فصلنامه علمی مطالعات مدیریت صنعتی – سال هفدهم، شماره ۵۳، تابستان ۹۸
صفحات ۱۰۸-۸۱

مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ

پری‌سیما پاکروان *، جواد بهنامیان **

تاریخ دریافت:۹۵/۲/۲
تاریخ پذیرش:۹۷/۸/۹

چکیده

از یک دیدگاه کلی می‌توان مسایل مکان‌یابی را در دو دسته‌ی مکان‌یابی تسهیلات مطلوب و تسهیلات نامطلوب بررسی نمود. در مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب بر خلاف تسهیلات مطلوب، سعی می‌شود که تا حد امکان، تسهیلات دور از مراکز جمعیتی استقرار یابند. در این مقاله در مورد مسأله‌ی مکان‌یابی این قبیل تسهیلات بحث شده است. این تحقیق با تمرکز بر اصطلاح "نه در حیاط خلوت من" می‌باشد که اشاره به پدیده‌های اجتماعی دارد که در آن ساکنان با مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب اطراف خانه‌هایشان مخالف هستند. نمونه‌هایی از این تسهیلات شامل خطوط انتقال برق و مراکز بازیافت است. با توجه به مخالفتی که معمولاً در ساخت یک تسهیل نامطلوب مواجه می‌شود، برنامه‌ریز تسهیل باید ماهیت پدیده‌ی "نه در حیات خلوت من" را درک کرده و به عنوان یک عامل کلیدی در تعیین مکان تسهیل در نظر بگیرد. این مسأله در فضای گسسته در نظر گرفته شده است. مدع‌ل ریاضی مسأله و روش آزادسازی لاگرانژ ارایه شده است. این روش محدودیت-های سخت را آزاد می‌کند و با یک ضریب لاگرانژ به تابع هدف اضافه می‌کند. برای نشان دادن اینکه روش آزادسازی لاگرانژ الگوریتم محاسباتی قوی و دقیق است و قادر به حل مسایل تا سایز متوسط است، عملکرد الگوریتم ارایه شده با اجرا بر روی چندین مسأله، بررسی شده است.

واژگان کلیدی: مکان‌یابی، تسهیلات نامطلوب، آزادسازی لاگرانژ

* کارشناسی ارشد گروه مهندسی صنایع دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان
** دانشیار گروه مهندسی صنایع دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان ؛(نویسنده مسئول)
Behnamian@basu.ac.ir

مقدمه

بسیاری از تسهیلات مانند ایستگاه‌های اتوبوس یا مترو که آسایش و راحتی انسان‌ها را بهبود می‌دهند، نمونه‌هایی از تسهیلات مطلوب به حساب می‌آیند، مردم از قرار گرفتن این تسهیلات در همسایگی محل زندگی خود به دلیل راحتی در حمل و نقل استقبال می‌کنند. به طور مشابه، کتابخانه‌ها و بیمارستان‌های عمومی به این دلیل که سودمند هستند، توسط مردم در همسایگی محل زندگی‌شان پذیرش می‌شوند. در حالی که در مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب بر خلاف تسهیلات مطلوب، سعی می‌شود که تا حد امکان، تسهیلات دور از مناطق دریافت‌کننده‌ی خدمت استقرار یابند. تسهیلات نامطلوب درعین حال که ارایه‌ی خدمات ضروری برای مردم هستند، درهمان زمان، این تسهیلات ممکن است پیامدهای منفی برای مکان‌های همسایگی آن‌ها داشته باشد. بنابراین ساختن یا گسترش چنین تسهیلاتی با مخالفت شدید ساکنان این مناطق مواجه می‌شود. این مخالفت معمولاً پدیده‌ی "نه در حیاط خلوت من"[1] نامیده می‌شود. بنابراین هنگام ایجاد یک تسهیل نامطلوب، تصمیم‌گیرندگان ممکن است با مخالفت شدید ساکنان در همسایگی مواجه شوند. نزدیک بودن تسهیلات نامطلوب به مناطق مسکونی به دلیل آلایندگی زیاد و خطرناک بودن آن‌ها، موجب پایین آمدن کیفیت زندگی در این مناطق و افزایش خطر سلامتی برای ساکنان این مناطق می‌گردد.

راکتورهای هسته‌ای، صنایع نظامی و کارخانجات شیمیایی مثال‌هایی از این دسته هستند. نشست مواد رادیواکتیو از نیروگاه‌های هسته‌ای نیز از مواردی است که خطر بسیار زیادی را برای افراد ساکن در همسایگی نیروگاه‌های هسته‌ای به همراه دارد. به منظور این‌که اثرات نامطلوب تسهیل جدید برروی امکانات موجود حداقل شود این نوع از مسأله فرموله می‌شود. در این مقاله برای اولین بار مدلی برای مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارایه شده و روش آزادسازی لاگرانژ جهت حل این مسأله مورد استفاده قرار گرفته است [۴].

در ادامه مقاله ابتدا در بخش دوم پیشینه‌ی مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب آورده شده است. در بخش سوم یک مدل ریاضی ارائه شده است. دربخش چهارم و پنجم نیز روش آزادسازی لاگرانژ را معرفی شده و در ادامه لاگرانژ دوگان و الگوریتم زیرگرادیان برای بدست آوردن بهترین ضریب جریمه‌ی محدودیت آزاد شده برای بدست آوردن بهترین کران پایین (بالا) برای مسأله‌ی کمینه-سازی(بیشینه سازی) ارایه شده است. در بخش ششم این روش برای حل مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات

1. Not In My Backyard

نامطلوب بکار گرفته و سعی در یافتن بهترین ضریب جریمه برای محدودیت آزادشده برای داشتن بهترین کران پایین برای این مدل انجام شده است. در نهایت نتیجه گیری از کاربرد این روش در حل مسأله و تحقیقات آتی آمده است.

پیشینه‌ی موضوع

ملاچرینودیس[۱] [۱] مقاله‌ای تحت عنوان تعیین مکان بهینه‌ی تسهیلات نامطلوب در یک محیط کاری ارایه داد. این مقاله مشکل مکان‌یابی قسمتی از تسهیلات نامطلوب و اما ضروری در یک محیط کاری را بررسی می‌کند و یک مدل غیرخطی برای این مسأله ارایه داد. مهرز[۲] و همکاران [۲] برای مدل خود یک تابع هدف وزین را در نظر گرفته‌اند که در آن با در نظر گرفتن فواصل به‌صورت بلوکی هر دو معیار ماکس- مین و مین- ماکس با هم ترکیب می‌شوند. آن‌ها مدل خود را به صورت چند معیاره حل نموده‌اند. این مدل در اصل برای مکان‌یابی یک تسهیل جدید در بین تسهیلات موجود نوشته شده است. برمن و درزنر[۳] [۳] مسأله‌ی مسیریابی و مکان‌یابی جهت دفع مواد زائد را بر روی شبکه بررسی کردند. هدف اول آن‌ها شامل یافتن مسیر بر روی شبکه و بین هر دو گره به نحوی است که میزان مخاطره و زیان ایجاد شده بر روی آن حداقل گردد. هدف دوم شامل یافتن مکانی بر روی شبکه است که مخاطره و زیان کمینه گردد. ارکت و نیومن[۴] [۸] بیان کردند که بسیاری از مدل‌های مکان‌یابی تنها فاصله به تسهیلات جدید را حداقل می‌کنند که معمولاً برای تسهیلات خدمت‌دهی مدل صحیحی است. اما هنگامی که کسی می‌خواهد یک تسهیل مضر را مکان‌یابی کند، مانند محلی برای انباشتن زباله‌ها یا ایجاد یک کارخانه شیمیایی یا یک نیروگاه هسته‌ای، ممکن است تابع هدف کمینه کردن فاصله‌ها صحیح نباشد.

