعه‌ی فرمول‌های UL که آن را با Fm نشان می‌دهیم به طور استقرایی به صورت زیر ساخته می‌شود:

$\forall\varphi\in Var\cup\{t,f,\bot\}:\ \varphi\in Fm$ (فرمول‌های اتمی)

$\forall\star\in\{\wedge,\vee,\&,\to\}:\ \varphi,\psi\in Fm \Longrightarrow (\varphi\star\psi)\in Fm$

پرانتزهای بیرونی حذف می‌شوند و تعاریف زیر را نیز داریم:

$\top =_{df} \bot\to\bot \qquad \sim\varphi =_{df} \varphi\to f \qquad \neg\varphi =_{df} \varphi\to\bot$

$\varphi\leftrightarrow\psi \;=df\; (\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)$ $\quad\varphi\vee\psi \;=df\; {\sim}\varphi\rightarrow\psi$ $\quad\varphi t \;=df\; \varphi\wedge t$

∧، ∨، & و → به ترتیب عطف معمولی، فصل معمولی، عطف فازی و شرط فازی هستند. & در UL هم عطف قوی (strong conjunction) در ادبیات منطق فازی t–نرم و هم تلفیق (fusion) در ادبیات منطق ربط است. ازین جهت & در UL را می‌توان تلفیق قوی نامید. → نیز استلزام فازی نیمه‌ربطی است. ⊥ «کذب مصداقی» یا همان تناقض معمولی است که با سورهای گزاره‌ای با فرمول $(\forall p)p$ تعریف‌پذیر می‌شود. t «صدق معنایی» یا «صدق فازی» است که با سورهای گزاره‌ای با فرمول $(\forall p)(p\rightarrow p)$ تعریف‌پذیر می‌شود. و در نهایت f «کذب معنایی» یا «تناقض نسبی» است که با سورهای گزاره‌ای معادل فرمول $\sim(\forall p)(p\rightarrow p)$ است. البته باید توجه داشت که در UL نه اصل موضوعی برای f بیان می‌شود و نه در معناشناسی شرطی برای آن. بنابراین f در UL در واقع هیچ معنای خاصی ندارد و صرفاً یک ثابتی است که برای تعریف نقض از آن استفاده شده است.

تعریف ۲. یک استدلال در منطق L زوج مرتب $\langle\Gamma,\varphi\rangle$ است. به طوری که:

۱. Γ مجموعه‌ای از فرمول‌های منطق L است. (مقدمات استدلال)

۲. φ یک فرمول در منطق L است. (نتیجه‌ی استدلال)

در این مقاله دو نظریه برهان برای ULΔ معرفی می‌کنیم. ازین جهت HL (H=Hilbert) را یک سیستم اصل موضوعی گزاره‌ای و GL (G=Gentzen) را یک حساب ابررشته‌های گزاره‌ای در نظر بگیرید.

از آنجا که Δ کاملاً مشابه با ادات‌های UL تعبیر می‌شود؛ یک ادات تابع ارزشی (truth functional) و به عبارت دقیق‌تر یک ادات خطی است و برای تعبیر آن به عنوان مثال نیازی به معناشناسی جهان ممکنی نداریم، Δ را یک ادات گزاره‌ای مشابه با ~ در نظر می‌گیریم و نه یک ادات موجهاتی مانند □ مثلاً در سیستم‌هایی مانند S4 یا S5.

تعریف ۳. استدلال $\langle\Gamma,\varphi\rangle$ در HL به طور رسمی اثبات‌پذیر است و می‌نویسیم $\Gamma\vdash_{HL}\varphi$ اگر و تنها اگر یک n–تایی مرتب مثل $\langle\varphi_1,\cdots,\varphi_n\rangle$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi_n=\varphi$ و برای $i\in\{1,\cdots,n-1\}$ فرمول φ_i:

۱. یا یکی از اعضای Γ باشد.

۲. یا یکی از اصول موضوعه‌ی HL باشد.

۳. یا با استفاده از یکی از قواعد استنتاج HL از فرمول‌های قبل بدست آمده باشد.

به علاوه اگر Γ، تهی باشد می‌گوییم φ قضیه‌ی HL است و می‌نویسیم $\vdash_{HL}\varphi$.

۲.۲ سیستم اصل موضوعی UL

تعریف ۴. دستگاه استنتاجی HUL عبارت است از اصول و قواعد زیر:

(B):	$(\varphi\to\psi)\to[(\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)]$	
(C):	$[\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[\psi\to(\varphi\to\chi)]$	
(&E):	$[\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\&\psi)\to\chi]$	
$(\wedge E)_i$:	$(\varphi_1\wedge\varphi_2)\to\varphi_i$	$i\in\{1,2\}$
$(\wedge I)$:	$[(\varphi\to\psi)\wedge(\varphi\to\chi)]\to[\varphi\to(\psi\wedge\chi)]$	
$(\vee I)_i$:	$\varphi_i\to(\varphi_1\vee\varphi_2)$	$i\in\{1,2\}$
$(\vee E)$:	$[(\varphi\to\chi)\wedge(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\vee\psi)\to\chi]$	
(PRL_t):	$((\varphi\to\psi)\wedge t)\vee((\psi\to\varphi)\wedge t)$	

(I):	$\varphi\to\varphi$
(&I):	$\varphi\to[\psi\to(\varphi\&\psi)]$
$(\bot)$:	$\bot\to\varphi$
(tE):	$t\to(\varphi\to\varphi)$
$(\&\wedge)$	$(\varphi_t\&\psi_t)\to(\varphi\wedge\psi)$
(MP):	$\varphi\to\psi,\varphi\vdash\psi$
(Ad_u):	$\varphi\vdash\varphi_t$

منطق فازی t–نرم تکواری (monoidal t-norm logic) HMTL که توسط استوا و گودو در سال ۲۰۰۱ معرفی شده است (Esteva & Godo, 2001)، از افزودن اصل (W): $(\varphi\to t)\wedge(f\to\varphi)$ به HUL بدست می‌آید. همچنین منطق هایک (Hájek, 1998) یا منطق فازی پایه (basic logic) HBL با افزودن اصل (DIV): $(\varphi\wedge\psi)\to[\varphi\&(\varphi\to\psi)]$ به HMTL بدست می‌آید. HG نیز از افزودن اصل $(C2)$: $\varphi\to(\varphi\&\varphi)$ به HMTL بدست می‌آید. همچنین با اضافه شدن اصل (EM): $\varphi\vee{\sim}\varphi$ به HMTL یک سیستم اصل موضوعی دیگر برای منطق کلاسیک HCL خواهیم داشت.

UL اما ضعیف‌ترین سیستم منطق فازی شناسایی شده نیست. ضعیف‌ترین سیستم منطق فازی که تا به اکنون شناسایی شده؛ منطقی است به نام «منطق زیرساختاری خطی» (linearly substructural logic) SL^{ℓ} که توسط پیتر سینتولا در سال ۲۰۱۵ (Cintula et al., 2015) معرفی شده است. SL^{ℓ} فاقد ویژگی‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای & است. در منطق‌های فازی غیرجابه‌جایی دو نوع شرط اصلی خواهیم داشت.

یک منطق فازی را بنیادی (fundamental) می‌نامند اگر و تنها اگر در معناشناسی استاندارد آن تابع‌های ارزش یکتا باشند. یا به عبارت دقیق‌تر جبر استاندارد آن یکتا باشد. به عنوان مثال منطق‌های G، Ł و Π بنیادی هستند. ولی BL بنیادی نیست. اما علاوه بر منطق‌های فازی مشهور G، Ł و Π که علی الاصول انتظار می‌رود خواننده آن‌ها را بشناسد

تا به حال پنج منطق فازی بنیادی گسترش یافته دیگر از UL نیز شناسایی شده است. این منطق‌ها به ترتیب تاریخی عبارت‌اند از منطق مینیمم پوچ توان (nilpotent minimum logic) NM، منطق گودل مینیمم پوچ‌توان NMG، منطق ادغام تک‌نرم برگشتی (involutive uninorm mingle logic) IUML، منطق تقاطع-ریشه (cross-ratio logic) CRL، و منطق ضربی شدید اصلاح شده (revised drastic product logic) RDP. که به ترتیب در (Esteva & Godo, 2001)، (S.-M. Wang et al., 2005)، (Metcalfe & Montagna, 2007)، (Gabbay & Metcalfe, 2007) و (S. Wang, 2007) معرفی شده‌اند. در این میان منطق‌های NM، NMG و RDP گسترش‌هایی از MTL و اصطلاحاً یک منطق فازی t-نرم هستند. در حالی که منطق‌های IUML و CRL ربطی (نیمه‌ربطی) یعنی فاقد (W) هستند.

فراقضیه استنتاج در HUL یک طرفه است. به این صورت که اگر $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ آنگاه $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi$ اما نه برعکس. اما در عوض فراقضیه زیر برقرار است:

قضیه ۱.

$$\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi \Leftrightarrow \exists n\geq1\ \Gamma\vdash(\varphi\wedge t)n\to\psi$$

φ^n را عطف n بار فرمول φ بگیرید. به عنوان مثال $\varphi^2=_{df}\varphi\&\varphi$. این فراقضیه به «قضیه استنتاج محلی» (local deduction theorem) معروف است. برای اثبات این فراقضیه، قضیه ٤.۹ در (Galatos & Ono, 2006) را ببینید.

۳.۲ سیستم حساب ابررشته‌های UL

در این مقاله فرض بر این است که خواننده حداقل با «حساب رشته‌های» (sequent calculus) منطق کلاسیک که آن را با GCL نشان می‌دهیم، آشنایی دارد. خواننده ناآشنا به عنوان مثال می‌تواند (اردشیر، ۱۳۹۱) را ببیند.

