بسترهای مناسب برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی همراه با تحلیل محتوای جبر در کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی ایران بر اساس چارچوب پیشنهادی

■ لیلا خسروشاهی* ■ امیرحسین اصغری**

چکیده:

پژوهش‌هایی که حاکی از توانایی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی در زمینهٔ جبر است، همراه با تحقیقاتی که مشکلات دانش‌آموزان دوره‌های بالاتر تحصیلی را در یادگیری جبر در برنامهٔ درسی سنتی نشان می‌دهند، پدیدآورندهٔ حوزه‌ای نوظهور به نام جبر ابتدایی شده‌اند. نحوهٔ حضور جبر در دورهٔ ابتدایی اصلی‌ترین چالش این حوزه است. مقالهٔ حاضر با استفاده از ادبیات موجود در زمینهٔ جبر مدرسه‌ای و جبر ابتدایی، چهار بستر را برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی، مناسب پیشنهاد می‌کند. این چهار بستر عبارت‌اند از: مسائل کلامی، الگویابی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب. این مقاله همراه با تشریح این زمینه‌ها، از آن‌ها به‌عنوان چارچوبی برای تحلیل محتوای جبر کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی بهره می‌گیرد. تحلیل محتوای کتاب‌ها حاکی از این است که علی‌رغم وجود موقعیت‌های بالقوهٔ فراوان برای جبرورزی در این کتاب‌ها، این موقعیت‌ها غالباً به نفع جبرورزی استفاده نشده‌اند. این مقاله همچنین پیشنهادهایی را برای بازنگری محتوای کتاب بر اساس چارچوب پیشنهادی ارائه کرده است.

کلید واژه‌ها: برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی، جبر ابتدایی، مسائل کلامی، الگویابی، تساوی، قوانین حساب

▫ تاریخ دریافت مقاله: ۹۴/۱۱/۱۴ ▫ تاریخ شروع بررسی: ۹۴/۱۲/۱۶ ▫ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱/۲۹

* دانشجوی دکترا آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی .... l_khosroshahi@yahoo.com
** استادیار آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی ودانشیار آموزش ریاضی دانشگاه لیورپول جان مورس انگلستان... asghari.amir@gmail.com

مقدمه

جبر در میان افرادی که آن را از منظر کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای تجربه کرده‌اند، به معنای دست‌ورزی با نمادها به‌منظور ساده کردن عبارت‌های جبری و حل معادلات است. این تصور رایج، نشئت‌گرفته از برنامهٔ درسی ریاضیِ متداول است. در ایران، از گذشته تا امروز، دانش‌آموزان پس از آموزش حساب در سال‌های اولیهٔ تحصیل، از دورهٔ دبیرستان به بعد شروع به فراگیری جبر می‌کنند. این آموزش با معرفی نمادهای حرفی آغاز شده و با تکنیک‌های ساده کردن عبارت‌های جبری و حل معادلات ادامه می‌یابد. چنین رویکردی در آموزش جبر، مختص ایران نیست و برنامهٔ درسی اغلب کشورها اساساً بر همین رویکرد استوار بوده است. کاپوت[1] (۲۰۰۸) بیان می‌کند که تا قرن بیستم، جبر مدرسه‌ای در امریکا پس از شش تا هشت سال آموزشِ مبتنی بر حساب آغاز می‌شد. آموزش حساب از همه انتظار می‌رفت درحالی‌که یادگیری جبر مختصِ نخبه‌ها بود. به همین دلیل رویکرد معرفی جبر پس از حساب، به‌عنوان ترتیب طبیعی این دو موضوع دیده شده است.

کی‌یِرن[2] (۲۰۰۴) بیان می‌کند تحقیقاتی در دههٔ ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ انجام شده که به مشکلات دانش‌آموزان در حوزهٔ جبر اشاره دارد. کاپوت (۲۰۰۸) نیز با تمرکز بر تحقیقات دههٔ ۱۹۸۰ نشان می‌دهد که در آن دوره، تحقیق دربارهٔ تفکر و یادگیری جبر بر روی خطاهای دانش‌آموزان و محدودیت‌های آن‌ها در یادگیری، به‌خصوص محدودیت‌های شناختی، متمرکز بوده است. به گفتهٔ او محققان با جمع‌آوری شواهد بسیار نشان داده‌اند که دانش‌آموزان فهم ضعیفی از قواعد جبر دارند و در توصیف نمادهای جبری دچار مشکل‌اند. کاپوت (۲۰۰۸)، مشکلات دانش‌آموزان در درک صحیح از جبر را نتیجهٔ برنامهٔ سنتی آموزش جبر می‌داند که محور اصلی آن آموزش دست‌ورزی با نمادهاست. فرنچ[3] (۲۰۰۲) نیز بیان می‌کند که رویکرد مورد استفاده در بسیاری از کتاب‌ها، استفاده از تمرینات دست‌ورزی بوده که در دل هیچ زمینهٔ معناداری قرار نگرفته بودند. به اعتقاد او این رویکرد به‌جای ایجاد ارتباط بین نمادها و اعداد و توسعهٔ درک درست از ایده‌ها، بر به‌خاطرسپاری رویه‌ها تأکید دارد و از همین رو، دانش‌آموزان معمولاً درک صحیحی از معنای نمادهای حرفی به دست نمی‌آورند. مک‌گریگور[4] (۲۰۰۴) نیز با تأکید بر اینکه برنامهٔ درسی جبر از به‌خاطرسپاری مجموعه‌ای از قواعد تشکیل شده و ارتباط معناداری با آموخته‌های پیشین دانش‌آموزان در حساب نداشته، نتایج نامطلوب یادگیری دانش‌آموزان در جبر را یکی از محرک‌های مهم برای ایجاد تغییر در برنامهٔ درسی جبر می‌داند. شکست برنامهٔ درسی سنتی جبر، در آمریکا محققان و آموزشگران را متقاعد کرد که «تفکر جبری نتیجهٔ طبیعی رشد شناختی نیست و برای ایجاد آن به آموزش و ایجاد موقعیت‌های آموزشی مناسب نیاز است» (رادفورد[5]، ۲۰۱۱؛ ص. ۳۰۸ و ص. ۳۰۹). کاپوت (۲۰۰۸) اظهار می‌کند که چنین رویکرد سطحی به جبر که باعث بیزاری معلمان و شکست دانش‌آموزان در جبر شده بود، از قرن بیست‌ویک مورد بازبینی قرار گرفت. به‌خصوص که حالا دیگر یادگیری جبر تحت عنوان «جبر برای همه[6]» بخشی جدانشدنی از آموزش‌های مدرسه‌ای شده بود

و موفقیت در جبر به‌عنوان یکی از مشخصه‌های موفقیت تحصیلی به‌حساب می‌آمد. حرکت «جبر برای همه» که در راستای ایجاد عدالت آموزشی به وجود آمده بود، برنامهٔ درسی ریاضی را ملزم می‌ساخت که مسیر تجربهٔ واقعی جبر را برای همگان هموار سازد.

کی‌یِرن (۲۰۰٤) به این موضوع اشاره می‌کند که در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ در آموزش جبر اصلاحاتی پدید آمد و این موضوع مطرح شد که اگر پیش‌تر فکر کرده بودیم که هستهٔ اصلی جبر چیست و برخی عناصر را زودتر – در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی– وارد آموزش‌های مدرسه‌ای می‌کردیم، شاید جبر برای جمعیت بیشتری از دانش‌آموزان قابل‌درک می‌شد. در واقع کی‌یِرن با طرح این موضوع به اهمیت حوزهٔ «جبر ابتدایی[۷]» اشاره می‌کند.

جبر ابتدایی

از جبر ابتدایی تعابیر مختلفی وجود دارد. به گفتهٔ لینز و کاپوت[۸] (۲۰۰٤) جبر ابتدایی ممکن است به اولین مواجههٔ دانش‌آموزان با جبر اشاره کند که به دلایل مختلف مثل سنت و یا نظریه‌های یادگیری حاکم، معمولاً در سنین پس از دوازده‌سالگی آغاز شده است. برداشت دیگری که در جامعهٔ آموزش ریاضی رایج شده، از جبر ابتدایی برای روبه‌روکردن هر چه زودتر کودکان با استدلال جبری، حتی در سن هفت‌سالگی، استفاده می‌کند. یکی از دلایل ایجاد چنین نگاهی نسبت به جبر ابتدایی را می‌توان این موضوع دانست که تحقیقات اخیر نشان می‌دهند کودکان، نسبت به آنچه قبلاً تصور می‌شد، قادر به انجام کارهای بیشتری در زمینهٔ جبر هستند (کارپنتر، لوی و فارنزورث[۹]، ۲۰۰۰؛ لینز و کاپوت، ۲۰۰٤؛ رادفورد، ۲۰۱۱؛ کاراهر، اشلایمن، بریزوئلا و ارنست[۱۰] ۲۰۰٦؛ پاپیک و مولیگان[۱۱]، ۲۰۰۷). به گفتهٔ کاراهر و همکاران (۲۰۰٦) آموزشگران بسیاری بر لزوم حضور جبر در دورهٔ ابتدایی تأکید داشته‌اند. شورای ملی معلمان ریاضی[۱۲] امریکا و کانادا (۲۰۰۰) نیز در استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی خود، در تمام پایه‌های تحصیلی با شروع از پایهٔ پیش‌دبستانی به موضوع جبر می‌پردازد.