کلبروک[۵] و همکاران [۷] مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب را بر روی شبکه در نظر گرفتند و یک حد بالای جدید برای مسأله ارایه کردند. به همین ترتیب یک الگوریتم در زمان چندجمله‌ای با تابع هدف غیرخطی برای مسأله در فضای پیوسته ارایه دادند. موسوی[۶] و همکاران [۴] یک مدل

1. Melachrinoudis
2. Mehrez
3. Berman & Drezner
4. Erkut & Neuman
5. Colebrook
6. Mousavi

چندهدفه‌ی فازی برای مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب در نظرگرفتند. آنها مقدار ماده‌ی مخاطره آمیز تولیدشده توسط تسهیل نامطلوب و میزان خطر ناشی از پوشش مکان j توسط مکان i را عددفازی فرض کردند. سانگ[1] و همکاران [۵] فن‌آوری تخصیص و محل کارآمد برای تسهیلات نامطلوب با توجه به خواص اساسی خود ارایه دادند. آنها سه تابع هدف مقعر، محدب و خطی با موضوع کمینه کردن درجه‌ی آلودگی در محیط گسسته ارایه دادند و مدل خود رابا استفاده از الگوریتم ژنتیک حل کردند. وایت و راتیک[2][۱۰] یک مدل چندهدفه برای مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب ایجاد کردند. در این تحقیق اولین تابع هدف مسئله حداقل‌سازی هزینه و دومین تابع هدف حداقل‌سازی میزان مخالف برای ساخت تسهیل است. راکاس و همکاران[3] [۱۷] یک مدل چندهدفه برای مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب ارایه دادند، که هدف اول آن‌ها کمینه کردن هزینه‌ی استقرار تسهیلات و هدف دوم میزان مخالفت سیاسی را حداقل می‌کند.

ملاچرینودیس و کولینین[4] [۱۴] مروری بر چند مثال داشتند که در آن پس از تحلیل مکان‌ها، هدف تعیین مکان تسهیلات زیان‌آور بود. یک تسهیل زیان‌آور می‌تواند به عنوان تسهیلی تعریف شود که در بین تسهیلات موجود اثرات نامطلوبی دارد. مثالهایی از آن می‌تواند شامل تسهیلاتی که باعث آلودگی می‌شوند به صورت ذره، سرو صدا، تشعشع باشد و یا انبارهای کالایی که شامل مواد قابل اشتعال هستند. سایر تسهیلات زیان‌آور شامل ماشین‌هایی است که منبع‌های پتانسیل خطرناک برای ماشین‌ها و کارگرهای اطراف خود دارند. آن‌ها تعامل بین تسهیل زیان‌آور و هر تسهیل موجود با یک عامل وزنی منعکس کردند. ارکت و نیومن [۸] بیان کردند بسیاری ازمدل‌های مکان‌یابی، فاصله‌ها بین تسهیلات را حداقل می‌کنند. این رویکرد وقتی مناسب است که تسهیلات خدمت دهنده مکان‌یابی شوند. با این حال، اگر یک تسهیل زیان آور، مانند محل دفع زباله، یک کارخانه‌شیمیایی یا یک راکتور هسته‌ای، بخواهد مکان‌یابی شود معیار نزدیکی نامطلوب است. در چنین مثال‌هایی، یک مدل که برخی تابع فاصله‌ها را حداکثر می‌کند ممکن است مناسب‌تر باشد. آن‌ها در مقاله‌ی خود مدل‌های مکان‌یابی بیشینه‌سازی را در ادبیات تحقیق در عملیات بررسی کردند. در این بررسی تابع هدف‌های مدل‌های آن‌ها شامل فاصله‌ها بود. به‌طور کلی تعدادی از مشکلات حل نشده را مورد بحث قرار دادند

1. Song
2. Ratick And White
3. Rakas
4. Melachrinoudis & Cullinan

و جهت‌هایی را برای مطالعات آینده در این حوزه معرفی کردند. ملاچرینودیس و زاهاریس [1] [۱۵] در مقاله‌ی خود مسأله‌ی تعیین کردن مکان تسهیل جدید که تقاضای نقاط مشخص را پوشش می‌دهد را در یک ناحیه‌ی کراندار بررسی کردند. بدین منظور برنامه‌ریز تسهیلات دو هدف دارد، اول اینکه، آن‌ها تلاش کردند که اثرات نامطلوب تسهیل جدید را با به حداکثر رساندن حداقل فاصله‌ی اقلیدسی با توجه به تمام نقاط تقاضا، حداقل کنند. دوم اینکه، آن‌ها می‌خواستند هزینه‌ی حمل و نقل از تسهیل جدید به نقاط تقاضا را حداقل کنند. مثال‌های معمول برای چنین تسهیلات نیمه مطلوب، نیروگاه‌های برق هستند که به عنوان عامل‌های آلودگی نامطلوب هستند و باید به دور از نقاط تقاضا قرار بگیرند، در حالی که ملاحظات هزینه به برنامه ریزان اجبار می‌کند که تسهیل را در نزدیکی متقاضیان قرار دهند. آن‌ها مجموعه‌ای از راه‌حل‌های موثر برای این مسأله‌ی دو معیاره توصیف کردند و یک الگوریتم موثر برای راه حلشان فراهم کردند. بریمبرگ و جویل [2] [۱۱] در مقاله‌ی خود یک مدل دو معیاره برای مکان‌یابی تسهیلات نیمه مطلوب بر روی یک سطح صاف در نظر گرفتند. یک معیار کمینه کردن مجموع وزنی فاصله‌ها بین تسهیل و متقاضیان بود، معیار دیگر حداکثر کردن فاصله اقلیدسی وزنی از تسهیل به نزدیک‌ترین متقاضی بود.