مانند GCL در حساب ابررشته‌های UL که آن را با GUL نشان می‌دهیم دو مفهوم زبانی وجود دارد. برای نمایش «مجموعه‌های مکرر متناهی» از نمادهای Γ، Δ، ⋯ و برای نمایش رشته‌ها از نماد $\Gamma\Rightarrow\Delta$ استفاده می‌کنیم. تفاوتی که ایجاد می‌شود این است که در بسط‌های UL اگر Γ را $\{\varphi1,\cdots,\varphi n\}$ و Δ را $\{\psi1,\cdots,\psi m\}$ بگیرید در این صورت تعبیر استاندارد رشته‌ی $\Gamma\Rightarrow\Delta$ فرمول $(\varphi1\&\cdots\&\varphi n)\to(\psi1\vee\cdots\vee\psi m)$ است.

در UL «معرفی نقض مضاعف» یعنی فرمول $p\rightarrow\sim\sim p$ قضیه است. امـا عکـس آن یعنـی «حذف نقض مضـاعف» یعنـی فرمـول $\sim\sim p\rightarrow p$ قضـیه نیسـت. اصـطلاحاً UL یـک منطـق غیربرگشتی است. به منطق‌هایی که در آن «نقض مضاعف» یعنی فرمول $p\leftrightarrow\sim\sim p$ قضیه باشـد «منطق برگشتی» (involutive logic) می‌گویند. به عنوان مثال Ł یک منطق برگشتی اسـت امـا G برگشتی نیست. مطلب مهم در اینجا این است که در GUL و دیگر منطق‌های غیربرگشـتی تنها رشته‌های یگانه–نتیجه (single-conclusion) یعنی رشـته‌هـایی کـه تـالی آن یـک فرمـول است؛ مجاز هستند.

اما در GUL یک مفهوم زبانی دیگر به نام مفهوم «ابررشـته» (hypersequent) وجـود دارد. ابررشته در واقع یک مجموعه‌ی مکرر متناهی مثل $\{S_1,\cdots,S_n\}$ از رشته‌ها اسـت کـه آن را بـه صورت $S_1|\cdots|S_n$ نشان می‌دهیم. در این‌جا تعبیر اسـتاندارد | ادات ∨ اسـت. توجـه کنیـد کـه داخل رشته‌ها با ادات‌های عطف و فصل فـازی و خـارج آن بـا ادات‌هـای عطـف و فصـل معمولی تعبیر می‌شود.

برای بقیه موارد نیز، همچون انواع قواعد استنتاج، خلاصـه نویسـی‌هـا و تعریـف برهـان مانند GCL است.

جدول ۱. قواعد استنتاج GUL

۱) رشته‌های ابتدایی (اصول موضوعه):	$\dfrac{}{\mathcal{G}\mid\varphi\Rightarrow\varphi}\ (\mathrm{I})$
۲) قاعده برش:	$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma_1,\varphi\Rightarrow\psi \quad \mathcal{G}\mid\Gamma_2\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow\psi}\ (\mathrm{Cut})$
۳) قواعد ساختاری:	$\dfrac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}\mid\mathcal{H}}\ (\mathrm{EW}) \qquad \dfrac{\mathcal{G}\mid\mathcal{H}\mid\mathcal{H}}{\mathcal{G}\mid\mathcal{H}}\ (\mathrm{EC})$ $\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma_1,\Pi_1\Rightarrow\varphi \quad \mathcal{G}\mid\Gamma_2,\Pi_2\Rightarrow\psi}{\mathcal{G}\mid\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow\varphi\mid\Pi_1,\Pi_2\Rightarrow\psi}\ (\mathrm{Com})$
٤) قواعد منطقی ($i\in\{1,2\}$):	$\dfrac{}{\mathcal{G}\mid\Gamma,\bot\Rightarrow\varphi}\ (\bot\Rightarrow)$
$\dfrac{}{\mathcal{G}\mid\Rightarrow t}\ (\Rightarrow t)$	$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Gamma,t\Rightarrow\varphi}\ (t\Rightarrow)$
$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma\Rightarrow}{\mathcal{G}\mid\Gamma\Rightarrow f}\ (\Rightarrow f)$	$\dfrac{}{\mathcal{G}\mid f\Rightarrow}\ (f\Rightarrow)$

$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \quad \mathcal{G} \mid \Gamma_2, \psi \Rightarrow \chi}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma_2, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \chi}\ (\rightarrow\Rightarrow)$	$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\rightarrow)$
$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \chi}{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi \& \psi \Rightarrow \chi}\ (\&\Rightarrow)$	$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \quad \mathcal{G} \mid \Gamma_2 \Rightarrow \psi}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \varphi \& \psi}\ (\Rightarrow\&)$
$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi_i \Rightarrow \psi}{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow \psi}\ (\wedge\Rightarrow)_i$	$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \quad \mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \psi}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ (\Rightarrow\wedge)$
$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi \Rightarrow \chi \quad \mathcal{G} \mid \Gamma, \psi \Rightarrow \chi}{\mathcal{G} \mid \Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \chi}\ (\vee\Rightarrow)$	$\dfrac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \varphi_i}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\Rightarrow\vee)_i$

تعریف ۵. دستگاه استنتاجی GUL قواعد استنتاج جدول ۱ است.

۳. ساختار معنایی منطق فازی تک‌نرم گزاره‌ای

۱.۳ معناشناسی استاندارد UL

تعریف ۶. تابع دو موضعی $*$ روی $[0,1]$، یک تابع تک‌نرم (uninorm function) اسـت اگـر و تنها اگر

1. (commutativity) $\forall x,y: x*y = y*x$ جابه‌جایی:

2. (associativity) $\forall x,y,z: (x*y)*z = x*(y*z)$ شرکت‌پذیری:

3. (monotonicity) $\forall x,y,z: x \leq y \Longrightarrow x*z \leq y*z$ یکنواختی:

4. (unitality) $\forall x: e_* * x = x$ یکه‌داری:

در این صورت e_* را عضو خنثی $*$ می‌نامیم. اگر $e=1$ باشد تابع t–نرم بدست می‌آید.

تعریف ۷. تابع تک‌نرم $*$ عطفی است اگر و تنها اگر $\forall x: x*0=0$

تعریف ۸. تابع دوموضعی $*$ روی $[0,1]$ پیوسته‌ی چپ است اگر و تنها اگر:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \forall y \forall x_n \left(x > x_n, \lim_{n \to \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n * y) = x*y \right)$$

به عبارت دیگر:

$\forall x \in [0,1] \forall Y \subseteq [0,1]: x*\sup Y = \sup\{x*y \mid y \in Y\}$

تعریف ۹. $[0,1]_{UL} =_{df} \langle [0,1], \min, \max, *, \rightarrow, e, f, 0 \rangle$ یک UL–جبر استاندارد است اگـر و تنها اگر $*$ و $\rightarrow$ دو تابع دو موضعی روی $[0,1]$ و $e,f \in [0,1]$ باشند. به طوری که:

۱. $*$ یک تابع تک‌نرم عطفی پیوسته‌ی چپ با عضو خنثی e باشد.

2. $x \rightarrow y = \max\{z \mid z*x \leq y\}$

تعریف ۱۰. یک [0,1]–تعبیر یک تابع مثل I از Var به [0,1] است. همچنین یک UL–**مدل استاندارد** یک دوتایی مرتب مثل $\mathfrak{M}^{UL}_{[0,1]}=_{df}\langle[0,1]_{UL},I\rangle$ است.

تعریف ۱۱. برای هر UL–مدل استاندارد $\mathfrak{M}$، یک UL–**ارزشدهی استاندارد** برای $\mathfrak{M}$، یک تابع مثل $V_{\mathfrak{M}}$ از Fm به [0,1] است به طوری که:

$$\forall\varphi\in Var: V_{\mathfrak{M}}(\varphi)=I(\varphi) \qquad V_{\mathfrak{M}}(\varphi\rightarrow\psi)=V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\rightarrow V_{\mathfrak{M}}(\psi)$$

$$V_{\mathfrak{M}}(\perp)=0,\ \ V_{\mathfrak{M}}(f)=f,\ \ V_{\mathfrak{M}}(t)=e \qquad V_{\mathfrak{M}}(\varphi\wedge\psi)=\min\{V_{\mathfrak{M}}(\varphi),V_{\mathfrak{M}}(\psi)\}$$

$$V_{\mathfrak{M}}(\varphi\&\psi)=V_{\mathfrak{M}}(\varphi)*V_{\mathfrak{M}}(\psi) \qquad V_{\mathfrak{M}}(\varphi\vee\psi)=\max\{V_{\mathfrak{M}}(\varphi),V_{\mathfrak{M}}(\psi)\}$$

تعریف ۱۲ (استدلال معتبر).

1. $\mathfrak{M}\vDash\varphi \quad \Leftrightarrow_{df} \quad V(\varphi)\geq e$

2. $\Gamma\vDash^{[0,1]}\varphi \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \forall\mathfrak{M}(\forall\psi\in\Gamma,\mathfrak{M}\vDash\psi \Rightarrow \mathfrak{M}\vDash\varphi)$

قضیه ۲ (Metcalfe & Montagna, 2007). $\Gamma\vdash_{HUL}\varphi \Leftrightarrow \Gamma\vdash_{GUL}\varphi \Leftrightarrow \Gamma\vDash^{[0,1]}_{UL}\varphi$

سمت «اگر $\Gamma\vDash^{[0,1]}\varphi$ آنگاه $\Gamma\vdash\varphi$» به فراقضیه تمامیت استاندارد قوی مشهور است.

۲.۳ معناشناسی جبری UL

در این مقاله فرض بر این است که خواننده حداقل با مفاهیم مقدماتی جبر مانند تکوار، شبکه و انواع مجموعه‌های مرتب آشنایی دارد.

تعریف ۱۳. یک UL–جبر یک جبر مثل $\mathcal{U}=_{df}\langle U,\wedge,\vee,\&.\rightarrow,t,f,\perp\rangle$ با جهان U، اپراتورهای دو موضعی ∧، ∨، &، → و ثوابت t، f، ⊥ است به طوری که:

۱. $\langle U,\wedge,\vee,\perp,\top\rangle$ یک شبکه کراندار (bounded lattice) با عنصر سر (top) $\top=_{df}\perp\rightarrow\perp$، عنصر ته (bottom) ⊥ و مرتبه‌ی (order) ≤ است.