ورود موضوع درسی جبر به سال‌های اولیهٔ آموزش، نیازمند تأمل در نحوهٔ حضور آن است. کاراهر، اشلایمن و شوارتز[۱۳] (۲۰۰۸) ابراز می‌دارند که «منتقل کردن جبری که اکثر ما در مدرسه خوانده‌ایم به دورهٔ ابتدایی یک فاجعه است. چه‌طور ممکن است چیزی که در سنین بالاتر برای ما بی‌معنا بود در سنین پایین برای کودکان معنادار باشد؟ با این حساب اگر جبر ابتدایی همان جبری که ما خوانده‌ایم نیست، پس چیست؟» (ص. ۲۳۵)

راسل، شیفتر و باستابل[۱٤] (۲۰۱۱) بیان می‌کنند که وقتی می‌پرسیم «چگونه می‌توان در پایه‌های ابتدایی دانش‌آموزان را برای آموزش جبر آماده کرد؟» منظورمان تمرکز بر جبر رسمی در دورهٔ ابتدایی نیست، پس بهتر است سؤال را این‌گونه مطرح کنیم که «راه‌های اصلی تفکر، استدلال و درک و فهم‌هایی که ریشهٔ اصلی آن‌ها در حساب است اما برای جبر ضروری است، چیست؟» این سؤال ما را به سمت

تمرکز بر آموزش‌هایی رهنمون می‌شود که هم هدفِ محاسبات در دورهٔ ابتدایی را برآورده می‌سازند و هم دانش‌آموزان را به سمت توسعهٔ انواعی از استدلال سوق می‌دهند که برای استفادهٔ معنادار از ابزارهای جبری لازم است.

کی‌یِرن (۲۰۰٤) تفکر جبری در پایه‌های ابتدایی را شامل توسعهٔ روش‌های تفکر به‌وسیلهٔ فعالیت‌هایی مثل تجزیه‌وتحلیل روابط بین کمیت‌ها، توجه به ساختار، مطالعهٔ تغییرات، تعمیم دادن، حل مسئله، مدل‌سازی، توجیه کردن، اثبات و پیش‌بینی کردن می‌داند. از نظر او وجود نمادها در جبر ابتدایی ضروری نیست و این فعالیت‌ها را می‌توان بدون استفاده از جبر نمادین هم انجام داد.

با چنین نگاهی به جبر در دورهٔ ابتدایی و با توجه به اهمیت جبر در برنامهٔ درسی و تأکید برنامهٔ درسی ملی ایران در سال ۱۳۹۱ بر جبر، به‌عنوان یکی از مفاهیم ریاضی قلمرو حوزهٔ آموزش ریاضیات، مطالعهٔ حاضر درصدد پاسخ‌گویی به این دو پرسش اساسی است. ۱. چه موضوعات درسی قابلیت ایجاد بستر مناسب برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی را دارند؟ ۲. کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی تا چه اندازه با نگاه جبری به این موضوعات پرداخته‌اند؟

روش مطالعه

ما در این مطالعه برای پاسخ‌گویی به پرسش اول، از تنوع موجود در ادبیات تحقیقات حوزهٔ جبر ابتدایی بهره گرفتیم و با مطالعهٔ فراگیر تحقیقات این حوزه، تلاش کردیم موضوعاتی را که به‌طورمعمول در کتاب‌های درسی دورهٔ ابتدایی به آن‌ها پرداخته می‌شود و قابلیت تبدیل‌شدن به بستری برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی را دارند، شناسایی کنیم. آنگاه این موضوعات را در قالب جدیدی که به نظر پژوهشگران قابل‌اجرا در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی در ایران است قرار دادیم. برای پاسخ‌گویی به پرسش دوم نیز، از این قالبِ معرفی‌شده، به‌عنوان چارچوبی برای تحلیل محتوای جبر در کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی استفاده نمودیم.

برای تحلیل محتوا (باردن، ۱۳۷٤) پژوهشگر محتوای همهٔ کتاب‌های ریاضی اول تا چهارم دبستان[۱۵] را، اعم از فعالیت‌ها، کاردرکلاس‌ها، تمرین‌ها و همچنین بخش‌های دیگری با عناوینی مانند حل مسئله، فرهنگ خواندن و نوشتن، مرور فصل، معما و سرگرمی و کادرهای خلاق باش، کامل کن، الگویابی کن و، مانند آن، بررسی نموده است. در این بررسی‌ها، پژوهشگر با در نظر داشتن چارچوب پیشنهادی، به دنبال یافتن آثار نگاه جبری در محتوا بود. گزارشی که در ادامه می‌آید، علاوه بر بهره‌گیری از ادبیات تحقیقات انجام‌شده برای تبیین چارچوب پیشنهادی، به ذکر مثال‌هایی از کتاب می‌پردازد. این مثال‌ها با دو هدف عمده انتخاب شده‌اند. برخی از مثال‌ها، مثال‌های معرفِ رویکرد غالب در کتاب‌اند و برخی دیگر، مثال‌هایی هستند که از قابلیت توسعه با نگاه جبری برخوردارند. با توجه به محدودیت مقاله، در ذیل هریک از عناوین این چارچوب، علاوه بر توصیف زمینهٔ مورد نظر با استفاده از ادبیات پژوهشی

و همچنین تحلیل محتوای کتاب‌های ریاضی در آن زمینه، به پیشنهادهایی برای توسعهٔ نگاه جبری در کتاب در زمینهٔ موردنظر نیز پرداخته شده است.

■ بسترهای مناسب جبرورزی در دورهٔ ابتدایی

بررسی تحقیقات انجام‌شده در حوزهٔ جبر ابتدایی (برای نمونه، گزارش تحقیقات NCTM را در کی‌یرن، ۲۰۱۴a و ۲۰۱۴b و مجموعه مقالات موجود در بدنارز، کی‌یرن و لی[16]، ۱۹۹۶، استیسی، چیک و کندال[17]، ۲۰۰۴، کاپوت، کاراهر و بلانتون[18]، ۲۰۰۸ و کای و نوث[19]، ۲۰۱۱ را ببینید) نشان می‌دهد که آموزشگران ریاضی، رویکردهای مختلفی به جبر دورهٔ ابتدایی داشته‌اند و از موضوعات ریاضی متنوعی برای تحقق جبرورزی در ریاضیات مدرسه‌ای، و به‌طور خاص دورهٔ ابتدایی، استفاده کرده‌اند. این رویکردهای مختلف و موضوعات متنوع، از اشتراکات فراوانی برخوردارند. به‌این‌ترتیب بررسی و مطالعهٔ ادبیات غنی حوزهٔ جبر ابتدایی، به همراه توجه به فرهنگ موجود در کتاب‌های ریاضی این دوره در ایران، به معرفی چهار بستر مناسب برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی انجامید. این موضوعات مختلف ریاضی که می‌توان تفکر جبری را در دل آن‌ها محقق نمود، عبارت‌اند از: مسائل کلامی، الگویابی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب.

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، با توجه به محدودیت مقاله، در ادامه ذیل هریک از عناوین، علاوه بر توصیف زمینهٔ مورد نظر با استفاده از ادبیات پژوهشی و همچنین تحلیل محتوای کتاب‌های ریاضی در آن زمینه، به پیشنهادهایی برای توسعهٔ نگاه جبری در کتاب در زمینهٔ موردنظر نیز پرداخته می‌شود.

۱. مسائل کلامی

در ادبیات حوزهٔ جبر، رویکردهای مختلفی برای آموزش جبر مطرح شده است که هم‌پوشانی‌هایی با یکدیگر دارند. رویکردهای مدل‌سازی (ژانویر[20]، ۱۹۹۶؛ بدنارز و همکاران، ۱۹۹۶؛ اسمیت و تامپسون[21]، ۲۰۰۸)، رویکرد تابعی (کاراهر و همکاران، ۲۰۰۸) و رویکرد حل مسئله (بدنارز و ژانویر[22]، ۱۹۹۶) هر سه به نوعی با مسائل کلامی سروکار دارند. به همین جهت ازآنجاکه مسائل کلامی به‌وفور در کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی وجود دارند، در پاسخ به پرسش اول این مطالعه، مسائل کلامی به‌عنوان یکی از بسترهای مناسب جبرورزی در دورهٔ ابتدایی قلمداد شده است.

بدنارز و ژانویر (۱۹۹۶) با بیان رویکردهای مختلف در آموزش جبر، رویکرد حل مسئله را به دو دلیل برای معرفی جبر به دانش‌آموزان مناسب می‌دانند. یکی اینکه به لحاظ تاریخی حل مسئله نقش مهمی در توسعهٔ جبر داشته، دیگر اینکه حل مسئله در آموزش جبر نیز نقش اساسی دارد. جبر کمک کرده است تا برای حل مسائلی که توسط حساب در موارد خاص حل می‌شوند، راه‌حل کلی ارائه شود.