ملاچرینودیس و کولینین [۱۳] در مقاله‌ی خود اثرات تسهیل نامطلوب را با توجه به تسهیلات موجود در نظر گرفتند تا بتوانند تابعی از فاصله‌ی بین آن‌ها را کاهش دهند. آن‌ها گفتند که یک معیار مناسب برای مکان یک تسهیل نامطلوب، کمینه کردن بدترین اثرات آن بر روی تسهیلات موجود یا بیشینه کردن کمترین فاصله بین تسهیل نامطلوب جدید و تسهیلات موجود است. مدل توسعه داده شده در مقاله‌ی آن‌ها، یک روش برای توصیف دقیق مسأله‌ی مکان‌یابی یک تسهیل نامطلوب جدید میان تسهیلات موجود فراهم می‌کند. مطلوب‌ترین ویژگی این مدل این است که تسهیلات موجود یک ناحیه اطراف خود دارند که تسهیل جدید اجازه‌ی قرار گرفتن در آن ناحیه را ندارد. کاریزوسا و پلاستریا [3] [۱۲] بیان کردند که مدل‌های مکان‌یابی تسهیلات در ادبیات معمولاً تسهیلی را در نظر می‌گیرند که بیشتر مورد توجه است، سپس به دنبال این هستند که در مکان‌های تسهیلات، هزینه‌های کلی حمل و نقل را حداقل کنند، سپس به دنبال این هستند که برخی هزینه‌های اجتماعی مانند اثرات زیست محیطی را کاهش دهند. هنگامی که تسهیلاتی که اگرچه لازم برای جامعه هستند، اثرات منفی

1. Zaharias
2. Brimberg & Juel
3. Carrizosa & Plastria

بر روی جمعیت نیز دارند و یا باعث آلودگی محیط زیست، سروصدا، خطرات ناگوار و غیره می‌شوند. این دو جنبه‌ی متضاد باید به طور همزمان باهم محاسبه شود. این موضوع منجر می‌شود مدل‌های ریاضی واقعی‌تر باشند، اما معمولا از لحاظ محاسباتی راحت‌تر هستند. آن‌ها در این مقاله یک بررسی انتقادی بر روش‌های ریاضی معمول استفاده‌شده در این زمینه آماده کردند. فرانک و بلگیوم[1] [۱۶] بیان کردند که به طور سنتی در اکثر مدل‌ها در تیوری مکان‌یابی، موقعیت‌هایی که نزدیک به تسهیل است، ارزشمند هستند. با این حال، انواع بسیاری از تسهیلات نوعی اثر نامطلوب روی محیط زیست دارند. آن‌ها در این مقاله یک بررسی انتقادی از پژوهش در مکان‌یابی تسهیلات نیمه مطلوب در فضای پیوسته ارایه دادند.

در جدول (۱) جمع‌بندی پژوهش‌های انجام شده ارائه شده است.

جدول ۱. جایگاه تحقیق موجود

نویسنده	سال انتشار	روش حل	فازی	تک‌هدفه	چندهدفه	توضیحات
ملاچرینودیس	۱۹۸۴	روش هندسی /کوهن تاکر/ الگوریتم دقیق		✓		فضای پیوسته
مهرز و همکاران	۱۹۸۵	جندمعیاره	–	✓		–
ملاچرینودیس و کولینین	۱۹۸۶	الگوریتم ابتکاری		✓		فضای پیوسته
وایت و راتیک	۱۹۸۸	–	–		✓	–
ارکوت و نیومان	۱۹۸۹	الگوریتم ابتکاری		✓		فضای پیوسته
استیفن فاربر	۱۹۹۸	بررسی اثرات جانبی	–	–	–	–
بریمبرگ و جویل	۱۹۹۸	الگوریتم ابتکاری	–	✓		تابع هدف غیرخطی، دومعیاره
پلاستریا و کاریزوسا	۱۹۹۹	الگوریتم در زمان چند جمله‌ای با پیچیدگی کم		✓	✓	فضای پیوسته
مونوز پرز و رودریگوییز	۱۹۹۹	راه حل بهینه در زمان چند جمله‌ای		✓		فضای پیوسته

1. Belgium

برمن و درزنر	۲۰۰۰	شبکه	–		✓	–
فرناندز و همکاران	۲۰۰۰	شاخه و کران/ آنالیز فاصله‌ای/ الگوریتم ابتکاری/ مطالعه‌ی تجربی				فضای پیوسته
متیو وهمکاران	۲۰۰۲	محاسبات هندسی	–	–	–	فضای پیوسته
ملاچرینودیس و زاهاریس	۲۰۰۳	الگوریتم ابتکاری			✓	تابع هدف غیر خطی، دومعیاره
راکاس و همکاران	۲۰۰۴	سیپلکس	✓		✓	گسسته
کلبروک و همکاران	۲۰۰۵	الگوریتم جدید در زمان چند جمله ای بر روی شبکه		✓		فضای پیوسته
جی سامنو رودریگویز و همکاران	۲۰۰۶	الگوریتم با زمان چندجمله ای		✓		فضای پیوسته
مارکوس و جوآکویین	۲۰۰۷	الگوریتم چند جمله ای		✓		فضای پیوسته
توزکایا و همکاران	۲۰۰۸	برنامه‌ریزی سلسله مراتبی	–	–		–
تقوی فرد و همکاران	۲۰۰۸		✓		✓	–
یاماگوچی	۲۰۱۱	چانه‌زنی	–	–		–
سانگ و همکاران	۲۰۱۳	الگوریتم ژنتیک		✓		فضای گسسته
تانگ و همکاران	۲۰۱۳	MCDM			✓	چندمعیاره
فرنکسکا و همکاران	۲۰۱۴	مجموعه رویکردمبتنی برتسلط			✓	–
تحقیق جاری	۲۰۱۷	روش آزادسازی لاگرانژ با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت	–	✓		فضای گسسته

تعریف مسأله و مدلبندی

مدل‌های مکان یابی ریاضی برای تسهیلات نا مطلوب برای پاسخ به سوالات کلیدی زیر طراحی شدند:

۱. چه تعداد تسهیلات بایستی مکان‌یابی شوند ؟
۲. ظرفیت هر تسهیل به چه میزانی باید باشد ؟
۳. تقاضا برای سرویس دهی تسهیلات، بایستی چگونه به تسهیلات تخصیص داده شود ؟

مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب که در این مقاله راجع به آن بحث شده است با توجه به مقاله ای که محوریت هدف را (نه در حیاط خلوت من)[1] قرار داده است، می‌باشد که اشاره به پدیده‌های اجتماعی دارد که در آن ساکنان با مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب اطراف خانه‌هایشان مخالف هستند. مثال‌هایی از این تسهیلات شامل خطوط انتقال برق و کوره و محل‌های دفع زباله می‌باشند که به طورمعمول ساخت این تاسیسات نامطلوب با مخالفت مواجه می‌شوند. با توجه به مخالفتی که در ساختن تسهیلات نامطلوب مواجه می‌شوند. برنامه‌ریز تسهیلات باید ماهیت پدیده NIMBY را درک کرده و آن را به عنوان یک عامل کلیدی در تعیین محل تسهیلات در نظر بگیرد. سپس ویژگی‌های پدیده NIMBY را بررسی کرده و مدل بهینه‌سازی ریاضی را با هدف به حداقل رساندن مجموع درجات پدیده پیشنهاد کند. دراین مطالعه، در مدلی که بررسی شده‌است، درجه‌ی پدیده‌ی NIMBY برای ساکنان میزبان تسهیلات به خاطر جذب مستقیم اثرات منفی برای هر فرد افزایش خواهد یافت، با این‌حال، اگر تسهیلات نامطلوب در هرمکان قرار گرفته و تنها تقاضای منطقه‌ی خودرا پوشش دهند، درجه‌ی پدیده‌ی NIMBY درمحل داده شده به نسبت کمترخواهد شد. هزینه‌ی پدیده‌ی NIMBY برای یک تسهیل تابعی ازتعداد کل گره‌هایی است که توسط تسهیل نامطلوب پوشش داده شده است. با استفاده از این بینش اولیه، مدل‌های ریاضی به صورت توابع خطی، محدب، مقعر برای نشان دادن هزینه‌ی پدیده‌ی NIMBY گسترش داده شده است، که دراین مقاله از تابع هدف خطی آن استفاده شده است [۵].