۲. $\langle U,\&.t\rangle$ یک تکوار جابه‌جایی (commutative monoid) است.

3. (residually condition) $\forall x,y,z\in U: \quad x\&y\leq z \Leftrightarrow x\leq y\rightarrow z$ (شرط مانده‌ای)

4. (prelinearity condition) $\forall x,y\in U: \quad t\leq((x\rightarrow y)\wedge t)\vee((y\rightarrow x)\wedge t)$

(شرط پیش‌خطی)

قضیه ۳ (Metcalfe & Montagna, 2007). *یک تابع تک‌نرم مانده‌ای است اگـر و تنهـا اگـر پیوسته‌ی چپ و عطفی باشد.*

با این قضیه ارتباط معناشناسی استاندارد و جبری UL آشکار می‌شود.

تعریف ۱۴. UL–جبر $\mathcal{U}=\langle U,\wedge,\vee,\&,\rightarrow,t,f,\bot\rangle$ با مرتبه‌ی $\preceq$

۱. یک UL–زنجیر یا یک UL–جبر خطی است اگـر و تنهـا اگـر خطـی (linear) باشـد. یعنی: $\forall x,y: x\leq y \text{ or } y\leq x$.

۲. یک UL–جبر گویا یا یک UL–زنجیر چگال است اگر و تنها اگر مرتبه‌ی آن خطـی و چگال (dense) باشد.

۳. یک UL–جبر استاندارد است اگـر و تنهـا اگـر $U=[0,1]$ و مرتبـه‌ی آن همـان ترتیـب معمولی باشد.

مجموعه‌ی $[0,1]_{\mathbb{Q}}=_{df}[0,1]\cap\mathbb{Q}$ تحت ترتیب معمولی، در واقع یک زنجیر کرانـدار چگـال و $[0,1]$ یک زنجیر چگال کامل است.

تعریف ۱۵. یک UL–مدل دو تایی مرتب $\mathfrak{M}=\langle\mathcal{U},I\rangle$ است. به طوری که:

۱. $U=\langle U,\wedge,\vee,\&,\rightarrow,t,f,\bot\rangle$ یک UL–جبر است.

۲. I یک تابع از Var به U است.

تعریف ۱۶. برای هر UL–مدل $\mathfrak{M}=\langle\mathcal{U},I\rangle$ یک UL–ارزشدهی برای $\mathfrak{M}$، یـک تـابع مثـل $V_{\mathfrak{M}}$ از Fm به U به این صورت است که اولاً $\forall p\in Var: V_{\mathfrak{M}}(p)=I(p)$ ثانیاً:

$$V_{\mathfrak{M}}(c)=c\in\{t,f,\bot\},\quad V_{\mathfrak{M}}(\varphi\star\psi)=V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\star V_{\mathfrak{M}}(\psi);\ \star\in\{\wedge,\vee,\&,\rightarrow\}$$

تعریف ۱۷ (صدق در مدل و اعتبار).

1. $\mathfrak{M}\vDash\varphi \quad \Leftrightarrow_{df} \quad V(\varphi)\geq t$
2. $\mathfrak{M}\vDash\Gamma \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \forall\varphi\in\psi: \mathfrak{M}\vDash\psi$
3. $\Gamma\vDash^{GEN}\varphi \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \forall(\mathfrak{M}\vDash\Gamma \Rightarrow \mathfrak{M}\vDash\varphi)$

تعریف ۱۸. در تعریف ۱۷ اگر UL–جبر $\mathcal{U}$ به ترتیب UL–زنجیر، UL–جبر گویـا و UL–جبر استاندارد باشد در این صورت به جای بالانویس GEN به ترتیب از بالانویس‌هـای LIN، DEN و [0,1] استفاده می‌کنیم.

با توجه به قضیه ۳، ویژگی‌های شبکه و یک سری محاسبات ساده می‌توان نشـان داد کـه معناشناسی استاندارد UL و معناشناسی جبری UL بـا جبـر اسـتاندارد معـادل هسـتند. ازیـن جهت برای هر دو نمادهای مشترکی استفاده می‌شود.

قضیه ٤ (Metcalfe & Montagna, 2007).

$$\Gamma\vDash^{GEN}\varphi \Leftrightarrow \Gamma\vDash^{LIN}\varphi \Leftrightarrow \Gamma\vDash^{DEN}\varphi \Leftrightarrow \Gamma\vDash^{[0,1]}\varphi$$

٤. ساختار نحوی منطق تک‌نرم با ادات صدق

۱.۴ سیستم اصل موضوعی ULΔ

تعریف ۱۹. زبان ULΔ که آن را با $\mathcal{L}\Delta$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ی $\mathcal{L}\cup\{\Delta\}$ اسـت. و مجموعـه فرمول‌های ULΔ که آن را با Fm_Δ نشان می‌دهـیم یـک گسـترش اسـتقرایی از Fm اسـت بـه طوری که اگر φ یک فرمول باشد Δφ نیز یک فرمول خواهد بود. به علاوه تعریف‌هـای زیـر را نیز اضافه می‌کنیم:

$$-\varphi =_{df} \varphi\supset\bot \qquad \varphi\supset\psi =_{df} \Delta\varphi\to\psi \qquad \nabla\varphi =_{df} \sim\Delta\sim\varphi$$

با توجه به معناشناسی صوری کـه در قسـمت بعـدی بـه آن خـواهیم پرداخـت. مفهـوم «کذب کلاسیک» یا «عدم صدق کلاسیک» می‌بایست شهوداً با ادات − تعبیر شود. به عبـارتی φ− شهوداً تعبیر می‌شود که «کاذب است (صادق نیست) که φ». تاکید می‌شـود کـه در اینجـا دقیقاً صدق و کذب به معنای کلاسیک آن مد نظر است.

تعریف ۲۰. دستگاه استنتاجی HULΔ همان دسـتگاه اسـتنتاجی HUL اسـت بـه عـلاوه اصول و قاعده‌ی زیر:

(K):	$\Delta(\varphi\to\psi)\to(\Delta\varphi\to\Delta\psi)$	(T):	$\Delta\varphi\to\varphi$	(EM_Δ):	$\Delta\varphi\vee\neg\Delta\varphi$
(V):	$\Delta(\varphi\vee\psi)\to(\Delta\varphi\vee\Delta\psi)$	(i_Δ):	$\Delta\varphi\to t$	(RN):	$\varphi\vdash\Delta\varphi$

تا به حال ضعیف‌ترین منطق فازی که به آن ادات صدق اضافه شده اسـت MTL اسـت. اضافه کردن آن به UL نوآوری این مقاله است. اصلی که ما برای جبران ضعیف شدن منطـق پایه اضافه کردیم اصل (iΔ) است که در واقع قضیه‌ای از MTL می‌باشد. مـابقی اصـول قـبلاً معرفی شده‌اند.

همانطور که در مقدمه نیز اشاره شد اولین بار GΔ به همراه اثبـات تمامیـت اسـتاندارد آن در (Baaz, 1996) معرفی شده است. تمامیت استاندارد آن بـرای MTLΔ نیـز در (Montagna,

2012) اثبات شده است. در هر دو سیستم $\Delta\varphi\rightarrow\Delta\Delta\varphi$:(4) به عنوان اصل موضوع قرار داده شده است. در حالی که یک اصل موضوع مستقل نیست. ما برای اولین بار عدم استقلال آن را نشان خواهیم داد.

اصل (V) در نیمه‌خطی بودن $UL\Delta$ و تابع ارزشی بودن Δ نقش کلیدی بازی می‌کند. یک منطق نیمه‌خطی است اگر و تنها اگر نسبت به یک زنجیر (chain) به طور قوی صحیح و تمام باشد. این اصل در منطق موجهات K معادل اصل $\nabla p\rightarrow\Delta p$:(Dc) است. که البته در $UL\Delta$ اثبات‌ناپذیر است. به علاوه اگر اصول (T) و (V) به CL افزوده شوند منطق موجهات بی‌وجه Triv پدید می‌آید. در حالی که در منطق‌های چندارزشی و فازی این شکست وجهی اتفاقی نمی‌افتد.

در واقع قضیه‌ای از $UL\Delta$ که نقش اساسی در نیمه‌خطی بودن آن ایفا می‌کند فرمول $(p\rightarrow q)\vee\Delta(q\rightarrow p)$:(PRLΔ) است این قضیه به سادگی به ترتیب با اعمال (RN)، (V) و (T) روی $\vdash_{UL}(p\rightarrow q)\vee(q\rightarrow p)$ ثابت می‌شود.

حالا به روند اثبات مهم‌ترین فرمول یعنی اصل (4) در $UL\Delta$ توجه کنید:

1.	$\Delta p\vee\neg\Delta p$	(EM_{Δ})
2.	$\Delta(\Delta p\vee\neg\Delta p)$	1, (RN)
3.	$(\Delta p\vee\neg\Delta p)\supset(\Delta\Delta p\vee\Delta\neg\Delta p)$	(V)
4.	$\Delta\Delta p\vee\Delta\neg\Delta p$	2,3, (MP)
5.	$\Delta\neg\Delta p\rightarrow\neg\Delta p$	(T)
6.	$\Delta p\rightarrow t$	(i_{Δ})
	$A=\Delta\Delta p,\ B=\Delta\neg\Delta p,\ C=\Delta p$	
7.	$(A\vee B)\rightarrow\{(B\rightarrow\neg C)\rightarrow[(C\rightarrow t)\rightarrow(C\rightarrow A)]\}$	$\vdash_{UL}$
8.	$\Delta p\rightarrow\Delta\Delta p$	4,5,6,7, (MP)[3]

بعد از اصل (4) مهم‌ترین فرمولی که در $UL\Delta$ قضیه است اصل :(C) $(\Delta\varphi\wedge\Delta\psi)\rightarrow\Delta(\varphi\wedge\psi)$ است:

1. $[p\rightarrow(p\wedge q)]\vee[q\rightarrow(p\wedge q)]$ $\quad\vdash_{UL}$
2. $\Delta\{[p\rightarrow(p\wedge q)]\vee[q\rightarrow(p\wedge q)]\}$ $\quad$ 1, (RN)
3. $\Delta\{[p\rightarrow(p\wedge q)]\vee[q\rightarrow(p\wedge q)]\}\rightarrow\{\Delta[p\rightarrow(p\wedge q)]\vee\Delta[q\rightarrow(p\wedge q)]\}$ $\quad$ (V)

4. $\Delta[p\to(p\wedge q)]\to[\Delta p\to\Delta(p\wedge q)]$ (K)

5. $\Delta[q\to(p\wedge q)]\to[\Delta q\to\Delta(p\wedge q)]$ (K)

6. $A=\Delta p,\ B=\Delta q,\ C=\Delta(p\wedge q),\ D=\Delta[p\to(p\wedge q)],\ E=\Delta[q\to(p\wedge q)]$

7. $(D\vee E)\to\{(D\to(A\to C))\to[(E\to(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)]\}$ $\vdash_{UL}$

8. $(\Delta p\wedge\Delta q)\to\Delta(p\wedge q)$ 2,3,4,5, (MP)[4]

توجه کنید که از آنجا که فرمول $p\to[q\to(p\wedge q)]$ در UL قضیه نیست فرمول (C) به شیوه متداول اثبات نمی‌شود.