مسائل کلامی در دورهٔ ابتدایی را می‌توان نمونه‌های ساده‌ای از مسائل مدل‌سازی دانست. از رویکرد مدل‌سازیِ موقعیت‌های واقعی به‌عنوان یکی از زمینه‌های مناسب برای یادگیری جبر یاد شده است

(ژانویر، ۱۹۹۶؛ بدنارز و همکاران، ۱۹۹۶؛ اسمیت و تامپسون، ۲۰۰۸). اسمیت و تامپسون (۲۰۰۸) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان در زمینهٔ مدل‌سازی موقعیت‌های واقعی، بدون استفاده از نمادها و با استدلال در مورد روابط بین کمیت‌های مختلف، پایه‌های مفهومی لازم برای یادگیری و درک جبر را بنا نمود. البته آن‌ها بیان می‌کنند که کسب توانایی در استدلال‌های کمی پیچیده، نیازمند توسعهٔ بلندمدت در طول سال‌های ابتدایی و راهنمایی است.

مسائل کلامی در دورهٔ ابتدایی معمولاً با استفاده از انجام یک یا چند عمل پاسخ داده می‌شوند و در دوره‌های بالاتر تحصیلی، منجر به حل معادله می‌شوند. رید[۲۳] (۱۹۹۹) دستهٔ اول را مسائل کلامی حسابی و دستهٔ دوم را مسائل کلامی جبری می‌نامد. مسئلهٔ زیر، نمونه‌ای از مسائل کلامی حسابی در دورهٔ ابتدایی است.

محسن ۸ سال داشت که خواهرش به دنیا آمد. حالا از آن زمان ۱۰ سال گذشته است. این خواهر و برادر روی هم چند سال دارند؟
(کتاب ریاضی دوم دبستان، ص. ۹۹)

کتاب ریاضی دوم دبستان، پس از طرح مسئله، دانش‌آموزان را برای حل مسئلهٔ کلامی فوق، به‌صورت زیر هدایت کرده است:

الف. حالا محسن چند سال دارد؟	سن محسن ....=............+............
ب. خواهرش چند سال دارد؟	سن خواهر محسن ....=............+..........
ج. این دو نفر روی هم چند سال دارند؟	سن محسن و خواهرش..........=............+............

همان‌طور که در روش حل فوق پیداست، مسائل کلامی حسابی، بر یافتن پاسخ مسئله با استفاده از یک یا چند عمل حسابی متوالی تمرکز دارند (رید، ۱۹۹۹). بااین‌حال چنین مسئلهٔ حسابی با یک تغییر نگاه می‌تواند زمینه را برای تفکر جبری نیز فراهم سازد. برای این منظور به‌جای اینکه تمرکز بر پاسخ عددی مسئله باشد، می‌توان تمرکز را بر روابط موجود بین کمیت‌های مسئله قرار داد (هویت[۲۴]، ۲۰۰٤ نقل شده در کی‌یرن، ۲۰۱٤b؛ کاراهر و همکاران، ۲۰۰۸) . مثلاً در مسئلهٔ فوق به‌جای انجام سه عملیات ذکرشده می‌توان از دانش‌آموزان خواست در جدولی، سن محسن و خواهرش را طی سال‌های مختلف به دست آورده و ارتباط بین این دو کمیت را مشاهده کنند. به‌این‌ترتیب با قرار دادن اعداد مختلف در جدول به‌عنوان سن محسن و خواهرش در سال‌های مختلف، دانش‌آموز هم درکی از مفهوم متغیر به دست می‌آورد و هم با هدایت معلم تلاش به یافتن رابطهٔ بین دو متغیر (سن محسن و سن خواهرش) می‌کند.

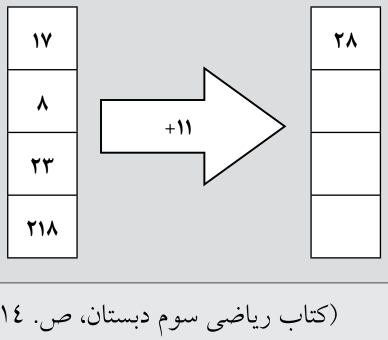
سن محسن	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
سن خواهر محسن	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

دانش‌آموزان ممکن است در جدول بالا فقط به ارتباطات افقی توجه کنند که تغییرات یک متغیر را نشان می‌دهد. اسمیت (۲۰۰٤) نشان می‌دهد که چگونه معلم می‌تواند با ایفای نقش مؤثر در کلاس، دانش‌آموزان را به‌سوی کشف ارتباطات عمودی در جدول، یعنی رابطهٔ بین دو متغیر، هدایت کند (نقل‌شده در کی‌یرن، ۲۰۱٤b). با استفاده از تعبیر کی‌یِرن (۲۰۰٤) از جبر ابتدایی باید گفت، برای بیان رابطهٔ بین دو متغیر لازم نیست دانش‌آموزان را وادار به استفاده از نمادهای جبری پیشرفته مثل y=x+۸ بکنیم، بلکه می‌توان به بیان شفاهی آن توسط دانش‌آموز اکتفا کرد و زمینه را برای بیان جبری آن در سال‌های بعد به وجود آورد.

یکی دیگر از رویکردهای موجود به آموزش جبر ابتدایی که مسائل کلامی در آن نقش پررنگی دارند، رویکرد تابعی است. رویکرد تابعی هرچند که منطبق بر تاریخ توسعهٔ جبر نیست (ویلر[۲۵]، ۱۹۹٦)، رفته‌رفته جایگاه مهمی در آموزش جبر ابتدایی پیدا کرده است (بدنارز و همکاران، ۱۹۹٦). در رویکرد تابعی تلاش بر این است تا دانش‌آموز رابطهٔ تابعی موجود بین دو مجموعه از اعداد را درک کرده و آن را با استفاده از بازنمایی‌های مختلف بیان نماید. ازاین‌جهت، مسائل کلامی می‌توانند زمینه‌ای برای تحقق این رویکرد نیز باشند. کاراهر و همکاران (۲۰۰۸) ابراز می‌کنند که تابع موضوعی است که ارزش دارد بیشتر از این مورد توجه قرار گیرد اما جای آن در برنامهٔ درسی ابتدایی خالی است. تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در پایه‌های پایین به طرز قابل‌توجهی توابع را می‌فهمند و می‌توانند با آن‌ها کار کنند (کاراهر و همکاران، ۲۰۰۸ و الیس[۲٦]، ۲۰۱۱ را ببینید).

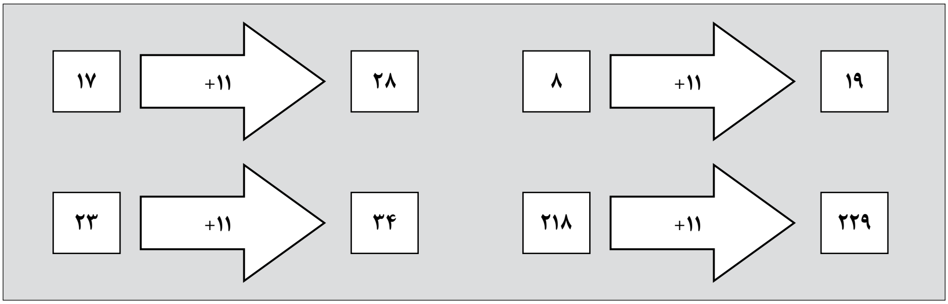
کتاب‌های دورهٔ ابتدایی ایران، با استفاده از ابزاری به نام ماشین ورودی- خروجی، به نظر می‌رسد دانش‌آموزان را برای تفکر تابعی آماده می‌کنند. در ادامه نمونه‌ای از این ماشین‌ها آمده است.

با توجه به کاری که هر ماشین انجام می‌دهد، در جاهای خالی عدد مناسب را بنویسید.



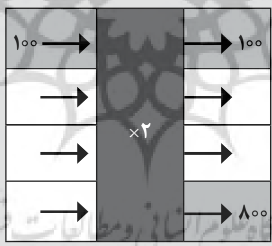
(کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ١٤)

درک این نکته که دستگاه بالا یک ماشین است که ورودی‌های مختلف را با ضابطه‌ای مشخص تغییر می‌دهد، برای درک مفهوم متغیر و تابع ضروری است. در واقع انتظار می‌رود این تجربه برای دانش‌آموز چیزی بیشتر از انجام چهار محاسبهٔ جمع جدا از هم باشد.



چنیـــن درکی از ماشـــین ورودی ـ خروجی که در آن عمل «به‌علاوهٔ ۱۱ شـــدن» بر مجموعهٔ اعداد {...,۲۱۸ ,۲۳ ,۸ , ۱۷} در حال انجام است، در زمینهٔ مسائل کلامی معنادارتر خواهد بود. کتاب ریاضی چهارم دبستان در یک مورد از چنین زمینه‌ای استفاده کرده است.

۱. اگـــر پـــول طاهـــره دوبرابر پول غزل باشـــد، جدول را کامل کنید. ســـپس با توجّه به اطلاعات جدول، ماشین ورودی ـ خروجی مشـــابه آن‌را کامل کنید.