تشریح مسأله

در این تحقیق، یک مدل ریاضی بهینه‌سازی تک معیاره برای مکان‌یابی و تخصیص تسهیلات نامطلوب طرح شده است. پدیده‌ی NIMBY به‌طور مستقیم از طریق ساختار تابع هدف مطرح شده است. ساختار تابع هدف این اجازه را می‌دهد که از این حقیقت سخن گفته شود که ساکنان میزبان این تسهیلات کسانی هستند که هزینه‌های زیست محیطی را جذب می‌کنند، در حالی که سایر مناطق از مزایای این تسهیلات لذت می‌برند. درجه پدیده‌ی NIMBY برای ساکنان میزبان این تسهیلات، به دلیل جذب اثرات منفی به طور مستقیم بالا خواهد بود. هزینه‌ی پدیده‌ی NIMBY برای یک تسهیل تابعی از تعداد کل گره‌هایی است که توسط تسهیل نامطلوب پوشش داده شده است. با استفاده

1. Not In My Backyard (Nimby)

از این بینش اولیه، مدل‌های ریاضی به صورت توابع خطی، محدب، مقعر برای نشان دادن هزینه‌ی پدیده‌ی NIMBY گسترش داده شده است [۷۴]. در این تحقیق از تابع هدف خطی استفاده شده است. با توجه به اینکه میزان درجه‌آلودگی تسهیلات نامطلوب را در دنیای واقعی نمی‌توان بطور قطعی تعیین کرد و در مقالات گذشته و در واقعیت اطلاعاتی در ارتباط با میزان این درجه‌آلودگی وجود نداشت، میزان درجه‌آلودگی این تسهیلات به صورت اعداد تصادفی تعیین شدند.

با استفاده از این بینش اولیه، در این تحقیق مدل ریاضی با تابع خطی با مفروضات زیر توسعه داده شده است :

۱- هیچ گونه تسهیلات نامطلوب وجود نداشته و باید ایجاد شوند.
۲- هر گره تقاضا مقدار تقاضای خود و اطلاعات محلی دو بعدی خود را دارد.
۳- تمام گره‌های تقاضا برای مکان تسهیلات نامطلوب کاندید هستند.
۴- در هرگره‌ی تقاضا تنها یک تسهیل نامطلوب می‌تواند قرار بگیرد.
۵- تعداد کل تسهیلات از تعداد کل گره‌ها کوچک تر یا مساوی است.
۶- تسهیلات واقع در یک گره همه‌ی تقاضا برای آن گره را پوشش می‌دهند.
۷- برای هر گره تقاضا که به عنوان مکان برای تسهیل نامطلوب انتخاب می‌شود، یک درجه آلودگی اصلی برای پوشش دهی تقاضای خودش و همچنین یک درجه آلودگی حاشیه‌ای برای پوشش‌دهی گره اضافی توسط این تسهیل نامطلوب در نظر گرفته شده است.

نمادها

نمادها، متغیرها و پارامترهای استفاده شده در مدل ریاضی به صورت زیر است:

تعریف	نمادها، پارامترها و متغیرها
شاخص گره‌ها (گره‌ها در یک مثال خاص می‌تواند نقاط موجود در یک شهر باشد که سطل‌های زباله با توجه به مدل ریاضی ارایه‌شده در بهترین نقاط قرار داده می‌شود.)	i, j
تعداد کل گره‌ها	J
مجموعه درجات پدیده NIMBY توسط گره j زمانی که یک تسهیل نامطلوب در j	$N_j(y_j, x_{1j}, \dots, x_J$

تاسیس شده‌است و مکان‌های $x_{1j},\dots,x_{Jj}$ تحت پوشش تسهیل j هستند.

y_j	متغیر صفر و یک نشان دهنده تسهیل نامطلوب که در گره j قرار دارد، می‌باشد.
x_{ij}	متغیر صفر و یک نشان دهنده گره i تخصیص داده شده به تسهیل در گره j است.
a_j	درجه‌ی آلودگی اصلی از پدیده ی NIMBY در گره j هنگامی که تسهیل مکان داده شده در گره j تنها تقاضای گره j را پوشش می‌دهد.
b_j	درجه‌ی آلودگی حاشیه‌ای از روند خطی پدیده ی NIMBY در گره j هنگامی که گره اضافی توسط تسهیل نامطلوب واقع در j پوشش داده شود.
d_{ij}	فاصله اقلیدسی بین گره i و j
R	محدودیت حداکثر فاصله خدمت تسهیل نامطلوب که برای تمام تسهیلات یکسان فرض شده است.
K	ماکزیمم تعداد تسهیلات نامطلوب که می‌تواند تاسیس شود.
M	عدد غیرمنفی و بزرگ

مدل ریاضی مسأله

مدلی که برای موضوع مکان یابی تسهیلات نامطلوب دراین مقاله استفاده شده است بر اساس مدل زیر می‌باشد:

$$min\, Z = \sum_{j=1}^{J}\left(a_j y_j + b_j\left(\sum_{i=1}^{J} x_{ij} - y_j\right)\right) \qquad (۱)$$

$s.t.:$

$$\sum_{j=1}^{j} d_{ij}x_{ij} \le R \qquad \forall i \qquad (۱-۱)$$

$$\sum_{j=1}^{j} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \qquad (۲-۱)$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \le M y_j \qquad \forall j \qquad (۳-۱)$$

$$x_{jj} = y_j \qquad \forall j \qquad (۴-۱)$$

$$\sum_{j=1}^{j} y_j \leq K \qquad (۵-۱)$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \leq n_j \qquad (۶-۱)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \qquad (۷-۱)$$

(۱) : تابع هدف شامل دو بخش است، بخش اول مربوط به درجه‌آلودگی اصلی حاصل از تاسیس تسهیل نامطلوب است و بخش دوم مربوط به درجه‌آلودگی حاشیه‌ای حاصل از پوشش‌دهی گره- اضافی توسط تسهیل نامطلوب می‌باشد. درجه‌های آلودگی تابعی از تعداد گره‌های موجود می‌باشند..