در UL فرمول $(p\vee\neg p)\to[p\to(p\&p)]$ قضیه است. بنابراین با استفاده از (EM_Δ) به سادگی ثابت می‌شود که فرمول (C_Δ): $\Delta\varphi\to(\Delta\varphi\&\Delta\varphi)$، قضیه‌ای از $UL\Delta$ است.

اصول (5): $\nabla\varphi\to\Delta\nabla\varphi$ و (B): $\varphi\to\Delta\nabla\varphi$ در $UL\Delta$ قضیه نیستند. اما در $MTL\Delta$ قضیه هستند. در واقع اضافه کردن هر کدام ازین ۲ اصل به $UL\Delta$، سیستم $MTL\Delta$ را پدید می‌آورد. دلیل آن هم این است که f در UL تنها یک ثابت است و هیچ محدودیتی برای این ثابت از طریق قواعد معناشناختی یا اصول موضوعه قرار داده نشده. حتی f می‌تواند برابر با 1 باشد. این در حالی است که در MTL ثابت f برابر با 0 است.

از دیگر اصول مشهور در منطق موجهات استاندارد که در $UL\Delta$ قضیه نیستند می‌توان به اصول (.2): $\nabla\Delta\varphi\to\Delta\nabla\varphi$ و (M′): $\Delta\nabla\varphi\to\nabla\Delta\varphi$ اشاره کرد. این در حالی است که اصل (.3): $\Delta(\Delta\varphi\to\psi)\vee\Delta(\Delta\psi\to\varphi)$ در $UL\Delta$ قضیه است.

۲.۴ فراقضیه استنتاج دلتا

فراقضیه استنتاج محلی HUL (قضیه ۱) در $HUL\Delta$ از دست می‌رود. چرا که $p\vdash\Delta p$ اما هیچ عدد طبیعی مثل n وجود ندارد که $\vdash(pt)n\to\Delta p$. در عوض فراقضیه‌ی زیر به نام فراقضیه «استنتاج دلتا» (delta deduction) را خواهیم داشت:

قضیه ۵. در $HUL\Delta$ فراقواعد زیر برقرار هستند:

(برهان خلف)	$\Gamma\vdash\varphi \Leftrightarrow \Gamma\cup\{\neg\varphi\}\vdash\bot$	2)	(استنتاج)	$\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi \Leftrightarrow \Gamma\vdash\varphi\supset\psi$	1)

برهان. اثبات (۱) مشابه با اثبات آن برای $HBL\Delta$ در قضیه 2.4.14 (Hájek, 1998) است.

ابتدا اثبات از راست به چپ که طبق معمول ساده است. فرض کنید که $\Gamma\vdash\varphi\supset\psi$. حالا فرمول‌های زیر را با $\Gamma\cup\{\varphi\}$ ثابت می‌کنیم: $\varphi\supset\psi$، $\Delta\varphi$ (RN)، ψ (MP).

و برای اثبات چپ به راست از استقراء قوی روی طول برهان استدلال مقدمه استفاده می‌کنیم.

قدم پایه: برای برهان یک سطری یا i) $\psi\in\Gamma$ یا ψ یک اصل موضوع است.یا ii) $\psi=\varphi$.

1. ψ, $\varphi\supset t$ (i_Δ), $\varphi\supset\psi$ $(\vdash_{\mathbf{HUL}}(p\to t)\to[q\to(p\to q)])$

2. $\varphi\supset\psi$ (T)

قدم استقراء: فرض می‌کنیم که حکم برای هر برهان مقدمه با کمتر از n سطر برقرار باشد. (ih) باید ثابت کنیم که برای n+1 سطر نیز برقرار است. بنابراین برهان استدلال مقدمه رشته‌ای مانند $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n+1}=\psi$ است. برای φ_{n+1}، ۳ حالت پیش می‌آید:

۱. φ_{n+1} با قاعده (MP) بدست آمده است. پس یک $i\leq n$ وجود دارد به طوری که $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\varphi_i\to\varphi_{n+1}$ و $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\varphi_i$. پس طبق (ih) داریم: $\Gamma\vdash\varphi\supset(\varphi_i\to\varphi_{n+1})$ و $\Gamma\vdash\varphi\supset\varphi_i$. حالا با Γ ثابت می‌کنیم:

$$\varphi\supset\psi \quad \varphi\supset(\Delta\varphi\&\Delta\varphi)\ (C_\Delta), \quad (\Delta\varphi\&\Delta\varphi)\to\psi, \quad \varphi\supset\varphi_i, \quad \varphi\supset(\varphi_i\to\psi),$$

۲. $\varphi n+1$ با قاعده (RN) بدست آمده است. پس یک $i\leq n$ وجود دارد که $\varphi n+1=\Delta\varphi i$ و $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\varphi i$. پس طبق (ih) داریم: $\Gamma\vdash\varphi\supset\varphi i$. پس با استفاده از (RN)، (K) و (4): $\Gamma\vdash\varphi\supset\psi$.

اثبات سمت راست به چپ (۲) به سادگی با (RN) بدست می‌آید. برای سمت چپ به راست فرض کنید که $\Gamma\cup\{\varphi\supset\bot\}\vdash\bot$. پس با (۱): $\Gamma\vdash(\varphi\supset\bot)\supset\bot$. با (EM_Δ)، (RN) و (V): $\vdash\Delta\Delta\varphi\vee\Delta\neg\Delta\varphi$. پس با (T): $\Gamma\vdash\varphi$

توجه کنید که از آنجا که $\Delta p\to\Delta q\dashv\vdash\Delta p\to q$؛ فراقضیه استنتاج دلتا معادل فراقاعده (فراقضیه هایک) زیر است:

$$\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi \Leftrightarrow \Gamma\vdash\Delta\varphi\to\Delta\psi$$

۳.۴ تعریف‌پذیری منطق کلاسیک

همانطور که در مقدمه گفته شد CL در $UL\Delta$ تعریف‌پذیر است و بنابراین $UL\Delta$ یک منطق نیمه‌کلاسیک مانند منطق زمان و نه یک منطق غیرکلاسیک مانند منطق شهودی است. چرا که تمام استدلال‌های اثبات‌پذیر منطق کلاسیک در آن اثبات‌پذیر است. در این قسمت می‌خواهیم به اثبات این مطلب مهم بپردازیم. در ادامه ثابت می‌کنیم که ادات‌های $\supset$، $\wedge$، $\vee$، $-$ و $\bot$ به ترتیب شرط، عطف، فصل، نقض و تناقض در منطق کلاسیک هستند.

تعریف ۲۱. مجموعه فرمول‌های منطق کلاسیک که آن را با FmCL نشـان مـی‌دهـیم بـه صورت متعارف از روی Var و زبان $\{\wedge,\vee,\supset,-,\bot\}$ ساخته می‌شود. δ را یک تابع از Fm_{CL} بـه Fm_{Δ} با ضابطه‌ی زیر بگیرید:

$$\forall\varphi\in Var: \delta(p)=p,\quad \forall n\in\{0,1,2\},\{\wedge,\vee,\supset,-,\bot\}: \forall\star\in\delta(\varphi_1\star\varphi_n)=\delta(\varphi_1)\star\delta(\varphi_n)$$

توجه کنید که اساسی‌ترین تفاوت این ترجمه با ترجمـه‌ی گـودل از منطـق شـهودی بـه منطق موجهات این است که متغیرها بدون تغییر باقی می‌مانند. و این مسئله است که شـرایط تعریف‌پذیری ادات‌های کلاسیک را مهیا می‌کند.

قضیه ٦.

$$\Gamma\vdash_{CL}\varphi \Leftrightarrow \{\delta(\psi)|\psi\in\Gamma\}\vdash_{HUL\Delta}\delta(\varphi)$$

برهان. به عنوان نمونه HCL را سیسـتم اصـل موضـوعی منطـق کلاسـیک در (اردشـیر, ۱۳۹۱, p. ٤۱) بگیرید. با استفاده از قضیه ۵ بـه سـادگی دسـتگاه اسـتنتاجی HCL در HULΔ ثابت می‌شود. پس سمت چپ–به–راست برقرار است. سمت راست–به–چـپ را بـا برهـان خلف ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید کـه $\delta[\Gamma]\vdash_{HUL\Delta}\delta(\varphi)$ امـا $\Gamma\nvdash_{CL}\varphi$. ایـن یـک تنـاقض است. چرا که با توجه به سمت چپ–به–راست ترجمه‌ی هر استدلال اثبـات‌پـذیر در CL در HULΔ نیز اثبات‌پذیر است. از طرفی می‌دانیم که اضافه کردن هر اسـتدلال جدیـد بـه CL در همان زبان آن را ناسازگار می‌کند. همچنین بنابه فراقضیه صحت بـرای HULΔ کـه در قضـیه ۸ ثابت خواهیم کرد HUL سازگار است. پس اگر ترجمه‌ی یک استدلال اثبات‌ناپـذیر در CL در HUL اثبات‌پذیر باشد سیستم ناسازگار خواهد بود.