پول طاهره	پول غزل
۲۰۰	۱۰۰
	۲۰۰
	۳۰۰
۸۰۰	

(کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص. ۱۵)

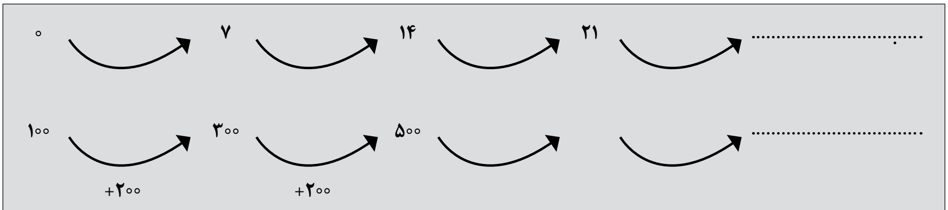
این زمینه باعث می‌شـــود اعداد ورودی {۱۰۰،۲۰۰،۳۰۰} به شکل معنادارتری کنار هم قرار بگیرند؛ چراکه همگی نشان‌دهندهٔ مقداری فرضی برای پول غزل هستند.

باوجوداینکه مسائل کلامی با دربرداشتن جنبه‌هایی از رویکردهای حل مسئله، مدل‌سازی و رویکرد تابعی، زمینهٔ بالقوه‌ای برای جبرورزی در دورهٔ ابتدایی هســـتند و علی‌رغم اســـتفادهٔ فراوان کتاب‌ها از مسائل کلامی، شواهدی از به‌کارگیری جبریِ آن‌ها در کتاب‌ها مشاهده نمی‌شود. در واقع تحلیل محتوای کتاب‌ها نشان می‌دهد که در تمام مسائل کلامی موجود در کتاب‌های پایه‌های اول تا چهارم ابتدایی، از رویکرد حســـابی بهره گرفته شده، یعنی کتاب بر پاسخ مسئله که یک عدد است، متمرکز می‌شود. مثال محسن و خواهرش، به‌خوبی نمایانگر رویکرد کتاب‌ها در این زمینه است.

۲. الگویابی

به اظهار پاپیک و مولیگان (۲۰۰۷)، تحقیقات دههٔ ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ که روی رشد استراتژی‌های حساب انجام شده بود سبب شد که جهت‌گیری تحقیقات جبر بیشتر به سمت ارتباط آن با حساب باشد تا موضوعی مانند الگویابی. بااین‌حال اخیراً محققان جبر ابتدایی (مثلاً انگلیش و وارن، ۱۳۷۷؛ رادفورد، ۲۰۱۱؛ پاپیک و مولیگان، ۲۰۰۷؛ ریورا[27]، ۲۰۱۳؛ مولیگان و میچلمور[28]، ۲۰۰۹ و وارن و کوپر[29]، ۲۰۰۸) توجه بیشتری به الگویابی و نقش آن در تفکر جبری داشته‌اند. آن‌ها از الگوها استفاده می‌کنند تا از طریق آن تفکر جبری، تعمیم و آگاهی از ساختار را توسعه دهند. این در حالی است که ماس و مک‌ناب[30] (۲۰۱۱) بیان می‌کنند که معمولاً در کتاب‌های درسی پایه‌های اولیهٔ ابتدایی، الگوها به‌عنوان تکرارشدن به کار می‌روند و معمولاً از دانش‌آموزان می‌خواهند که «بعدی» را پیدا کنند. چنین نگاه محدودی نسبت به الگوها قابل‌توسعه به یادگیری‌های بعدی دانش‌آموز نیست. اما نتایج تحقیقات آن‌ها نشان می‌دهد که با آموزش مناسب، مطالعهٔ جبری الگوها می‌تواند دانش‌آموزان را با هر درجه از توانایی، در جهت انواعی از تفکر ریاضی هدایت کند که کی‌یِرن می‌گوید برای استدلال جبری لازم‌اند؛ یعنی «تجزیه‌وتحلیل رابطهٔ بین کمیت‌ها، توجه به ساختار، مطالعهٔ تغییرات، تعمیم، حل مسئله، مدل‌سازی، توجیه‌کردن، اثبات و پیش‌بینی‌کردن». علاوه بر این با استفاده از الگویابی می‌توان مفاهیم اساسی جبر مانند متغیر و هم‌ارزی‌های جبری را آموزش داد (انگلیش و وارن، ۱۳۷۷). کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی ایران، از کشف الگوهای عددی و شکلی و بیان شفاهی و نوشتاری الگوها، به‌عنوان یکی از مهارت‌های مهم در یادگیری ریاضی یاد کرده (کتاب ریاضی سوم دبستان، ص ۸) و با تأکید بر اینکه کشف الگوها در یک مسئله به حل آن کمک می‌کند، الگویابی را به‌عنوان یکی از راهبردهای مسئله آموزش داده‌اند (ص. ۹). اهمیت موضوع الگویابی در جبر ابتدایی همراه با حضور موضوع الگویابی در کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی ایران، سبب شد تا در پاسخ به پرسش اول این مطالعه، الگویابی به‌عنوان یکی از بسترهای مناسب جبرورزی در دورهٔ ابتدایی قلمداد شود.

بررسی موضوع الگویابی در کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی نشان می‌دهد که مشابه آنچه ماس و مک‌ناب (۲۰۱۱) بیان می‌کنند، در کتاب‌های درسی پایه‌های اولیهٔ ابتدایی ایران نیز، الگوها به‌عنوان جملات تکرارشونده به کار می‌روند و معمولاً از دانش‌آموزان می‌خواهند که «جملهٔ بعدی» را پیدا کنند. در ادامه یکی از تمرین‌های کتاب در مورد الگویابی که به‌خوبی مؤید رویکرد کتاب‌ها در این زمینه است، می‌آید.



(کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ۱۲)

رادفورد (۲۰۱۱) بیان می‌کند که برای ادامه دادن یک الگو، دانش‌آموزان باید ابتدا یک وجه مشترک[۳۱] را در جملات دنبالهٔ داده‌شده ببینند و سپس آن را به بقیهٔ جملات دنباله تعمیم دهند؛ اما تشخیص این شباهت‌ها و توانایی تولید جملات بعدی دنباله را نمی‌توان نتیجهٔ یک فرایند جبری دانست. به نظر رادفورد، هرچند ممکن است این فرایند بسیار پیچیده باشد، لزوماً در آن جبر دیده نمی‌شود. به‌زعم رادفورد (۲۰۱۱) تعمیم الگوها را زمانی می‌توان یک فعالیت جبری دانست که از محاسبه با اعداد فراتر رفته و به وضع قوانینی برای محاسبه منجر شود. در مثالی که از کتاب درسی بیان شد، در الگوی دوم انتظاری که از دانش‌آموز می‌رود این است که به الگوی «دویست تا دویست تا زیاد شدن» توجه کرده و با تعمیم این الگو، اعداد بعدی دنباله را تا جایی که خواسته شده یکی پس از دیگری به‌صورت زیر بنویسد.

...	۲۱۰۰	۱۹۰۰	۱۷۰۰	۱۵۰۰	۱۳۰۰	۱۱۰۰	۹۰۰	۷۰۰	۵۰۰	۳۰۰	۱۰۰

چنین رویکردی به تعمیم الگو، یک رویکرد حسابی محسوب می‌شود. در این رویکرد هر جمله به‌طور بازگشتی و با در دست داشتن جملهٔ قبلی محاسبه می‌شود. مثلاً جملهٔ هشتم با اضافه کردن ۲۰۰ به جملهٔ هفتم محاسبه می‌شود (یعنی ۲۰۰+۱۳۰۰). چنین سؤالی وقتی به یک فعالیت جبری تبدیل می‌شود که در آن دانش‌آموز به تولید رابطه‌ای برای محاسبهٔ جملات به‌طور مستقیم و بدون استفاده از جملهٔ قبل برسد. مثلاً برای محاسبهٔ جملهٔ هشتم از این استدلال استفاده کند که جملهٔ هشتم، با هفت‌بار اضافه کردن ۲۰۰ به اولین جملهٔ دنباله یعنی ۱۰۰ به وجود می‌آید و بنابراین برابر با ۲۰۰ × ۷+۱۰۰ است. از این رابطه می‌توان برای محاسبهٔ تمام جملات دنباله کمک گرفت. مثلاً جملهٔ صدم با استفاده از همین روش برابر است با ۲۰۰ × ۹۹+۱۰۰.

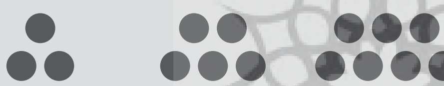
با چنین نگاهی به الگوها، دانش‌آموز به‌طور ضمنی مفاهیم جبریِ متغیر و تابع را تجربه می‌کند. مثلاً در مورد قبل، با یک شمارش نظام‌مند، به‌طور ضمنی ضابطهٔ $f(n)=100+(n-1)\times 200$ را که در آن n شمارهٔ جمله و $f(n)$ مقدار جملهٔ n–ام را نشان می‌دهند، تشخیص می‌دهد. همچنین وقتی این ضابطه را برای تمام جملات دنباله به کار می‌برد، در واقع در حال دست‌ورزی با مفهوم متغیر (انگلیش و وارن، ۱۳۷۷) است.