ماهیت درجه‌آلودگی: بیوگاز تولیدی محل‌های دفن زباله شهری دارای اجزای آلی و درصد بالایی از گاز متان فرار بوده که باعث آسیب به لایه ازن می‌گردد. گازهای محل دفن از انجام مجموعه‌ای از واکنش‌های زیست شیمیایی بر روی مواد آلی تجزیه‌پذیر موجود در زباله در شرایط بی هوازی به دست می‌آید و این گازها شامل متان، دی‌اکسید کربن و گازهای هیدروژن، هیدروژن سولفاید، ترکیبات آلی فرار و غیره است. متان ۶۰-۵۰ درصد کل گاز محل دفن زباله را که در اثر تجزیه بی- هوازی پسماند تولید می‌شود را تشکیل می‌دهد. ۵۰-۴۰ درصد بقیه را عمدتا دی اکسید کربن و جزء اندکی را گازهای دیگر از جمله سولفید هیدروژن تشکیل می‌دهند ترکیبات آلی فرارگازهای محل دفن دارای اثرات سویی برسلامتی انسان‌ها هستند. این ترکیبات برای سلامتی انسان مضر است که بر روی مناطقی که در نزدیکی و یا در محل‌های دفن ساخته شده‌اند و یا برای مناطق مسکونی که با فاصله کمتر از ۱۰۰ متری از آن قرار دارند حایز اهمیت است. مدل ریاضی استفاده شده در این تحقیق برای یافتن مکان‌های بهینه‌ی سطل‌های زباله است، درجه‌آلودگی که در تابع هدف این مدل ریاضی در نظر گرفته شده است، نشان‌دهنده‌ی میزان گازهای متصاعد شده از زباله‌ها می‌باشد که به صورت برداری که شامل بازه‌ای از اعداد تصادفی است، تعریف می‌شوند و هر مکانی که به عنوان قرار گرفتن تسهیل نامطلوب انتخاب شود به ازای گره‌های اضافی که تحت پوشش خود قرار دهد شامل درجه- آلودگی حاشیه‌ای می‌شود که در نهایت در مکانی که تسهیل نامطلوب قرارگرفته است آلودگی بیشتری ایجاد می‌شود.

(۱-۱) : حداکثرمحدودیت شعاع خدمات را اعمال می‌کند.
(۱-۲) : هرگاه i تنها می‌تواند به یک تسهیل درگره j تخصیص داده شود اگر چنین تسهیلی وجود داشته باشد.
(۱-۳) : تضمین این است که محدودیت (۱-۴) مستلزم آن است که اگر یک تسهیل درگره‌ی j اختصاص یافته باشد ،گره‌ی j توسط آن تسهیل خدمت دهی می‌شود.
(۱-۵) : حداکثرتعداد تسهیلات نامطلوب که می‌تواند استقرار یابد را می‌گوید.
(۱-۶) : هر گره ای که به عنوان مکان تسهیل نامطلوب انتخاب شود ظرفیت محدودی دارد. به این دلیل که به عنوان مثال سطل زباله ای که در یک مکان قرار می‌گیرد قطعا ظرفیت خاصی برای پوشش دهی خواهد داشت. این فرض نوآوری این مدل می‌باشد و به مدل ریاضی اضافه شده است.
(۱-۷) : همه‌ی متغیرهای تصمیم تخصیص و مکان یابی به متغیرهای باینری محدود می‌شوند[۵].
لازم به ذکر است که پیچیدگی مسأله مورد بررسی به تعداد متغیرها و محدودیت‌ها، اندازه‌ی داده‌های ورودی، نوع ترکیب داده‌های مسأله و ... وابسته است و هر محدودیت و متغیری که به مسأله اضافه می‌شود فضای مسأله را به واقعیت نزدیک‌تر کرده و باعث پیچیدگی بیشتر مسأله و همچنین بالا بردن زمان حل مسأله می‌شود. برخی محدودیت‌ها در مسأله هستند که نبود آن‌ها مسأله را به فضای بی‌کران نزدیک می‌کند و حذف آنها ممکن است کران بسیار بالا یا پایینی برای مسأله ایجاد کند که در نهایت کران حاصل کاربردی برای نداشته باشد. در عین حال می‌توان با استفاده از برخی روشها همچون آزادسازی، برخی محدودیت‌ها را آزاد کرد تا حل مسأله ساده شده و موجبات ایجاد کرانی مناسب فراهم آید. شناخت این محدودیت‌ها در هر مسأله متفاوت بوده و راه شناخت محدودیت سخت می‌تواند تجربی باشد یا استفاده از مقالات انجام شده در گذشته و در واقع استفاده از تجربیات تحقیقات گذشته می‌باشد. در ادامه یکی از معروفترین این روشها با نام آزادسازی لاگرانژ جهت استفاده در این مقاله معرفی می‌گردد.

روش آزادسازی لاگرانژ

آزادسازی لاگرانژ یک تکنیک مناسب برای مسایلی است که در آن محدودیت‌ها به دو دسته تقسیم شده است:

- محدودیت‌های "خوب": محدودیت‌هایی که مسأله با آن‌ها به سادگی قابل حل است.

●محدودیت‌های "بد" : محدودیت‌هایی که مسأله را برای حل بسیارسخت می‌کند.

از روش آزادسازی لاگرانژ در مسایل زیادی برای بدست آوردن کران بهینه‌ی پایین (بالا) برای مسایل کمینه‌سازی و بیشینه‌سازی استفاده می‌شود، به این دلیل که معمولا کران بهتری نسبت به آزادسازی خطی، تولید می‌کند. می‌توان از کران بدست آمده از روش آزادسازی لاگرانژ برای روش شاخه و کران استفاده کرد که باعث کور شدن سریعتر شاخه‌ها و تسریع روش شاخه و کران می‌باشد. ایده اصلی برای آزادسازی مسأله حذف محدودیت‌های "بد" و قرار دادن آنها درتابع هدف، با وزن اختصاص داده شده (ضریب لاگرانژ) به آنها است. هر وزن نشان دهنده یک جریمه است که به راه حل اضافه شده است.

به این منظور مسأله‌ی عددصحیح زیر را درنظر بگیرید:

$$z = max\ c^T x \qquad (۲)$$

$$Ax\ \le b \qquad (۱-۲)$$

$$Dx\ \le d \qquad (۲-۲)$$

$$x\ \in\ z_+^n \qquad (۳-۲)$$

فرض کنید که محدودیت $Ax \le b$ خوب است، به این معنی که برنامه‌ریزی عددصحیح با تنها این محدودیت برای حل آسان است. بنابراین، اگر یکی از محدودیت‌های پیچیده‌ی $Dx \le d$، حذف شود نتیجه‌ی آزادسازی برای حل نسبت به مسأله‌ی اصلی آسان‌تر خواهد بود. بسیاری ازمسایل چنین دارای ساختاری هستند (برای مثال حذف محدودیت‌های اتصال در مسأله‌ی فروشنده دوره‌گرد). به هرحال، به این دلیل که بعضی از محدودیت‌های مهم به طور کلی نادیده گرفته می‌شود نتیجه‌ی کران بدست آمده از آزادسازی ممکن است ضعیف باشد. یک راه برای غلبه بر این سختی استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ است [۶].