ادات‌های منطق کلاسیک با ترجمه‌های دیگری نیـز در ULΔ قابـل بیـان هسـتند کـه در بخش معناشناسی به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. احتمالاً در بین این ترجمـه‌هـا، ترجمـه‌ی آورده شده ساده‌ترین باشد.

۴.۴ سیستم حساب ابررشته‌های GUL

جدول ۲. قواعد استنتاج GULΔ

$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi}(\Delta)$	$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma,\varphi\Rightarrow\psi}{\mathcal{G}\mid\Gamma,\Delta\varphi\Rightarrow\psi}(\Delta\Rightarrow)$	$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Gamma\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Gamma,\Delta\Pi\Rightarrow\varphi}(WL)_{\Delta}$	$\dfrac{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma_1,\Pi\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma_1,\Gamma_2\Rightarrow\Sigma\mid\Pi\Rightarrow\varphi}(S)_{\Delta}$

تعریف ۲۲. دستگاه استنتاجی GULΔ همان دستگاه استنتاجی GUL است به علاوه قواعد جدول ۲.

GUL+(Δ) معادل با سیستم اصل موضوعی زیر است:

$$\mathbf{HULK}^{\ell} =_{df} \mathbf{HUL}+(RN)+(K)+(C)+(PRL_{\Delta})$$

این سیستم ضعیف‌ترین سیستم منطق موجهات نیمه‌خطی نرمال بر پایه منطق UL است. $HULK^{\ell}$ همچنین دارای تمامیت استاندارد قوی است. توجه کنید که ضعیف‌ترین منطق موجهات نیمه‌خطی بر پایه منطق کلاسیک منطق $Tc =_{df} CL+(Tc): \varphi\rightarrow\Box\varphi$ است. همچنین با گسترش UL به CL، سیستم Tc پدید می‌آید.[۲] همچنین قابل ذکر است که اصل (۷) در $HULK^{\ell}$ قضیه است.

در سیستم $\mathbf{ULK}^{\boldsymbol{\ell}}$ قواعد (Δ⇒)، $(S)_{\Delta}$، $(WL)_{\Delta}$ به ترتیب معادل اصول (T)، (EM_{Δ}) و (i_{Δ}) هستند. همچنین قاعده فرعی $(\Rightarrow\Delta): \mathcal{G}|\Delta\Gamma\Rightarrow\varphi \vdash \mathcal{G}|\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi$ معادل با اصل (4) است. به عنوان نمونه به چگونگی اثبات این قاعده فرعی به **جدول ۳** توجه کنید.

جدول ۳. اثبات قاعده (Δ⇒) در GULΔ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\varphi}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\bot\mid\Rightarrow\varphi}\,(S)_{\Delta}}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\bot\mid\Rightarrow\Delta\varphi}\,(\Delta)}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\bot\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi}\,(WL)_{\Delta} \qquad \dfrac{}{\mathcal{G}\mid\bot\Rightarrow\Delta\varphi\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi}\,(\bot\Rightarrow)}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi}\,(Cut)}{\mathcal{G}\mid\Delta\Gamma\Rightarrow\Delta\varphi}\,(EC)$$

اثبات معادل بودن دو سیستم HULΔ و GULΔ به روش متداول و با ترجمه (تعبیر) استاندارد ابررشته‌ها انجام می‌شود. اما از آنجا که ما صرفاً سیستم گنتزن را برای راحتی در اثبات قضیه‌ها آورده‌ایم و مسئله محوری ما نیست از اثبات آن در این مقاله صرف نظر کردیم.

۵. معناشناسی منطق تک‌نرم با ادات صدق

۱.۵ معناشناسی استاندارد ULΔ

تعریف ۲۳. معناشناسی استاندارد (گویا) **ULΔ** همان معناشناسی استاندارد (گویا) **UL** است. تنها با این تفاوت که Δ به این صورت تعبیر می‌شود:

$$V_{\mathfrak{M}}(\Delta\varphi)=\begin{cases} t, & V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\geq t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

در منطق‌های t–نرم، «صدق» (صدق کلاسیک) فقط به ارزش 1، «کذب» (کذب کلاسیک) (صادق نبودن) به ارزش اکیداً کوچکتر از 1 و «کاملاً کاذب» به ارزش 0 اطلاق می‌شود. به عبارتی تابع ارزش صدق δ به صورت زیر است:

- اگر صادق باشد که p آن‌گاه گزاره‌ی «صادق است که p» صادق است.
- اگر صادق نباشد که p آن‌گاه گزاره‌ی «صادق است که p» کاملاً کاذب است.

یعنی به عبارت صوری Δ در منطق‌های t–نرم با تابع $\delta(x)=\begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x\neq 1 \end{cases}$ تعبیر می‌شود.

اما در منطق‌های تک‌نرم مسئله کمی بیشتر مناقشه برانگیز است. یانگ در مقاله‌ی (Yang, 2012) ۱۰ تابع صدق (از جمله تابع صدق ما) برای UL معرفی می‌کند. اینکه چرا ما این تابع صدق را به دیگر توابع صدق ترجیح داده‌ایم به دلایل زیر است:

۱. با قرار دادن t=1 و f=0 (یعنی ارتقاء به MTL) تابع صدق t–نرم پدید می‌آید.
۲. منطق کلاسیک در ULΔ تعریف‌پذیر می‌شود.
۳. تمام اصول موضوعه‌ی Δ در HMTLΔ ارضاء (satisfy) می‌شوند.
٤. صدق (صدق کلاسیک) در UL بزرگترمساوی t بودن است.

۲.۵ معناشناسی جبری ULΔ

تعریف ۲۴. یک ULΔ–جبر یک جبر مثل $\mathcal{U}^{\Delta}=_{df}\mathcal{U}\cup\langle\Delta\rangle$ است. به طوری که $\mathcal{U}$ یک UL–جبر و Δ یک اپراتور یک موضعی با شرایط زیر است:

(Δ1):	$\Delta(x\rightarrow y)\leq\Delta x\rightarrow\Delta y$	(Δ4):	$\Delta x\leq x$
(Δ2):	$\Delta(x\vee y)=\Delta x\vee\Delta y$	(Δ5):	$t\leq\Delta x\vee(\Delta x\rightarrow\bot)$
(Δ3):	$t\leq\Delta t$	(Δ6):	$\Delta x\leq t$

قضیه ۷. $\mathcal{U}^{\Delta}$ یک ULΔ–زنجیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{U}$ یـک UL–زنجیـر و Δ تـابع زیـر باشد:

$$\Delta x=\begin{cases} t, & x\geq t \\ \bot, & \text{otherwise} \end{cases}$$

برهان. برای اثبات چپ به راست باید ثابت شود که Δ دارای ویژگی‌هـای (Δ1) تـا (Δ6) است. چک کردن این ویژگی‌ها ساده است. برای نمونه برقرار بـودن ویژگـی (Δ1) را نشـان می‌دهیم. چهار حالت پیش می‌آید به این صورت:

x	y	Δx	Δy	Δx→Δy	Δ(x→y)	
≥t	≥t	t	T	t	t or ⊥	
≥t	<t	t	⊥	⊥	⊥	y<x
<t	≥t	⊥	T	T	t or ⊥	
<t	<t	⊥	⊥	T	t or ⊥	

برای اثبات راست به چپ نیز برهان زیر را ارائه می‌دهیم:

1.	$t\leq x$		1.	$x<t$	
	$\therefore \Delta x=t$			$\therefore \Delta x=\bot$	
2.	$\Delta x\leq t$	(Δ6)	2.	$t\leq\Delta x\vee(\Delta x\rightarrow\bot)$	(Δ5)
3.	$t\vee x=x$	1, UL-algebra	3.	$t\leq\Delta x$ or $\Delta x=\bot$	2, UL-chain
4.	$\Delta(t\vee x)=\Delta x$	3, algebra	4.	$\Delta x\leq x$	(Δ4)
5.	$\Delta(t\vee x)=\Delta t\vee\Delta x$	(Δ2)	5.	$t\leq x$ or $\Delta x=\bot$	3,4, UL-algebra
6.	$\Delta t\leq\Delta x$	4,5, UL-algebra	6.	$\Delta x=\bot$	1,5, UL-algebra
7.	$t\leq\Delta t$	(Δ3)			
8.	$\Delta x=\Delta t$	2,6,7, UL-algebra			

در نتیجه جبرهای زیر به ترتیب ULΔ–جبر گویا و ULΔ–جبر استاندارد هستند:

$$\mathcal{U}^{\Delta}_{\text{DEN}}=_{\text{df}}\langle[0,1]_{\mathbb{Q}},\min,\max,\&,\rightarrow,\Delta,t,f,0\rangle$$

$$\mathcal{U}^{\Delta}_{[0,1]}=_{\text{df}}\langle[0,1],\min,\max,\&,\rightarrow,\Delta,t,f,0\rangle$$

تعریف ۲۵. معناشناسی جبری ULΔ همان معناشناسـی جبـری UL اسـت. تنهـا بـا ایـن تفاوت که ULΔ–جبر جایگزین UL–جبر می‌شود و $V_{\mathfrak{M}}(\Delta\varphi)=\Delta V_{\mathfrak{M}}(\varphi)$.

۳.۵ فراقضیه صحت قوی

قضیه ۸ در HULΔ:

$$\Gamma\vdash\varphi \Rightarrow \Gamma\vDash^{\text{GEN}}\varphi$$

برهان. اثبات به روش متداول یعنی با استقرای ریاضی قوی روی طول برهان انجام می‌شود. بنابراین تنها کافی است که اعتبار اصول موضوعه و صدق نگه‌داری قواعد نشان داده شود. طبق ترکیب قضیه ۲ و قضیه ٤ اصول موضوعه UL معتبر و قواعدش صدق نگه‌دارند. پس کافی است که بخش موجهاتی $UL\Delta$ بررسی شود.