در کتاب ریاضی اول دبستان حدود ۱٤٪ از صفحات به موضوع الگویابی اختصاص یافته است که در تمام موارد، از دانش‌آموز خواسته شده جملهٔ بعدی (شامل شکل، عدد یا رنگ) را بیابد و به‌این‌ترتیب رویکرد حسابی به الگویابی کاملاً مشهود است. در کتاب دوم دبستان نیز در حدود بیست واحد در کل کتاب به الگویابی با رویکرد حسابی پرداخته شده است. این واحدها گاه کادرهایی با عنوان «الگویابی کن» هستند و گاه یکی از تمرینات یا فعالیت‌های کتاب. در تمام موارد از دانش‌آموز خواسته شده جملهٔ بعدی را پیدا کند و در چند مورد خواسته است الگو را توصیف نمایند. کتاب

ریاضی سوم دبستان نیز در فصل اول با عنوان الگوها، در کم‌تر از پنج صفحه به الگویابی پرداخته که همچنان رویکرد حسابی به الگویابی دارد. مثال قبل از کتاب سوم دبستان معرف این رویکرد است.

در کتاب چهارم دبستان شش صفحه از فصل اول با عنوان «اعداد و الگوها» به الگویابی اختصاص یافته است.به نظر می‌رسد در چند مورد (صفحات ۹ تا ۱۱) از کتاب چهارم دبستان، ردپای رویکرد جبری به الگویابی مشاهده می‌شود. مثلاً در یک دنباله از اشکال نشان داده است که چگونه می‌توان تعداد دایره‌های به‌کاررفته در شکل هفتم را، بدون دانستن تعداد دایره‌های موجود در اشکال پنجم و ششم، به دست آورد. برای این منظور از یک شمارش نظام‌مند که منجر به تولید یک فرمول می‌شود استفاده می‌کند.

فعالیت: هر کدام از شکل‌های زیر از تعدادی دایره درست شده است. اگر شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد دایره‌های شکل هفتم چقدر است؟



؟

شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳) شکل(۷)

چهار دانش‌آموز این مسئله را حل کرده‌اند. این دانش‌آموزان بدون آنکه شکل‌های پنجم و ششم را رسم کنند، تعداد دایره‌های شکل هفتم را به‌دست آورده‌اند. راه حل‌های آن‌ها را بررسی کنید و توضیح دهید. کار آن‌ها را کامل کنید.

۱) راه‌حل سعید

تعداد دایره‌های شکل هفتم =(۷×۲) +۱=

(کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص. ۹)

بااینکه، با توجه به مثال بالا، به نظر می‌رسد کتاب ریاضی پایهٔ چهارم، رویکرد جبری به موضوع الگویابی دارد، مسائل کتاب به‌گونه‌ای مطرح شده‌اند که دانش‌آموز می‌تواند با رویکرد حسابی و با استفاده از رسم شکل و شمارش مستقیم، سؤال‌ها را پاسخ دهد.

۲. شکل ششم با چند چوب کبریت درست می‌شود؟

؟

شکل(۶) شکل(۳) شکل(۲) شکل(۱)

(کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص. ۱۱)

در مسئلهٔ بالا می‌توان با رسم شکل ششم، تعداد چوب‌کبریت‌های مورد نیاز را شمرد. بنابراین دانش‌آموز لزوم شمارش نظام‌مند غیرمستقیم را درک نخواهد کرد.

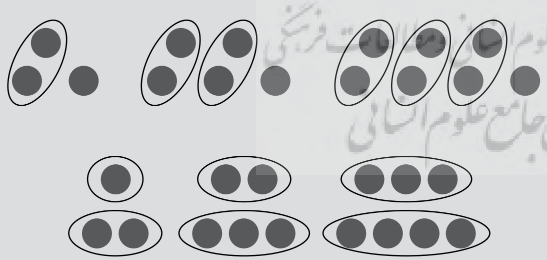
الگویابی جبری به معنای شمارش نظام‌مند، می‌تواند زمینه‌ای برای درک هم‌ارزی‌های جبری (انگلیش و وارن، ۱۳۷۷) در پایه‌های بالاتر به وجود بیاورد. تحقیقات موجود روی الگویابی در دهۀ گذشته به‌طور تجربی نشان داده‌اند که افراد مختلف، یک الگوی واحد را به شکل‌های متفاوت می‌بینند و بنابراین احتمالاً تعمیم‌های متفاوتی نیز از آن الگو را بیان می‌کنند (ریورا و بکر[۳۲]، ۲۰۱۱). کتاب ریاضی چهارم دبستان نیز به چنین تنوعی پرداخته است. در کتاب ریاضی چهارم دبستان، دو نوع شمارش تعداد دایره‌های به‌کاررفته در اشکال دنبالهٔ زیر، دو فرمول متفاوت را برای شمارش تولید می‌کند.

۱) راه‌حل سعید

=۱+ (۲×۷)= تعداد دایره‌های شکل هفتم

۲) راه‌حل امید

=۷+ ۸ = تعداد دایره‌های شکل هفتم



(کتاب ریاضی چهارم دبستان، ص. ۹)

اگر برای شمارش تعداد دایره‌های به‌کاررفته در شکل n- ام، سعید فرمول ۲n+۱ و امید n+(n+۱) را به‌طور ضمنی تولید کرده باشند، در واقع می‌توان گفت با هدایت صحیح معلم، دانش‌آموز می‌تواند تجربه‌ای از هم‌ارزی جبری ۲n+۱ =(n+۱)+n را در این فعالیت کسب کند.

با توجه به اینکه الگویابی می‌تواند یکی از بسترهای بالقوهٔ جبرورزی در دورهٔ ابتدایی باشد و در نتیجه به درک مفاهیم متغیر و تابع کمک کرده و زمینه‌ای را برای درک تساوی‌های جبری در پایه‌های بالاتر به وجود آورد، بررسی محتوای کتاب‌های دورهٔ ابتدایی نشان می‌دهد که فقط کتاب ریاضی پایهٔ چهارم ابتدایی تلاش‌هایی در این زمینه دارد، درحالی‌که چنین نگاه جبری به الگوها قابل توسعه در کتاب‌هاست.

۳. مفهوم‌سازی برای نماد تساوی

استفن و همکاران[۳۳] (۲۰۱۳) با تکیه بر تحقیقاتی که در گذشته انجام شده، سه نوع درک مختلف را برای دانش‌آموزان از نماد تساوی قائل‌اند؛ نگاه عملیاتی، نگاه رابطه‌ای- محاسبه‌ای، نگاه رابطه‌ای- ساختاری.

- **نگاه عملیاتی[۳۴] به نماد تساوی:** نماد تساوی محرکی برای «انجام یک کار[۳۵]» یعنی محاسبه است، نه نمادی برای بیان یک رابطهٔ برابری. برای این دانش‌آموزان، تساوی‌هایی مانند ۸ = ۸ نادرست‌اند، چون هیچ عملی در آن‌ها انجام نشده است. تساوی ۱۰+۵ =۱۵ از نظر این دانش‌آموزان برعکس نوشته شده است. این دانش‌آموزان در مواجهه با تساوی‌هایی مانند ۵ + ... = ٤ + ۸ یکی از این سه عمل را انجام می‌دهند: ۱. با این نگاه که جواب بعد از تساوی می‌آید، در جای خالی عدد ۱۲ را قرار می‌دهند، ۲. تمام اعداد را جمع کرده و عدد ۱۷ را در جای خالی می‌نویسند، یا ۳. مسئله را به دنبالهٔ نادرستی از تساوی‌ها تبدیل می‌کنند:

  ۸ + ٤ = ۱۲ + ۵ = ۱۷.

- **نگاه رابطه‌ای- محاسبه‌ای[۳۶] به نماد تساوی:** نماد تساوی به معنای وجود رابطهٔ هم‌ارزی بین دو طرف معادله است و این برابری با محاسبه تصدیق می‌شود. برای این دانش‌آموزان، ۳ × ۲ = ۲ × ۳ درست است زیرا حاصل هر دو طرف تساوی برابر با عدد ٦ است. این دانش‌آموزان در مواجهه با ۵ + ... = ٤ + ۸، ابتدا ٤ + ۸ را محاسبه کرده و به عدد ۱۲ می‌رسند، سپس به دنبال عددی می‌گردند که در جمع با ۵ به حاصل ۱۲ برسد. در واقع برای آن‌ها نماد تساوی رابطه‌ای است بین جواب‌های دو عملیات.

- **نگاه رابطه‌ای- ساختاری[۳۷] به نماد تساوی:** علاوه بر اینکه نماد تساوی نشان‌دهندهٔ یک رابطهٔ هم‌ارزی بین دو طرف یک معادله است، تساوی، رابطه‌ای بین دو عبارت است نه بین حاصل دو عملیات. در مواجهه با ۵ + ... = ٤ + ۸ آن‌ها بیان می‌کنند که چون ۵ یکی بیشتر از ٤ در طرف دیگر تساوی است، پس عددی که در جای خالی قرار می‌گیرد باید یکی کم‌تر از ۸ در طرف دیگر تساوی باشد. در واقع ٤ + ۸ برای آن‌ها چیزی بیشتر از محاسبه‌ای است که باید انجام شود و می‌توانند بدون انجام محاسبه، با آن استدلال کنند.