مدل لاگرانژ دوگان

ایده‌ی اصلی نظریه‌ی دوگان لاگرانژ در این است که قیود مسأله به نوعی در تابع هدف وارد می‌شوند، واردکردن قیود مسأله درتابع هدف با وزن دهی به آن‌ها در تابع هدف امکان پذیر است. آزادسازی باید برای تعیین حدپایین (بالا) به صورت بهینه حل شود [۶]. برای درک بهتر مسأله‌ی دوگان لاگرانژ،

فرض می‌شود که مجموعه‌ی X خیلی بزرگ است اما شامل تعداد محدودی از نقاط $\{x_1 , \dots , x_T\}$ است. مسأله‌ی بیشینه‌سازی مدل۳را در نظر بگیرید:

$$z = max\ c^T x \qquad (۳)$$

$$Dx\ \leq d \qquad (۳-۱)$$

$$x\ \in X \qquad (۳-۲)$$

آزادسازی محدودیت دوم آن، مدل ۴ را نتیجه می‌دهد:

$$z(\lambda) = max\, c^T x + \lambda(d - Dx) \qquad (۴)$$

$$x\ \in X \qquad (۴-۱)$$

مدل شماره ۴، $IP(\lambda)$ مدل ۳ است که در آن محدودیت (۳-۱) به عنوان محدودیت بد یا سخت شناخته شده است و با یک ضریب جریمه وارد تابع هدف شده است. دوگان آن به صورت مدل ۵ می‌شود:

$$\begin{aligned} w_{LD} &= \min_{\lambda \geq 0}\ z(\lambda) \\ &= \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \max_{x \in X}\ [\, cx + \lambda(d - Dx)] \right\} \\ &= \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \max_{t=1,\dots,T}\ [\, cx^t + \lambda(d - Dx^t)] \right\} \end{aligned} \qquad (۵)$$

مسأله‌ی بالا یک مسأله‌ی دوسطحی است که برای تبدیل آن به مدل برنامه ریزی خطی یک متغیر جدید η معرفی شده و در تابع هدف جایگزین شده و در نتیجه مدل ۶ حاصل خواهد شد:

$$w_{LD} = min\, \eta \qquad (۶)$$

$$\eta\ \geq\ cx^t + \lambda(d - Dx^t)\ \ for\ all\ \ t \qquad (۶-۱)$$

$$\lambda\ \in\ R_+^T\,,\ \ \eta\ \in\ R^1 \qquad (۶-۲)$$

مدل ۶ یک برنامه ریزی خطی است، با جابجا کردن برخی متغیرها به طرفین نامساوی شکل مدل به مدل ۷ تبدیل می‌شود و برای دوگان کردن آسان‌تر خواهد بود،

$$min\, \eta \qquad (۷)$$

$$\eta + \lambda(Dx^t -\ d) \geq\ cx^t\ \ for\ all\ \ t \qquad (۷-۱)$$

$$\lambda\ \in\ R_+^T\,,\ \ \eta\ \in\ R^1 \qquad (۷-۲)$$

دوگان آن، مدل ۸ را می‌دهد:

$$w_{LD} = max \sum_{t=1}^{T} \mu_t(cx^t) \quad (۸)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \mu_t(Dx^t - d) \le 0 \quad (۱-۸)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1 \quad (۲-۸)$$

$$\mu \in R_+^T \quad (۳-۸)$$

(۸-۱) : محدودیت اول مسأله دوگان بالا متناظر با متغیر λ است که چون بزرگتر مساوی صفر می‌باشد، پس محدودیت متناظر با آن به شکل استاندارد است .

(۸-۲) : محدودیت دوم متناظر با متغیر η است که چون آزاد در علامت است محدودیت نظیر آن به صورت برابری می‌باشد. متغیر x در اینجا ورودی مسأله می‌باشد.

(۸-۳) : متغیر μ متعلق به مجموعه اعداد حقیقی مثبت است که اندازه مجموعه محدود به T است.

در اینجا از یک تغییر متغیر به شکل زیر استفاده می‌شود:

$$x = \sum_{t=1}^{T} \mu_t x^t \quad (۹)$$

باتوجه به :

$$\sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1 , \mu \in R_+^T \quad (۱۰)$$

و در نتیجه مدل ۱۱ بدست می‌آید:

$$w_{LD} = \max\ c^T x \quad (۱۱)$$

$$s.t. \quad (۱-۱۱)$$

$$Dx \le d \quad (۲-۱۱)$$

$$x \in conv\ (X) \quad (۳-۱۱)$$

که در آن $conv\ (X)$ مجموعه‌ی محدب X است. این مدل به بیان می‌دارد که چگونه یک کران از مسأله‌ی دوگان لاگرانژ بدست می‌آید. در موارد خاص کرانی که ازاین مدل بدست می‌آید از کران بدست آمده از آزادسازی خطی قویتر نیست. مسأله دوگان لاگرانژ معادل با مسأله اولیه آزاد است[۶].

حل مسألهی لاگرانژ دوگان (الگوریتم زیر گرادیان)

فرمول برنامه ریزی خطی ظاهر شده در قضیهی قبلی یک راه برای حل مسألهی لاگرانژ دوگان فراهم می‌کند، اگرچه تعداد بزرگ محدودیت‌ها به این معنی است که رویکرد برش سطح مورد نیاز است. اما یک رویکرد دیگر که برای انجام دادن بدون استفاده از سیستم برنامه ریزی خطی بسیار ساده و آسان است، *الگوریتم زیر گرادیان* است.

روش زیر گرادیان برای یافتن ضرایب بهین، با یک $\lambda^{(0)}$ شروع می‌شود و دنبالهی ضرایب $\{\lambda^{(k)}\}$ با استفاده از رابطهی بازگشتی زیر ساخته می‌شود.

$$\lambda^{(k+1)} = max\ \{0\ , \lambda^{(k)} + \ \theta^{(k)} \times w^{(k)}\ \} \tag{۱۲}$$

دقت کنید که در مسألهی مورد بررسی، محدودیت پیچیده به صورت $Ax \le d$ باشد، لذا $\lambda^{(k)}$ ها نامنفی خواهند بود و رابطهی فوق، این مطلب را تضمین می‌کند. چنانچه ضریب لاگرانژ نامثبت باشند، در رابطهی مذکور، به جای بیشینه، از کمینه استفاده می‌کنیم. همچنین در رابطهی فوق، $\theta^{(k)} > 0$ یک طول گام مناسب است، همچنین $w^{(k)}$ زیر گرادیان تابع مقعر $z_{LR}(\lambda)$ در نقطهی $\lambda^{(k)}$ است و از رابطهی زیر به‌دست می‌آید که در آن $x^{(k)}$ جواب بهینه مسألهی آزادسازی لاگرا نژ به ازای $\lambda = \lambda^{(k)}$ می‌باشد[۱۸].

$$w^{(k)} = Ax^{(k)} - \ d \tag{۱۳}$$

مراحل روش زیر گرادیان به طور خلاصه

فرض کنید k شمارندهی تکرار، LB بهترین کران پایین که تاکنون پیدا شده، UB یک کران بالا روی تابع هدف مسألهی دوگان لاگرانژ، k_1 تعداد تکرارهای متوالی که بهبودی در مقدار کران پایین ایجاد نشده و K_1 یک حد بالا روی مقدار k_1 باشد، همچنین فرض کنید τ کنترل کنندهی اندازهی گام، $\lambda^{(k)}$ ضریب لاگرانژ در تکرار k ام و K یک حد بالا روی تعداد تکرارها باشد.

مرحله اول: مقدار دهی اولیه:

مقادیر اولیه بصورت $k_1 = 1\ , k = 1\ , LB = \ -\infty\ , \tau = 2$ تنظیم می‌شوند.

یک مقدار اولیه برای $\lambda^{(1)}$ انتخاب شده، سپس به مرحلهی دوم می‌رویم.