اعتبار اصول (K)، (V)، (T)، (EM_Δ) و (i_Δ) به سادگی به ترتیب مستقیماً از روی شرط‌های $(\Delta1)$، $(\Delta2)$، $(\Delta4)$، $(\Delta5)$ و $(\Delta6)$ بدست می‌آیند. برای صدق نگه‌داری (RN) نیز باید نشان داده شود که اگر $t\leq x$ آنگاه $t\leq\Delta x$. برای این منظور فرض کنید $t\leq x$. طبق ویژگی‌های UL–جبر داریم $x\vee t=x$. به دلیل تابع بودن Δ داریم $\Delta(x\vee t)=\Delta x$. و با ویژگی $(\Delta2)$ داریم $\Delta x\vee\Delta t=\Delta x$. حالا طبق ویژگی‌های UL–جبر $\Delta t\leq\Delta x$. و در نهایت بنا به ویژگی‌های UL–جبر و شرط $(\Delta3)$ خواهیم داشت $t\leq\Delta x$.

۴.۵ تعبیر ادات‌های منطق کلاسیک

تعریف ۲۶ (تابع ارزشدهی منطق کلاسیک). فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $UL\Delta$–مدل خطی باشد. در این صورت یک CL–ارزشدهی استاندارد برای $\mathfrak{M}$ یک تابع مثل $e_{\mathfrak{M}}$ از Fm_Δ به $\{T,F\}$ است به طوری که:

$$e_{\mathfrak{M}}(\varphi)=\begin{cases}T, & V_{\mathfrak{M}}(\varphi)\geq t\\ F, & \text{otherwise}\end{cases}$$

با ترجمه‌ای که گفته شد به عنوان مثال فرمول $\delta(p)\rightarrow\delta(q\rightarrow q) = p\rightarrow(q\supset q)$ در $UL\Delta$ قضیه نیست. می‌توان ترجمه‌ی دیگری ارائه داد که استلزام‌های درجه اول منطق کلاسیک را حفظ کند. به این معنا که اگر $\vdash_{CL}\varphi\supset\psi$ آنگاه $\vdash_{UL\Delta}T(\varphi)\rightarrow T(\psi)$. ازین جهت می‌توان گفت ترجمه‌های دقیق‌تری نیز می‌توان ارائه داد.

تعریف ۲۷. تعاریف زیر را به $Fm\Delta$ اضافه می‌کنیم:

$$\varphi\wedge_2\psi =_{df} \Delta\varphi\wedge\Delta\psi \qquad \varphi\rightarrow_2\psi =_{df} \Delta(\Delta\varphi\rightarrow\Delta\psi) \qquad \varphi\equiv\psi =_{df} (\varphi\supset\psi)\wedge(\psi\supset\varphi)$$

$$\varphi\vee_2\psi =_{df} \Delta\varphi\vee\Delta\psi \qquad \sim_2\varphi =_{df} \Delta(\Delta\varphi\rightarrow\bot) \qquad \varphi\leftrightarrow_2\psi =_{df} (\varphi\rightarrow_2\psi)\wedge_2(\psi\rightarrow_2\varphi)$$

در جدول زیر تفاوت این دو تعریف کاملاً آشکار است:

جدول ۴. جدول ارزش ادات‌های منطق کلاسیک در ULΔ

x	y	Δx	Δy	x∧y	x∧₂y	x∨y	x∨₂y	x⊃y	x→₂y	−x	~₂x	x≡y	x↔₂y
T	T	t	t	T	t	T	t	y	T	0	0	T	t
T	F	t	0	y	0	x	t	y	0	0	0	y	0
F	T	0	t	x	0	y	t	1	T	1	t	x	0
F	F	0	0	F	0	F	0	1	T	1	t	1	T

٦. فراقضیه تمامیت قوی استاندارد

۱.۶ تحویل به منطق گزاره‌ها

تعریف ۲۸. Fm^* را مجموعه فرمول‌های تولید شده توسط $\mathcal{L}$ و $Var^*=_{df}\{\varphi_\Delta|\varphi\in Fm_\Delta\}$ بگیرید. * یک تابع از Fm_Δ به Fm^* با ضابطه‌ی زیر است:

$$\forall\varphi\in Var:\quad \varphi^*=\varphi \qquad \forall\varphi\in Fm_\Delta:\quad (\Delta\varphi)^*=\varphi_\Delta$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\star_n\in\mathcal{L}_\Delta,\forall\varphi_n\in Fm_\Delta:\quad (\star_n(\varphi_1,\cdots,\varphi_n))^* = \star_n(\varphi_1{}^*,\cdots,\varphi_n{}^*)$$

مثال: $(\Delta(p\wedge t)\rightarrow(\Delta p\rightarrow t))^*= (p\wedge t)_\Delta\rightarrow(p_\Delta\rightarrow t)$

لم ۱. قرار دهید $Th=_{df}\{\psi|\vdash_{UL\Delta}\psi\}$. $\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{UL}\varphi^* \Longrightarrow \Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi$

برهان. فرض می‌کنیم که $\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{UL}\varphi^*$. با استقرای قوی روی طول برهان ثابت می‌کنیم که $\Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi$.

قدم پایه: برای برهان ۱ سطری یا ۱) $\varphi\in\Gamma$ یا ۲) $\varphi\in Th$ و یا ۳) φ یکی از اصول موضوعه‌ی **UL** است. در هر سه حالت طبق تعریف به وضوح مطلوب حاصل است.

قدم استقراء: فرض کنید که برای برهان با n سطر حکم برقرار باشد. باید ثابت کنیم که برای n+1 سطر نیز برقرار است. فرض کنید $\varphi_1{}^*,\cdots,\varphi_{n+1}{}^*$ یک برهان برای استدلال مقدمه باشد. پس برای $\varphi_{n+1}{}^*$ دو حالت پیش می‌آید:

۱. با استفاده از (MP) بدست آمده است. پس یک $i\leq n$ وجود دارد که $\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{UL}\varphi_i{}^*$ و $\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{UL}\varphi_i{}^*\rightarrow\varphi_{n+1}{}^*$. حالا طبق فرض استقراء $\Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi_i$ و $\Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi_i\rightarrow\varphi_{n+1}$. بنابراین طبق (MP) مطلوب حاصل است.

۲. با استفاده از (Ad_u) بدست آمده است. پس یک $i\leq n$ وجود دارند که $\varphi_{n+1}=\varphi_i{}^*\wedge t$ و $\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{UL}\varphi_i{}^*$. پس طبق فرض استقراء $\Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi_i$. بنابراین طبق ($Ad_u$) مطلوب حاصل است.

۲.۶ مجموعه سازگار پر

نیمه‌کلاسیک بودن $UL\Delta$ به ما این قابلیت را می‌دهد تا مانند اثبات تمامیت در منطق‌های موجهات استاندارد به روش هنکین از مفهوم سازگار پر استفاده کنیم. این ابزار سودمند روند اثبات تمامیت استاندارد $UL\Delta$ را ساده‌تر می‌کند.

تعریف ۲۹. می‌گوییم $\Gamma\subseteq Fm$، سازگار پر است اگر و تنها اگر دارای دو ویژگی زیر باشد:

a. $\Gamma\nvdash_{UL\Delta}\perp$ (سازگار)

b. $\forall\varphi\in Fm_\Delta$: $\varphi\in\Gamma$ or $-\varphi\in\Gamma$ (پر)

لم ۲. هر مجموعه سازگار پر Γ، یک $UL\Delta$–نظریه است یعنی:

$$\forall\varphi\in Fm_\Delta:\quad \Gamma\vdash_{UL\Delta}\varphi \Longrightarrow \varphi\in\Gamma$$

برهان. ۱) فرض کنید $\Gamma\vdash\varphi$ و ۲) $\varphi\notin\Gamma$ با پر بودن: $-\varphi\in\Gamma$ ۳) با (RN): $\Gamma\vdash\Delta\varphi$ ٤) $\Gamma\vdash\perp$ ۵) تناقض با سازگاری

لم ۳. برای هر مجموعه‌ی سازگار T، یک مجموعه‌ی سازگار پر مثل Γ وجود دارد به طوری که $T\subseteq\Gamma$.

برهان. فرض کنید φ_0، φ_1، $\cdots$ فهرستی از همه‌ی فرمول‌های $UL\Delta$ که به فرم $\Delta\varphi$ نیستند، باشد. دنباله‌ی $\Gamma_0=T$، Γ_1، $\cdots$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_{n+1}=\begin{cases}\Gamma_n\cup\{\Delta^m\varphi_n \mid m\geq 0\}, & \Gamma_n\cup\{\varphi_n\}\nvdash_{HUL\Delta}\perp\\ \Gamma_n\cup\{\Delta^m-\varphi_n \mid m\geq 0\}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

به طوری که $\Delta^0\varphi=_{df}\varphi$ و $\Delta^{m+1}\varphi=_{df}\Delta\Delta^m\varphi$. حالا تعریف می‌کنیم که: $\Gamma=\bigcup\{\Gamma_n \mid n\geq 0\}$.

واضح است که $\Gamma_n\subseteq\Gamma_{n+1}$. با استفاده از **قضیه ۵** و (RN) خواهیم داشت که:

1. $\forall\Sigma\subseteq Fm_\Delta$: $\quad\Sigma\cup\{\varphi\}\nvdash_{UL\Delta}\perp \Rightarrow \Sigma\cup\{\varphi,\Delta\varphi\}\nvdash_{UL\Delta}\perp$
2. $\forall\Sigma\subseteq Fm_\Delta$: $\quad\Sigma\nvdash_{UL\Delta}\perp, \Sigma\cup\{\varphi\}\vdash_{UL\Delta}\perp \Rightarrow \Sigma\cup\{-\varphi\}\nvdash_{UL\Delta}\perp$

پس با استقراء به راحتی ثابت می‌شود که برای هر n، Γ_n سازگار است. بنابراین Γ سازگار است. چرا که در غیر این صورت یک زیرمجموعه‌ی متناهی مثل Σ از Γ وجود دارد به طوری که $\Sigma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\bot$. پس عددی طبیعی مثل n وجود دارد که $\Sigma\subseteq\Gamma_n$ و $\Gamma_n\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\bot$. که خلاف سازگاری است.