به گفتهٔ کارپنتر و همکاران (۲۰۰۰) برای بیان تعمیم‌ها و توسعهٔ استدلال‌های جبری، داشتن درک صحیحی از تساوی لازم است، و منظور آن‌ها از درک صحیح، درک رابطه‌ای از تساوی است. در پایه‌های بالاتر تحصیلی انتظار می‌رود دانش‌آموزان تساوی‌های جبری مانند ٤(x + y) = ٤x + ٤y را درک کنند، که نیازمند درک رابطه‌ای از تساوی است. این در حالی است که به گفتهٔ استیسی و اصغری (۱۳۸۸) تجربه‌های حسابی دانش‌آموزان از نماد تساوی، که در واقع همان تجارب عملیاتی است، بعدها در درک چنین تساوی‌هایی مشکل ایجاد می‌کند. استفن و همکاران (۲۰۱۳) نشان می‌دهند که بیشتر دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی درک عملیاتی از نماد تساوی دارند. از نظر آن‌ها اینکه به دانش‌آموزان گفته شود نماد تساوی چیست، درک آن‌ها را از نماد تساوی توسعه نمی‌دهد؛ بلکه آنان نیاز به تکالیف مناسبی دارند که با توجه به آنچه تاکنون می‌دانسته‌اند، درک جدیدی را در آن‌ها، همراه با به چالش کشیدن بدفهمی‌های آن‌ها از مفهوم تساوی، توسعه دهد. مثلاً کارپنتر و همکاران (۲۰۰۰) و مولینا و آمبروز[۳۸] (۲۰۰٦ و ۲۰۰۸) در تحقیقات خود، با استفاده از جملاتی که باید درستی یا نادرستی آن‌ها توسط دانش‌آموزان تعیین می‌شد، توانستند درک دانش‌آموزان را از مفهوم تساوی توسعه بخشند. چند نمونه از این جملات در ادامه می‌آید.

۸ + ۵ = ۵ + ۸	۷ = ۴ + ۳	۸ = ۸
۳۴ = ۳۴+۱۲	۱۲ − ۷ = ۱۳ − ۸	۵۱ + ۵۱ = ۵۲ + ۵۰

همچنین در این تحقیقات، استفاده از سؤالاتی با جای خالی توصیه شده است.

... = ۲۵ − ۱۲	۱۲ + ۷ = ۷ + ...	۸ + ۴ = ... + ۵
... + ... = ... + ...	۳۸ + ۴۹ = ... + ۴۰ + ۹	... + ٤ = ۵ + ۷

بررسی کتاب‌های ریاضی دورهٔ ابتدایی ایران نشان می‌دهد که کتاب‌های درسی نگاه عملیاتی به تساوی را تشویق می‌کنند. در اغلب مثال‌های کتاب، در سمت چپ نماد تساوی، یک عملیات نوشته شده (یا باید نوشته شود) و در سمت راست حاصل عددیِ آن، مثل ۵ = ۳ + ۲. تحلیل محتوای کتاب‌های اول تا چهارم دبستان نشان داد که در حدود ۹۵٪ از واحدهایی که در آن‌ها نماد تساوی به کار رفته است، نماد تساوی همین کارکرد عملیاتی را دارد. بقیهٔ موارد مربوط به تساوی‌هایی است که برای نوشتن بسط دهدهی اعداد یا برای بیان تکنیک‌های محاسبات به کار رفته‌اند. برای بسط دهدهی اعداد از تساوی‌هایی به شکل ۱ + ۳۰ + ۲۰۰ = ۲۳۱ استفاده شده است. از تساوی‌های متفاوتی مانند ... = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۳ × ٤ یا ... = ... + ... = (٦ × ۳) + (٦ × ۵) = ٦ × ۸ (کتاب ریاضی سوم دبستان؛ ص. ٦۵ و ص. ۷۱) نیز برای بیان تکنیک‌های انجام محاسبات استفاده شده و همان‌طورکه

دیده می‌شود، در نهایت جای خالی آخر، تأکید کتاب بر حاصل عددی عبارت را نشان می‌دهد.

این بررسی در مجموع نشان می‌دهد که کتاب‌های دورهٔ دبستان با نگاه عملیاتی به تساوی نوشته شده‌اند. این در حالی است که گاهی می‌توان با ایجاد تغییر در نحوهٔ نوشتن بعضی از تساوی‌های موجود در کتاب، نگاه رابطه‌ای به تساوی را در دانش‌آموزان تقویت نمود. مثلاً در کتاب دوم دبستان (ص. ۷) از دانش‌آموزان خواسته شده در جاهای خالی ترکیب‌های مختلفی که مجموع ۷ را می‌سازند، بنویسند. ۷ = ... + ... با یک تغییر کوچک در این تمرین یعنی با جابه‌جا کردن دو طرف تساوی می‌توان گامی در جهت تجربه‌ی درک رابطه‌ای از تساوی برداشت. ... + ... = ۷.

همان‌طور که بحث شد، مفهوم‌سازی رابطه‌ای- ساختاریِ نماد تساوی در دورهٔ ابتدایی، می‌تواند راه را برای درک تساوی‌های جبری در پایه‌های بالاتر هموار سازد. ایجاد چنین فهمی از تساوی را می‌توان در برنامهٔ درسی دورهٔ ابتدایی جای داد؛ بااین‌وجود، کتاب‌های دورهٔ دبستان با چنین نگاهی تألیف نشده و نگاه عملیاتی به تساوی را تقویت می‌کنند.

۴. تعمیم قوانین حساب

بنا به گفتهٔ پاپیک و مولیگان (۲۰۰۷)، جهت‌گیری تحقیقات جبر در دههٔ ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ بیشتر به سمت ارتباط آن با حساب بود. به گفتهٔ کاپوت (۱۹۹۵)، هدفِ حساب، محاسبه کردن با مقادیر خاص از کمیت‌هاست. درحالی‌که هدف جبر، «تعمیم و تجرید روابط کمّی» است و همچنین «استدلال کردن با استفاده از بازنمایی‌های بیرونیِ آن روابط عددی». استیسی و مک‌گرگور[۳۹] (۲۰۰۲) نیز بیان می‌کنند که برای یادگیری جبر، دانش‌آموزان باید بتوانند فرایندهای حسابی و ساختارهای روابط موجود بین اعداد را تشخیص دهند و آن را بیان کنند.

به گفتهٔ یوسیسکین[۴۰] (۱۹۸۸، نقل شده در وینر[۴۱]، ۲۰۰۲) تعمیم قوانین حساب یکی از روش‌های ورود به جبر در برنامهٔ درسی محسوب شده است. منظور از قوانین حساب، قوانین حاکم بر اعمال حسابی است. دانش‌آموز دورهٔ ابتدایی ممکن است به تجربه بداند که حاصل ۲ × ۳ و ۳ × ۲ یکسان است؛ یعنی ۲ × ۳ = ۳ × ۲. اما همین دانش‌آموز ممکن است از خاصیت جابه‌جایی ضرب اعداد در حالت کلی آگاه نباشد. منظور از تعمیم قوانین حساب، رسیدن به چنین تعمیم‌هایی است؛ یعنی گسترش دادن دامنهٔ اعدادی که خاصیت جابه‌جایی ضرب برایشان برقرار است.

از نظر میسون[۴۲] (۱۹۹۶) تفکر دربارهٔ خواص اعداد، یک راه برای فاصله گرفتن از درگیر شدن با اعداد خاص و آگاه شدن از فرایندهاست. او به نقل از گاتگنو[۴۳] (۱۹۹۰) اظهار می‌دارد که جبر وقتی ظاهر می‌شود که فرد آگاهی‌هایی کسب می‌کند که به او اجازه می‌دهد روی اشیاء (در این مورد اعداد) کار کند. هویت[۴۴] (۱۹۹۸) نیز بر اهمیت آگاهی در تفکر جبری تأکید می‌کند. او برای بیان تفاوت تفکر حسابی و تفکر جبری، بین «شمردن» و «نظارهٔ خود در حین شمارش» تفاوت قائل می‌شود. از نظر وی، برای انجام عمل شمارش به آگاهی نیاز است، اما برای مشاهدهٔ اینکه این

شمارش چگونه در حال انجام است، به سطح دیگری از آگاهی نیاز است: «آگاهی از آگاهی[45]». این آگاهی از آگاهی در جبرورزی مهم اســت. از نظر او حســاب با نتایج و به‌عبارت‌دیگر با پیدا کردن پاسخ مرتبط است اما جبر، توجه را از خود پاسخ به نحوهٔ رسیدن به پاسخ، و به‌عبارت‌دیگر، عملیات، ســوق می‌دهد. بنابراین حساب بدون ســاختارهای جبری که نحوهٔ انجام عملیات را گوشزد می‌کنند قابل‌انجام نیســت. به گفتهٔ هویت، تمام الگوریتم‌ها از یک ســاختار بهره می‌برند و این ســاختارها بر خاصیت‌های کلی بنا شــده‌اند. این خواص کلی، ســاختار جبری الگوریتم هستند که از طریق آگاهی از آگاهی به دســت آمده‌اند. اما هویت بیان می‌کند که معمولاً دانش‌آموزان دارای این آگاهی نیســتند. مثلاً الگوریتم ضرب ســتونی اعداد چندرقمی، بر آگاهی شــخص دیگری بنا شــده اســت و اغلب دانش‌آموزانی که از این الگوریتم اســتفاده می‌کنند، از این آگاهی برخوردار نیســتند. از نظر او وقتی دانش‌آموز از ساختار ریاضیِ یک الگوریتم آگاهی ندارد، تنها کاری که می‌تواند انجام دهد، به خاطر سپردن یک رویه است و این تکیه بر حافظه، احتمال فراموش کردن رویه را افزایش می‌دهد. اما اگر الگوریتم بر مبنای آگاهی دانش‌آموز ساخته شده باشد، دانش‌آموز پس از فراموش کردن آن می‌تواند الگوریتم را بازســازی کند. هویت تأکید می‌کند که دانش‌آموزان می‌توانند الگوریتم‌هایی را بر مبنای آگاهی خودشان تولید کنند و وظیفهٔ معلم این است که با طراحی فعالیت‌های ساختاریافته، فضایی را فراهم آورد تا دانش‌آموزان بتوانند الگوریتم‌های خود را تولید کرده و تشویق شوند تا آن‌ها را هرچه کارآمدتر کنند.