مرحله دوم: حل زیر مسأله‌ی لاگرانژ

برای تعیین بردار زیر گرادیان $w^{(k)}$ در $\lambda^{(k)}$، مسأله‌ی آزاد شده به ازای $\lambda = \lambda^{(k)}$، با فرض اینکه $x^{(k)}$، جواب بهینه آن است، حل شده در نتیجه خواهیم داشت:

$$w^{(k)} = Ax^{(k)} - d \quad (۱۴)$$

اگر $z_{LR}(\lambda^{(k)}) > LB$، آنگاه $k_1 = 1$،$LB = z_{LR}(\lambda^{(k)})$ قرار داده در غیر این صورت، مقدار k_1 یک واحد افزایش می‌یابد حال اگر $k_1 = K_1$ باشد، مقدار τ را نصف شده و $k_1 = 0$ در نظر گرفته خواهد شد.

مرحله سوم : بررسی بهینگی

اگر $0 \leq w^{(k)}$ و $\left(\lambda^{(k)}\right)^T w^{(k)} = 0$ برقرار باشد آنگاه $x^{(k)}$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی اولیه بوده و $\lambda^{(k)}$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی دوگان لاگرانژ است. پس روند متوقف شده، در غیر این صورت به مرحله‌ی چهارم می‌رویم.

مرحله چهارم: به روز رسانی ضرایب لاگرانژ

اگر $k = K$، متوقف شده، در غیر این صورت قرار می‌دهیم:

$$\lambda^{(k+1)} = max\ \left\{0\,, \lambda^{(k)} + \theta^{(k)} \times w^{(k)}\right\} \quad (۱۵)$$

که در آن طول گام $\theta^{(k)}$ از رابطه‌ی ۱۶ بدست می‌آید:

$$\theta^{(k)} = \tau\left(UB - z_{LR}(\lambda^{(k)})\right) \Big/ \|w^{(k)}\|^2 \quad (۱۶)$$

که در آن $z_{LR}(\lambda^{(k)})$ مقدار تابع هدف مسأله‌ی آزادسازی لاگرانژ است که در مرحله‌ی k ام با $\lambda^{(k)}$ محاسبه می‌شود. $2 \leq \tau > 0$ یک پارامتر کنترل کننده‌ی اندازه‌ی گام است و اندازه‌ی گام در جهت زیر گرادیان $w^{(k)}$ را کنترل می‌کند. تجربه نشان می‌دهد که بهتر است ابتدا قرار دهیم $\tau = 2$ و هر وقت که $z_{LR}(\lambda^{(k)})$ بعد از تعداد مشخصی تکرار افزایش پیدا نکرد، آن را نصف می‌کنیم.

سپس $k = k + 1$ قرار داده و به مرحله‌ی دوم باز می‌گردیم [۱۸].

نتایج عددی

آزاد کردن محدودیت

هر محدودیتی که برای مسأله در نظر گرفته می‌شود، مدل ریاضی را به دنیای واقعی نزدیکتر می‌کند و نوعی سختی به مسأله اضافه خواهدکرد. روش آزادسازی لاگرانژ برای اولین بار در مسأله‌ی مورد مطالعه در این تحقیق اعمال شده است و با توجه به نبود اطلاعات در مقالات گذشته، بطور تجربی با آزادسازی محدودیت‌های مسأله این نتیجه حاصل شده است که آزاد کردن محدودیت حداکثر تعداد تسهیلات نامطلوب، در میان بقیه‌ی محدودیت‌ها زمان حل مسأله را کمتر می‌کند و با تعداد تکرارهای کمتری بهترین کران را برای این مسأله فراهم می‌آورد. با آزاد کردن این محدودیت و اضافه کردن آن به تابع هدف با یک ضریب لاگرانژ مدل ریاضی مسأله به شکل مدل ۱۷ در می‌آید که آماده‌ی حل شدن می‌باشد و در نهایت مدل شماره‌ی ۱۷ برای بدست آوردن ضریب لاگرانژ بهینه برای مثال-های متعدد حل شده است.

$$min\, Z = \sum_{j=1}^{J}\left(a_j y_j + b_j\left(\sum_{i=1}^{J} x_{ij} - y_j\right) + \lambda\left(\sum_{j=1}^{j} y_j - K\right)\right) \tag{۱۷}$$

$s.t.:$

$$\sum_{j=1}^{j} d_{ij}x_{ij} \leq R \qquad \forall i \tag{۱-۱۷}$$

$$\sum_{j=1}^{j} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \tag{۲-۱۷}$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \leq My_j \qquad \forall j \tag{۳-۱۷}$$

$$x_{jj} = y_j \qquad \forall j \tag{۴-۱۷}$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} \leq n_j \tag{۵-۱۷}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \tag{۶-۱۷}$$

حال بایستی برای بدست آوردن بهترین کران پایین برای مسأله‌ی اصلی، مقدار بهینه‌ای برای λ تعیین شود. به این منظور از الگوریتم زیر گرادیان برای یافتن λ بهینه استفاده می‌شود.

الگوریتم زیر گرادیان

در مسأله‌ی مورد بررسی ، محدودیت پیچیده به صورت $Ax \le d$ بوده لذا $\lambda^{(k)}$ها نامنفی خواهند بود. برای روشن شدن مراحل الگوریتم، یک نمونه عددی از این مسأله آورده شده است، سپس نتایج عددی برای نمونه‌های مختلف در جدولی تهیه شده است.

مثال عددی

داده‌های مسأله با ابعاد **۲۰** گره در جداول ارایه شده آمده‌است.

جدول ۲. داده‌های مسأله

تعداد کل گره‌های موجود	N=20
شعاع حداکثر خدمات	R=60
حداکثر تسهیلات نامطلوب	K=5

جدول۳. ماتریس درجه آلودگی

بردار درجه آلودگی اصلی	a = [۵ ۷ ۱۱ ۱۰ ۱۲ ٤ ٦ ١٤ ٨ ١٣ ١٥ ١٧ ١٦ ٢٠ ١٨ ٣ ٥ ٩.٥ ١٠ ٧.٥];
بردار درجه آلودگی حاشیه‌ای	b = [۱۰ ۸ ۹ ۷ ١٤ ١٥ ٩ ٨ ١٠ ١١ ١٣ ٥ ١٠ ١٥ ٦ ٢ ٧ ٨ ١٣ ٣];