Γ پر نیز هست. فرض کنید که $\varphi\notin\Gamma$. پس $n,m\in\mathbb{N}$ وجود دارند به طوری که $\varphi=\Delta^m\varphi_n$ و $\Gamma_n\cup\{\varphi_n\}\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\bot$. پس $\Delta^m-\varphi_n\in\Gamma$. از طرفی با استقراء، (RN)، (K) و (T) ثابت می‌شود که $\Delta^m-\psi\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\neg\Delta^{m+1}\psi$. پس $\Gamma\vdash_{\mathbf{HUL\Delta}}-\varphi$. همچنین با استفاده از سازگاری، **قضیه ۵**، (RN) و (T) به سادگی ثابت می‌شود Γ یک **ULΔ**–نظریه است. بنابراین $-\varphi\in\Gamma$.

۳.۶ تمامیت گویا

تعریف ۳۰. جبر $LN_\Gamma=_{df}\langle UL_\Gamma,\wedge_\Gamma,\vee_\Gamma,\&_\Gamma,\rightarrow_\Gamma,t_\Gamma,f_\Gamma,\bot_\Gamma\rangle$ یک جبر لیندن‌باوم از Γ برای UL است به طوری که:

1. $[\varphi]_\Gamma =_{df} \{\psi|\Gamma\vdash_{\mathbf{UL}}\varphi\leftrightarrow\psi\}$,
2. $\forall c\in\{t,f,\bot\}: c_\Gamma = [c]_\Gamma$
3. $UL_\Gamma =_{df} \{[\varphi]_\Gamma|\varphi\in Fm\}$
4. $\forall\star\in\{\wedge,\vee,\&,\rightarrow\}: [\varphi]_\Gamma\star_\Gamma[\psi]_\Gamma = [\varphi\star\psi]_\Gamma$

لم ٤. برای هر $\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}\subseteq Fm$:

1. $[\varphi]_\Gamma\leq[\psi]_\Gamma \Leftrightarrow \Gamma\vdash_{\mathbf{UL}}\varphi\rightarrow\psi$

۲. LN_Γ یک UL–جبر است.

۳. برای $I:Var\rightarrow UL_\Gamma$ با ضابطه‌ی $I(\varphi)=[\varphi]_\Gamma$ و مدل $\mathfrak{M}=\langle LN_\Gamma,I\rangle$: $V_{\mathfrak{M}}(\varphi)=[\varphi]_\Gamma$

برهان. رجوع کنید به لم ۳.٤۹ و لم ۳.۵۰ در (Metcalfe et al., 2009).

تعریف ۳۱. می‌گوییم $\Gamma\subseteq Fm$، چگال است اگر و تنها اگر برای هر $\varphi,\psi\in Fm$: اگر $\Gamma\nvdash_{\mathbf{UL}}\varphi\rightarrow\psi$، آنگاه یک $\chi\in Fm$ وجود داشته باشد، به طوری که $\Gamma\nvdash_{\mathbf{UL}}\varphi\rightarrow\chi$ و $\Gamma\nvdash_{\mathbf{UL}}\chi\rightarrow\psi$.

لم ۵. برای هر $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq Fm$: اگر $\Gamma\nvdash UL\varphi$، آنگاه یک Σ چگال وجود دارد که $\Gamma\subseteq\Sigma$ و $\Sigma\nvdash UL\varphi$.

برهان. رجوع کنید به لم ۳.٦۳ و قضیه ۵.۳۵ در (Metcalfe et al., 2009).

تعریف ۳۲. جبر $\Delta LN_{\Gamma^*}=_{df}LN_{\Gamma^*}\cup\langle\Delta_{\Gamma^*}\rangle$ یک جبر Δ–لیندن‌باوم از Γ^* برای UL است اگر و تنها اگر Δ_{Γ^*} یک تابع یک موضعی با ضابطه‌ی $\Delta_{\Gamma^*}[\varphi^*]_{\Gamma^*}=[\varphi_\Delta]_{\Gamma^*}$ باشد.

لم ۶ (لم جبر گویا). برای هر مجموعه سازگار پر Γ، یک ΔLN_{Γ^*} وجود دارد که $UL\Delta$–زنجیر چگال است.

برهان. Δ_{Γ^*} را رابطه‌ی $\{\langle[\varphi^*]_{\Gamma^*},[\varphi_\Delta]_{\Gamma^*}\rangle \mid \varphi\in Fm_\Delta\}$ بگیرید. با استفاده از **لم ۱** و **لم ۲** ثابت می‌شود که:

$$\forall\psi,\chi\in Fm_\Delta: \qquad \Gamma^*\vdash_{\mathbf{HUL}}\psi^*\leftrightarrow\chi^* \;\Rightarrow\; \Gamma^*\vdash_{\mathbf{HUL}}\psi_\Delta\leftrightarrow\chi_\Delta$$

پس به راحتی می‌توان دید که Δ_{Γ^*} یک تابع است. پس یک ΔLN_{Γ^*} وجود دارد. بنابه **لم ۴**، LN_{Γ^*} یک UL–جبر است.

اثبات خطی بودن: ۱) فرض کنید که $[\varphi^*]_{\Gamma^*}\not\leq[\psi^*]_{\Gamma^*}$. ۲) با **لم ۴**: $\Gamma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\varphi^*\rightarrow\psi^*$. ۳) $\varphi\rightarrow\psi\notin\Gamma$. ٤) با پر بودن Γ: $-(\varphi\rightarrow\psi)\in\Gamma$. ۵) $\Gamma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}-(\varphi\rightarrow\psi)$. ٦) با (PRL_Δ): $\Gamma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\psi\rightarrow\varphi$. ۷) با **لم ۲**: $\psi\rightarrow\varphi\in\Gamma$. ۸) $\Gamma^*\vdash_{\mathbf{UL}}\psi\rightarrow\varphi$. و در آخر ۹) با **لم ۴**: $[\psi^*]_{\Gamma^*}\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*}$.

اثبات چگال بودن: ۱) فرض کنید که $[\varphi^*]_{\Gamma^*}<[\psi^*]_{\Gamma^*}$. ۲) $[\psi^*]_{\Gamma^*}\not\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*}$ ۳) با **لم ۲**: $\Gamma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\psi^*\rightarrow\varphi^*$. ٤) با **لم ۵**: یک Σ^* چگال وجود دارد که $\Gamma^*\subseteq\Sigma^*$ و $\Sigma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\psi^*\rightarrow\varphi^*$. ۵) یک χ^* وجود دارد که: $\Sigma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\psi^*\rightarrow\chi^*$ و $\Sigma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\chi^*\rightarrow\varphi^*$. ٦) $\Gamma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\psi^*\rightarrow\chi^*$ و $\Gamma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\chi^*\rightarrow\varphi^*$. ۷) با **لم ۲**: $[\psi^*]_{\Gamma^*}\not\leq[\chi^*]_{\Gamma^*}$ و $[\chi^*]_{\Gamma^*}\not\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*}$. و در آخر ۸) با خطی بودن: $[\chi^*]_{\Gamma^*}<[\psi^*]_{\Gamma^*}$ و $[\varphi^*]_{\Gamma^*}<[\chi^*]_{\Gamma^*}$.

حالا با توجه به تعبیر Δ در $UL\Delta$–زنجیر با **قضیه ۷** تنها کافی است، ثابت شود که:

$$\text{a. } t_{\Gamma^*}\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*} \Rightarrow \Delta_{\Gamma^*}[\varphi^*]_{\Gamma^*}=t_{\Gamma^*} \qquad\qquad \text{b. } t_{\Gamma^*}\not\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*} \Rightarrow \Delta_{\Gamma^*}[\varphi^*]_{\Gamma^*}=\bot_{\Gamma^*}$$

اثبات (a): ۱) فرض کنید $[t]_{\Gamma^*}=t_{\Gamma^*}\leq[\varphi^*]_{\Gamma^*}$. ۲) با **لم ۴**: $\Gamma^*\vdash_{\mathbf{UL}}\varphi^*$. ۳) با **لم ۲** و $\Gamma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\psi\in Th$: $\Gamma^*=\Gamma^*\cup Th^*\vdash_{\mathbf{UL}}\varphi^*$. ٤) با **لم ۱**: $\Gamma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\varphi$. با (RN) و (i_Δ): $\Gamma\vdash_{\mathbf{UL\Delta}}\Delta\varphi\leftrightarrow t$. ۵) با لم ۲: $\Delta\varphi\leftrightarrow t\in\Gamma$. ٦) $\Gamma^*\vdash\varphi\Delta\leftrightarrow t$. و در آخر ۷) با لم ٤: $\Delta_{\Gamma^*}[\varphi^*]_{\Gamma^*}=[\varphi_\Delta]_{\Gamma^*}=[t]_{\Gamma^*}=t_{\Gamma^*}$

اثبات (b): ۱) فرض کنید $[t]_{\Gamma^*}=t_{\Gamma^*}\nleq[\varphi^*]_{\Gamma^*}$. ۲) با **لم ۴**: $\Gamma^*\nvdash_{\mathbf{UL}}\varphi^*$. ۳) $\varphi\notin\Gamma$. ٤) با سازگار پر بودن Γ: $-\varphi\in\Gamma$. ۵) $\Gamma^*\vdash_{\mathbf{UL}}\varphi_\Delta\leftrightarrow\bot$. و نهایتاً ٦) با **لم ۴**:

$$\Delta_{\Gamma^*}[\varphi^*]_{\Gamma^*}=[\varphi_\Delta]_{\Gamma^*}=[\bot]_{\Gamma^*}=\bot_{\Gamma^*}$$

لم ۷ (لم صدق). فرض کنید Γ^* یک مجموعه سازگار پر و I یک تابع از Var به UL_{Γ^*} با ضابطه‌ی $I(\varphi)=[\varphi]_{\Gamma^*}$ باشد.