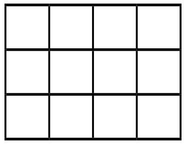
در همین راســتا کاراهر و همکاران (۲۰۰۶) ابراز می‌دارند که برخی از مشکلات دانش‌آموزان در جبر، به خاطر از دست‌دادن فرصت‌هایی است که آن‌ها در پایه‌های پایین‌تر برای شروع آموزش جبر داشــته‌اند. این پژوهشــگران ادعا می‌کنند که حساب در واقع یک ماهیت جبری دارد و معنای جبریِ حســاب، جزئی جدانشــدنی از حساب و یک باید اســت؛ نه یک چیز تزئینی و اضافه. شورای ملی معلمان ریاضی امریکا و کانادا (۲۰۰۰) نیز در استاندارد جبر برای پایه‌های پیش‌دبستانی تا دوم دبستان بیــان می‌کند که کودکان در این پایه‌ها باید بتوانند قوانیــن و خواص کلی عملیات مثل جابه‌جایی را با اســتفاده از اعداد خاص بیان کنند. در پایه‌های ســوم تا پنجم دبســتان نیز آن‌ها باید خواصی مثل جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری را تشخیص داده و در محاسبات با اعداد صحیح به کار برند.

با توجه به تأکید ادبیات این حوزه بر جبر به‌عنوان آگاهی از روش‌های حساب، پرداختن به تعمیم قوانین حســاب که مبنای بسیاری از الگوریتم‌های اعمال حســابی هستند، به‌عنوان یکی از بسترهای مناسب جبرورزی در دورهٔ ابتدایی پیشنهاد می‌شود.

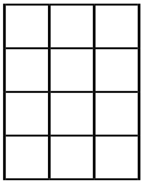
بااین‌وجود ذکر این نکته ضروری است که همسو با تعبیر کی‌یِرن (۲۰۰۴) از جبر ابتدایی، رویکرد کنونی به جبر ابتدایی نمادها را با تأمل بیشتری نسبت به برنامهٔ درسی سنتی وارد می‌کند (مثلاً باستابل و شیفتر[46]، ۲۰۰۸ را ببینید). به‌این‌ترتیب مثلاً بیان خاصیت جابه‌جایی ضرب به شکل $a \times b = a \times b$ از

اهداف جبرورزی در دورهٔ ابتدایی نیست، بلکه کشف و بیان شفاهی چنین تعمیم‌هایی مدنظر است؛ تعمیم‌هایی که بعدها می‌توانند به با زبان جبری بیان شوند اما حالا با هر وسیلهٔ ارتباطی ممکن برای کودکان بیان می‌شوند. بنابراین بیان شفاهیِ «وقتی جای دو عدد را عوض کنیم حاصل‌ضربشان تغییر نمی‌کند» و توجیه آن برابری با استفاده از نمونه‌هایی مانند آرایش مستطیلی زیر به دور از نمادهای رسمی می‌تواند در دورهٔ ابتدایی جبرورزی تلقی شود.

٣ × ٤



٤ × ٣



با توجه به تأکید کتاب‌های ریاضی دبستان بر اعمال حسابی، موقعیت‌های مناسب برای تعمیم قوانین حساب به‌وفور در کتاب‌ها دیده می‌شود. یکی از موقعیت‌های غنی برای تعمیم قوانین حساب، الگوریتم‌های مختلف استاندارد و یا ابداعی توسط دانش‌آموزان برای انجام محاسبات است. الگوریتم ضرب اعداد چندرقمی یکی از این موارد است. مبنای الگوریتم رایج برای ضرب اعداد چندرقمی، خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع است که در کتاب‌ها به آن اشاره شده است.

کار در کلاس: ۱. مانند نمونه‌ها حاصل ضرب به‌دست آورید.

۳۵	۴۲	۴۱	۲۳
۷×	۳×	۵×	۳×
		۵×۴۰	۳×۲۰
		۲۰۰	۶۰
		۵×۱	۳×۳
+	+	۵+	۹+
		۲۰۵	۶۹

(کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ١٤٣)

کتاب چهارم دبستان نیز همین قانون را برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب ١٦ × ١٢ به چند شکل مختلف بیان کرده است.

راه حل امیر: یک سال ۱۲ ماه است، پس باید ۱۲ را در ۱۶ ضرب کنیم

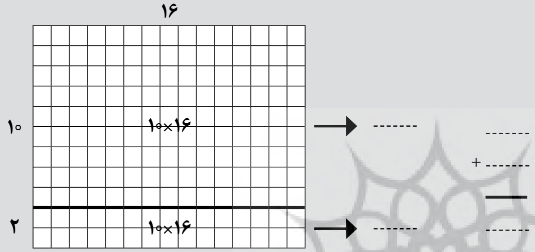
۱۲×۱۶ =(۱۰+۲) ×۱۶ ‏ ‏ ‏ ۱۰×۱۶ =۱۶۰ ‏ ‏ ‏ ۱۶۰

۲×۱۶ =۳۲ ‏ ‏ ‏ ۳۲+

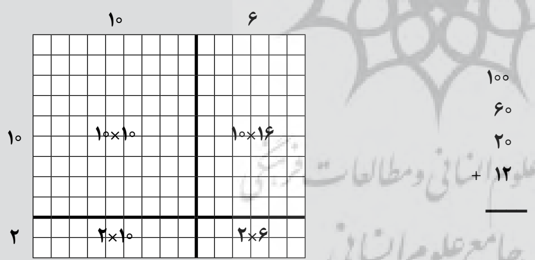
‏ ــــ

۱۹۲

راه حل بهمن: من حاصل‌ضرب را به کمک شکل پیدا می‌کنم.



راه حل آرش: من هم جواب را با شکل پیدا می‌کنم اما شکل من کمی فرق دارد.



راه حل وحید: تفاوتی ندارد که ۱۲ را به صورت (۲+۱۰) بنویسیم و در ۱۶ ضرب کنیم و یا ۱۶ را به‌صورت (۶+۱۰) بنویسیم و در ۱۲ ضرب کنیم.

۱۶

×۱۶ ‏ ‏ (۱۰ + ۶)

ــــ

۱۲۰ ‏ ‏ (۱۰ × ۱۲)

+ ‏ ‏ (۱۰ × ۱۲)

ــــ

(کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ۴۹)

هرچند مثال‌های بیان‌شـــده از کتاب درسی نشان می‌دهد که در توجیه الگوریتم محاسبهٔ ضرب اعداد چندرقمی از قانون شرکت‌پذیری ضرب نسبت به جمع بهره گرفته شده، اما خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، در جبر نمادین و در هم‌ارزی‌های جبری در پایه‌های بالاتر تحصیلی، کاربرد فراوان خواهد داشت. بنابراین شایسته است کتاب‌های دورهٔ ابتدایی به این قانون در کنار قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری با تأمل بیشتری پرداخته و موقعیت‌های متنوع بیشتری را برای تجربهٔ این قوانین فراهم سازند.

در برخی الگوریتم‌ها در کتاب درسی قوانین مورد استفاده به‌صراحت بیان نشده‌اند اما می‌توانند زمینهٔ خوبی را برای جبرورزی در کلاس درس فراهم آورند. مثلاً در محاسبهٔ ٦ + ٨ دانش‌آموزان ممکن است از الگوریتم‌های مختلفی اســتفاده کنند که هر یک به نوعی تعمیم‌پذیر به دامنهٔ وســیع‌تری از اعداد باشد. دانش‌آموز می‌تواند با تبدیل عدد ٦ به‌صورت ٤ + ٢، مجموع را به شکل ١٤ = ٤ + ١٠ = ٤ + ٢ + ٨ = ٦ + ٨ محاسبه کند. بیان قانون حسابی به‌کاررفته در این روش به زبان جبری، کار ساده‌ای نیست؛ اما دانش‌آموزان می‌توانند آن را به‌طور شفاهی بیان کرده و راجع به چرایی آن حرف بزنند.

علاوه بر این، مســائل محدودی در کتاب نیز وجود دارند که می‌توانند زمینهٔ یک تعمیم جبری را در کلاس درس فراهم کنند. «عددی را به ۵ اضافه می‌کنیم و از حاصل ۵ تا کم می‌کنیم. چه عددی به دست می‌آید؟ چرا؟» (کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ٦٢) این در حالی است که کتاب‌های ریاضی در برخی مســائل فقط با بیان یک مثال از دانش‌آموزان خواسته‌اند به یک تعمیم برسند. مثلاً کتاب ریاضی چهارم دبستان از دانش‌آموزان انتظار دارد با بررسی یک مثال، خاصیت جابه‌جایی ضرب اعداد سه‌رقمی را نتیجه بگیرند.