$$\forall\varphi\in Fm_\Delta:\ V_{\mathfrak{M}}(\varphi)=[\varphi^*]_{\Gamma^*};\mathfrak{M}=\langle\Delta LN_{\Gamma^*},I\rangle$$

برهان. در **لم ۶**، همینطور ثابت کردیم که $\mathfrak{M}$ یک $UL\Delta$–مدل است. با توجه به این مطلب با استقراء قوی روی پیچیدگی فرمول φ ثابت می‌کنیم. اما طبق **لم ۴** بخش گزاره‌ای مراحل استقراء ثابت شده است. پس تنها کافی است ثابت شود که $V_{\mathfrak{M}}(\Delta\varphi)=[\varphi_\Delta]_{\Gamma^*}$:

$$V(\Delta\varphi) = \Delta\Gamma^*V\mathfrak{M}(\varphi) =(ih)\ \Delta\Gamma^*[\varphi^*]\Gamma^* = [\varphi\Delta]\Gamma^*$$

لم ۸ (تمامیت گویای قوی). در $UL\Delta$. $\qquad \Gamma\vDash^{DEN}\varphi \Longrightarrow \Gamma\vdash\varphi$

برهان. ۱) فرض کنید $T\nvdash_{\mathbf{UL\Delta}}\varphi$. ۲) با **قضیه ۵**: $T\cup\{-\varphi\}\nvdash_{\mathbf{UL\Delta}}\bot$. ۳) با **لم ۳**: مجموعه سازگار پر Γ وجود دارد به طوری که $T\cup\{-\varphi\}\subseteq\Gamma$. ٤) با **لم ۶**: $\mathfrak{M}=\langle\Delta LN_{\Gamma^*},I\rangle$ که I یک تابع از Var به UL_{Γ^*} است یک $UL\Delta$–مدل گویا است. ۵) با **لم ۷**: $\forall\psi,V_{\mathfrak{M}}(\psi)=[\psi^*]_{\Gamma^*}$. ٦) با $\Gamma^*\vdash_{\mathbf{UL}}\psi^*\in\Gamma^*$ و **لم ۴**: $\mathfrak{M}\vDash\Gamma$. ۷) $\mathfrak{M}\vDash T$ و $\mathfrak{M}\vDash-\Delta\varphi$. ۸) با **قضیه ۷**: $\mathfrak{M}\nvDash\varphi$. ۹) $T\nvDash^{\mathrm{DEN}}_{\mathbf{UL\Delta}}\varphi$.

۴.۶ تمامیت استاندارد

تعریف ۳۳. $\langle P,\leq\rangle$ را یک مجموعه مرتب جزئی بگیرید:

$$Q^u =_{df} \{x\in P|\forall y\in Q: y\leq x\} \qquad Q^l =_{df} \{x\in P|\forall y\in Q: x\leq y\} \qquad DM(P) =_{df} \{Q\subseteq P|Q^{ul}=Q\}$$

تعریف ۳۴ (کامل‌سازی ددکیند مک‌نیل). $\mathcal{A}$ را یک UL–جبر یا یک $UL\Delta$–زنجیر بگیرید. $DM(\mathcal{A})$ یک جبر از نوع یکسان با جهان $DM(A)$ و اپراتورهای اصلی زیر است:

$$c_{DM} =_{df} \{c\}^l;\ c\in\{t,f,\bot\} \qquad X\wedge_{DM}Y =_{df} X\cap Y \qquad X\vee_{DM}Y =_{df} (X\cup Y)^{ul}$$

$$X\&_{DM}Y =_{df} \{x\&y|x\in X,y\in Y\}^{ul} \qquad X\rightarrow_{DM}Y =_{df} \{x\in A|\forall y\in X: x\&y\in Y\}$$

$$\Delta_{DM}X=\begin{cases}\{t\}^l, & \{t\}^l\subseteq X\\ \{\bot\}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

لم ۹. $\mathcal{A}$ را یک UL–جبر بگیرید:

۱. $DM(\mathcal{A})$ یک UL–جبر کامل است.

۲. اگر $\mathcal{A}$ خطی یا چگال باشد، $DM(\mathcal{A})$ نیز هست.

۳. $f(x)=\{x\}^{\downarrow}$ یک نشاندن از $\mathcal{A}$ به $DM(\mathcal{A})$ است.

برهان. رجوع کنید به قضیه ۲.۵۸ در (Metcalfe et al., 2009)

لم ۱۰. $\mathcal{A}$ را یک $UL\Delta$–زنجیر بگیرید:

۱. $DM(\mathcal{A})$ یک $UL\Delta$–جبر است.

۲. $f(x)=\{x\}^{\downarrow}$ یک نشاندن از $\mathcal{A}$ به $DM(\mathcal{A})$ است.

برهان. طبق **لم ۹**، $DM(\mathcal{A})$–$\langle\Delta_{DM}\rangle$ یک UL–جبر است. بنابراین طبق **قضیه ۷** واضح است که $DM(\mathcal{A})$ یک $UL\Delta$–جبر است. حالا برای مورد (۲) طبق **لم ۹**، تنها کافی است ثابت شود که $f(\Delta x)=\Delta_{DM}f(x)$. به آسانی دیده می‌شود که $\{\Delta x\}\subseteq\Delta_{DM}\{x\}^{\downarrow}$. از طرفی داریم: $x\leq y \Longrightarrow \Delta x\leq\Delta y$. پس همچنین $\Delta_{DM}\{x\}^{\downarrow}\subseteq\{\Delta x\}$ است.

قضیه ۹ (نتیجه اصلی مقاله) (تمامیت استاندارد قوی). در $UL\Delta$: $\Gamma\vDash^{[0,1]}\varphi \Longrightarrow \Gamma\vdash\varphi$

برهان. این قضیه به روش استاندارد از **لم ۸** **لم ۹** و **لم ۱۰** بدست می‌آید. رجوع کنید به قضیه ۳.٦۵ در (Metcalfe et al., 2009).

۷. نتیجه‌گیری

ابتدا گزارشی کوتاه از یکی از ضعیف‌ترین سیستم‌های منطق فازی به نام UL که نیمه‌ربطی نیز هست، ارائه دادیم. سپس در بخش پژوهشی و نوآوری مقاله به UL، ادات صدق Δ مشهور به «دلتای باز» (Baaz delta) را اضافه کردیم. این سیستم جدید به نام $UL\Delta$ را با چهار رویکرد اصل موضوعی، حساب ابررشته‌ها، معناشناسی جبری و معناشناسی استاندارد معرفی کردیم. سپس به بررسی آن پرداختیم و مهم‌ترین فراقضیه‌های آن را ثابت کردیم. این فراقضیه‌ها که برای سیستم اصل موضوعی هستند، عبارت‌اند از:

۱. فراقضیه استنتاج دلتا ۲. فراقضیه تمامیت استاندارد قوی

۳. فراقضیه صحت قوی ٤. فراقضیه تعریف‌پذیری منطق کلاسیک

پی‌نوشت‌ها

۱. بین دو مفهوم گسترش (extension) و بسط (expansion) تمـایز وجـود دارد. گسـترش‌هـا، همـان بسط‌ها با زبان یکسان هستند. به عنوان مثال منطق کلاسیک یک گسترش منطق شهودی اما منطـق موجهات یک بسط از منطق کلاسیک است.

۲. به سادگی با معناشناسی جهان ممکنی می‌توانید این مطلب را چک کنید.

کتاب‌نامه

اردشیر، م. (۱۳۹۱). *منطق ریاضی*. تهران: هرمس.

Baaz, M. (1996). Infinite-valued Gödel logics with 0-1-projections and relativizations. In *Gödel'96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics---Kurt Gödel's legacy, Brno, Czech Republic, August 1996, proceedings* (Vol. 6, pp. 23–33). Association for Symbolic Logic.

Cintula, P., Horčík, R., & Noguera, C. (2015). The Quest for the Basic Fuzzy Logic. In F. Montagna (Ed.), *Petr Hájek on Mathematical Fuzzy Logic* (pp. 245–290). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06233-4_12

Esteva, F., & Godo, L. (2001). Monoidal t-norm based logictowards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, *124*(3), 271–288. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00098-7

Gabbay, D., & Metcalfe, G. (2007). Fuzzy logics based on [0, 1)-continuous uninorms. *Archive for Mathematical Logic*, *46*(5–6), 425–449.

Galatos, N., & Ono, H. (2006). Algebraization, Parametrized Local Deduction Theorem and Interpolation for Substructural Logics over FL. *Studia Logica*, *83*(1–3), 279–308. https://doi.org/10.1007/s11225-006-8305-5

Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic* (Vol. 4). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5300-3

Metcalfe, G., & Montagna, F. (2007). Substructural fuzzy logics. *The Journal of Symbolic Logic*, *72*(03), 834–864. https://doi.org/10.2178/jsl/1191333844

Metcalfe, G., Olivetti, N., & Gabbay, D. (2009). *Proof Theory for Fuzzy Logics* (Vol. 36). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9409-5

Montagna, F. (2012). Δ-core Fuzzy Logics with Propositional Quantifiers, Quantifier Elimination and Uniform Craig Interpolation. *Studia Logica*, *100*(1–2), 289–317. https://doi.org/10.1007/s11225-012-9379-x

Wang, S.-M., Wang, B.-S., & Pei, D.-W. (2005). A fuzzy logic for an ordinal sum t-norm. *Fuzzy Sets and Systems*, *149*(2), 297–307. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.01.005

Wang, S. (2007). A fuzzy logic for the revised drastic product t-norm. *Soft Computing*, *11*(6), 585–590. https://doi.org/10.1007/s00500-005-0024-8

Yager, R. R., & Rybalov, A. (1996). Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, *80*(1), 111–120. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114(95)00133-6

Yang, E. (2012). Weakening-free fuzzy logics with the connective Δ. *Soft Computing*, *16*(12), 2089–2095. https://doi.org/10.1007/s00500-012-0879-4