٦. حاصل ضرب‌های روبه‌رو را به‌دســت آورید و جواب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟	$\begin{array}{r} ۵۰۲ \\ \times ۳۷۵ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} ۳۷۵ \\ \times ۵۰۲ \\ \hline \end{array}$
(کتاب ریاضی سوم دبستان، ص. ۵۵)		

این‌چنین موقعیت‌هایی قابلیت تبدیل به زمینه‌ای برای جبرورزی را دارند؛ هرچند که کتاب به‌خوبی به آن‌ها نپرداخته است.

در مجموع، بررسی کتاب‌های دورهٔ ابتدایی نشان داد که از قوانین حساب در توسعهٔ الگوریتم‌ها بهره گرفته شده، بااین‌وجود همان‌طور که با ارائهٔ چند مثال از کتاب‌های درسی بیان شد، این نگاه جبری به حســاب از قابلیت توسعه برخوردار است. همچنین در پایه‌های پایین‌تر، استفاده از بیان غیرنمادین این قوانین می‌تواند راهی به‌سوی توسعهٔ نگاه جبری به حساب بگشاید.

سخن آخر

همان‌طور که بلانتون و همکاران[47] (۲۰۰۷) بیان می‌کنند، جبر ابتدایی نه یک بسته‌بندی جدید برای همان مهارت‌ها و رویه‌های جبری دورۀ راهنمایی برای دورۀ ابتدایی است و نه یک ضمیمه به برنامۀ درسی موجود. به اعتقاد آن‌ها جبر ابتدایی نباید به‌عنوان مجموعه‌ای از فعالیت‌های جداگانه دیده شود که معلم‌ها می‌توانند آن را پس از تسلط دانش‌آموزان بر مهارت‌ها و رویه‌های حسابی استفاده کنند. برعکس، جبر ابتدایی یک روش برای تفکر است که با تعمیق در مفاهیمی که تاکنون آموخته شده‌اند به درک ریاضی دانش‌آموزان، عمق، معنا و همگرایی می‌بخشد و به‌این‌ترتیب فرصت تعمیم روابط و خاصیت‌ها را در ریاضی فراهم می‌آورد.

با توجه نقش محوری کتاب درسی در نظام آموزشی متمرکز ایران و به‌ویژه تکیۀ معلمان دورۀ ابتدایی به محتوای کتاب‌ها، کتاب‌های ریاضی دورۀ ابتدایی می‌توانند نقش مهمی در توسعۀ جبرورزی ایفا کنند، بااین‌حال همان‌طور که تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دورۀ ابتدایی ایران نشان داد، این کتاب‌ها با چنین نگاهی به جبر ابتدایی تألیف نشده‌اند، در حالی‌که فرصت‌های بالقوۀ فراوانی برای جبرورزی در دورۀ ابتدایی وجود دارد. بسترهای معرفی‌شده در این مقاله می‌تواند چارچوبی را برای بازنگری یا بازتألیف کتاب‌های ریاضی دورۀ ابتدایی با رویکرد جبری فراهم آورد. این مقاله نیز با استفاده از چارچوب پیشنهادی، طی چند مثال به پیشنهادهایی در این زمینه پرداخت.

علاوه بر محتوای کتاب‌های درسی باید بر نقش معلم در پرورش تفکر جبری دانش‌آموزان تأکید نمود. پرورش دانش‌آموزانی که تفکر جبری را به ریاضیات خود پیوند می‌دهند نیازمند معلمانی است که خود «چشم و گوش جبریِ باز» (بلانتون و کاپوت[48]، ۲۰۰۳) داشته باشند. چنین معلمانی می‌توانند از موقعیت‌های بالقوۀ موجود در کتاب‌های درسی به نفع کسب تجارب جبری توسط دانش‌آموزان بهره ببرند.

منابع

■ استیسی، کی و اصغری، امیرحسین. (۱۳۸۸). گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری. *رشد آموزش ریاضی،* ۲٦ (۳). ٤-۱۱.

■ انگلیش، لین و وارن، الیزابت. ترجمهٔ غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۷۷). معرفی مفهوم متغیر از طریق الگویابی. *رشد آموزش ریاضی،* ۱٤(۳)، ٥٤-٦٠.

■ باردن، لورنس. (۱۳۷٤). *تحلیل محتوا* (ترجمهٔ محمد یمنی‌دوزی سرخابی و ملیحه آشتیانی). تهران: دانشگاه شهید بهشتی. (اثر اصلی در سال ۱۹۹٦ چاپ شده است).

■ حاجیان، فردوس و داودی، خسرو و رستگار، آرش و عالمیان، وحید. (چاپ ۱۳۹۲). *ریاضی سوم دبستان.* تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

■ داودی، خسرو و رستگار، آرش و عالمیان، وحید. (چاپ ۱۳۹۰). *ریاضی اول دبستان.* تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

■ داودی، خسرو و رستگار، آرش و عالمیان، وحید. (چاپ ۱۳۹۳). *ریاضی دوم دبستان.* تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

■ داودی، خسرو و رستگار، آرش و ریحانی، ابراهیم و صفاری آذر، شفیقه و عالمیان، وحید. (چاپ ۱۳۹۳). *ریاضی چهارم دبستان.* تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

■ شورای عالی آموزش‌وپرورش. (۱۳۹۱). *برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران.* تهران: وزارت آموزش‌وپرورش.

■ Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 165-184). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

■ Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

■ Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* . Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

■ Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-11). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

■ Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. In V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a Technological Future* (pp. 7-14). Washington, DC: Mathematical Association of America.

■ Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebraic eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10*(2), 70-77.

■ Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early Algebraization: A global Dialogue from Multiple Perspectives*. New York, NY: Springer.

■ Carraher, D., Schliemann, A. D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

■ Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

- Carpenter, T. P., Levi, L., & Farnsworth, V. (2000). *Building a foundation for learning algebra in the elementary grades*. In Brief: Vol.1, No. 2. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Retrieved from http://ncisla.wceruw.org/publications/briefs/fall2000.pdf.
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Ed.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215-238). London, New York: Springer.
- French, D. (2002). *Teaching and Learning Algebra*. London: continuum.
- Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In N. Bednarz, C. Kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 225-236). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The Algebra Initiative Colloquium* (pp. 33-52). Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Aalgebra?What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the Early Grades*. New York, NY: Routledge.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.
- Kieran, C. (2014 a). *What does research tell us about fostering algebraic thinking in arithmetic*? Retrieved from http:// www.nctm.org .
- Kieran, C. (2014 b). *What does research tell us about fostering algebraic reasoning in school algebra?* Retrieved from http:// www.nctm.org .
- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study*. (pp. 47-70). Boston: Kluwer.
- MacGregor, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 313-328). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Molina, M., & Ambrose, R. (2006). What is that Equal Sign Doing in the Middle? Fostering Relational Thinking While Negotiating the Meaning of the Equal Sign. *Teaching Children Mathematics, 13*(2), 111-117.
- Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*(1), 61-80.
- Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early*

algebraization: A global gialogue from multiple perspectives (pp. 277-301). London, New York: Springer.

- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of patter and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Papic, M., & Mulligan, J. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics; Essential Research, Essential Practice: Proceedings of the 30th annual conference of the mathematics education group of Australasia* (pp. 591-600). MERGA Inc.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai, & E. Knuth, Early (Eds.) *algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). London, New York: Springer.
- Reed, S. K. (1999). *Word Problems: Research and Curriculum Reform*. Mahwah, New Jersey: LEA.
- Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics: Psychological and Pedagogical Considerations*. New York: Springer.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: results of a three-year study. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323-366). London, New York: Springer.
- Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43-69). London, New York: Springer.
- Smith III, J. P., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stacey, K., MacGregor, M. (2002). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 141-153). New York: Kluwer.
- Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: the impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*, 173-182.
- Vinner, H. B. (2002). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 177-189). New York: Kluwer.
- Warren, E., & Cooper, D. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185.
- Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. In N. Bednarz, C. Kieren, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 317-325). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

پی‌نوشت‌ها

1. Kaput
2. Kieran
3. French
4. MacGregor
5.Radford
6. Algebra for All
7. Early Algebra
8. Lins & Kaput
9. Carpenter, Levi & Farnsworth
10. Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest
11. Papic & Mulligan
12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
13. Carraher, Schliemann & Schwartz
14. Russell, Schifter & Bastable

۱۵. در زمان نگارش این مقاله، کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا چهارم دبستان طی چهار سال اخیر تألیف شده است. کتاب پنجم دبستان در دست تألیف است و نسخهٔ قابل استنادی از آن موجود نیست.

16. Bednarz, Kieran & Lee
17. Stacey, Chick & Kendal
18. Kaput, Carraher & Blanton
19. Cai & Knuth
20. Janvier
21. Smith & Thompson
22. Bednarz & Janvier
23. Reed
24. Hewitt
25. Wheeler
26. Ellis
27. Rivera
28. Mulligan & Mitchelmore
29. Warren & Cooper
30. Moss & McNab
31. commonality
32. Rivera & Becker
33. Stephens etal
34. Operational
35. Do something
36. Relational-computational
37. Relational-structural
38. Molina & Ambrose
39. Stacey & MacGregor
40. Usiskin
41. Vinner
42. Mason
43. Gattegno
44. Hewitt
45. awareness of awareness
46. Bastable & Schifter
47. Blanton et al.
48. Blanton & Kaput