جدول٤. ماتریس فاصله

j / i	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱٤	۱٥	۱٦	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۱	-	۳۰	۲۰	۲۵	۲۱	۲۷	۴۰	۴۱	۲۹	۴۲	۳۲	۲۸	۱۵	۳۸	۳۵	۲۳	۳۳	۳۱	۱۳	۱۷
۲	۳۰	-	۳۲	۴۰	۴۵	۳۷	۳۵	۲۹	۲۲	۱۸	۱۴	۴۵	۵۰	۳۹	۲۸	۲۵	۴۹	۵۵	۱۰	۱۹
۳	۲۰	۳۲	-	۴۲	۵۱	۴۸	۳۸	۳۳	۲۶	۲۲	۳۳	۲۳	۱۸	۱۵	۹	۲۷	۲۴	۲۷	۲۲	۱۱
٤	۲۵	۴۰	۴۲	-	۹	۱۵	۲۰	۳۰	۳۴	۲۷	۴۶	۶۱	۵۵	۴۹	۱۹	۳۱	۳۵	۴۲	۱۶	۱۳
٥	۲۱	۴۵	۵۱	۹	-	۲۵	۲۸	۳۲	۵۶	۷۰	۱۸	۱۰	۵	۴۴	۳۳	۲۲	۱۵	۱۲	۲۱	۳۰
٦	۲۷	۳۷	۴۸	۱۵	۲۵	-	۲۱	۵۷	۷۷	۶۱	۶۵	۵۴	۴۶	۳۶	۲۶	۲۰	۱۴	۱۰	۶	۳۲
۷	۴۰	۳۵	۳۸	۲۰	۲۸	۲۱	-	۵۵	۴۴	۱۷	۱۰	۱۲	۸	۴۸	۸۰	۸۵	۹۰	۷۲	۶۶	۵۹
۸	۴۱	۲۹	۳۳	۳۰	۳۲	۵۷	۵۵	-	۱۳	۲۲	۳۱	۴۱	۵۱	۶۹	۷۵	۹	۹۵	۱۰۰	۳۶	۱۷
۹	۲۹	۲۲	۲۶	۳۴	۵۶	۷۷	۴۴	۱۳	-	۴۱	۳۲	۲۶	۱۱	۲۲	۳۹	۱۸	۱۰	۱۷	۸۱	۷۳
۱۰	۴۲	۱۸	۲۲	۲۷	۷۰	۶۱	۱۷	۲۴	۴۱	-	۱۲	۸	۲۶	۳۳	۴۶	۱۰۵	۹۵	۷۰	۶۵	۶۰
۱۱	۳۲	۱۴	۳۳	۴۶	۱۸	۶۵	۱۰	۳۱	۳۲	۱۲	-	۷۱	۳۰	۲۸	۷	۶۴	۵۹	۴۳	۳۵	۴۷
۱۲	۲۸	۴۵	۲۳	۶۱	۱۰	۵۴	۱۲	۴۱	۲۶	۸	۷۱	-	۳۶	۴۰	۷۰	۷۸	۳۳	۲۱	۱۳	۹
۱۳	۱۵	۵۰	۱۸	۵۵	۵	۴۶	۸	۵۱	۱۱	۲۶	۳۰	۳۶	-	۹	۷۵	۸۵	۹۵	۹۰	۶۹	۶۳
۱٤	۳۸	۳۹	۱۵	۴۹	۴۴	۳۶	۴۸	۶۹	۲۲	۳۳	۲۸	۴۰	۹	-	۷۰	۸۱	۵۹	۴۱	۳۱	۲۸
۱٥	۳۵	۲۸	۹	۱۹	۳۳	۲۶	۸۰	۷۵	۳۹	۴۶	۷	۷۰	۷۵	۷۰	-	۴۵	۵	۱۴	۱۱	۳۷
۱٦	۲۳	۲۵	۲۷	۳۱	۲۲	۲۰	۸۵	۹	۱۸	۱۰۵	۶۴	۷۸	۸۵	۸۱	۴۵	-	۳۳	۴۱	۷۰	۸۴
۱۷	۳۳	۴۹	۲۴	۳۵	۱۵	۱۴	۹۰	۹۵	۱۰	۹۵	۵۹	۳۳	۹۵	۵۹	۵	۳۳	-	۱۶	۹	۲۹
۱۸	۳۱	۵۵	۲۷	۴۲	۱۲	۱۰	۷۲	۱۰۰	۱۷	۷۰	۴۳	۲۱	۹۰	۴۱	۱۴	۴۱	۱۶	-	۱۹	۲۵
۱۹	۱۳	۱۰	۲۲	۱۶	۲۱	۶	۶۶	۳۶	۸۱	۶۵	۳۵	۱۳	۶۹	۳۱	۱۱	۷۰	۹	۱۹	-	۹۱
۲۰	۱۷	۱۹	۱۱	۱۳	۳۰	۳۲	۵۹	۱۷	۷۳	۶۰	۴۷	۹	۶۳	۲۸	۳۷	۸۴	۲۹	۲۵	۹۱	-

در اینجا مقدار K_1 را برابر با چهار فرض شده، یعنی اگر بعد از چهار تکرار بهبودی در کران پایین حاصل نشد، τ نصف می‌شود. به این منظور قرار می‌دهیم:

$$w = Ax - d = \sum_{j=1}^{j} y_j - K \tag{۱۸}$$

$$k = 1\,, K = 40\,, LB = -\infty\,, \tau = 2 \tag{۱۹}$$

یک کران بالا (UB) با مقدار $UB = 100.5$ برای مسأله بدست آمده که متناظر با یک جواب شدنی برای مسأله است.

تکرار اول: ابتدا باید $\lambda^{(1)} = 0$ قرار دهیم و مدل را حل کنیم: $z_{LR}(\lambda^{(1)}) = 93.5$، پس طبق رابطه‌ی $z_{LR}(\lambda^{(k)}) > LB$ کران پایین به مقدار $LB = 93.5$ به روز رسانی می‌شود. دراین مرحله داریم :

$$w^{(1)} = \sum_{j=1}^{j} y_j - K = 2 \tag{۲۰}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{\tau \times \left(\mathrm{UB} - z_{LR}(\lambda^{(1)})\right)}{(w^{(1)})^2} = \frac{2 \times (100.5 - 93.5)}{2^2} = 3.5$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \theta^{(1)} \times w^{(1)} = 0 + 2 \times 3.5 = 7$$

$$\lambda^{(k+1)} = max\left\{0\,, \lambda^{(k)} + \theta^{(k)} \times w^{(k)}\right\} \Rightarrow \lambda^{(2)} = 7$$

$K = 2$ به تکرار دوم می‌رویم :

تکراردوم: این بار مسأله‌ی آزاد شده را به ازای $\lambda^{(2)} = 7$ حل می کنیم : $z_{LR}(\lambda^{(2)}) = 89.5$، بدلیل رابطه‌ی $z_{LR}(\lambda^{(k)}) < LB$ پس کران پایین $LB = 93.5$ تغییر نکرده و در نتیجه داریم:

$$w^{(2)} = \sum_{j=1}^{j} y_j - K = -2 \tag{۲۱}$$

$$\theta^{(2)} = \frac{\tau \times \left(\mathrm{UB} - z_{LR}(\lambda^{(2)})\right)}{(w^{(2)})^2} = \frac{2 \times (100.5 - 89.5)}{(-2)^2} = 5.5$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} + \theta^{(2)} \times w^{(2)} = 7 + (-2 \times 5.5) = -4$$

$$\lambda^{(k+1)} = max\ \{0\ , \lambda^{(k)} + \theta^{(k)} \times w^{(k)}\} \Rightarrow \lambda^{(3)} = 0$$

تکرار سوم: این بار مسأله‌ی آزاد شده را به ازای $\lambda^{(3)} = 0$ حل می‌کنیم : $z_{LR}(\lambda^{(3)}) = 93.5$، پس کران پایین $LB = 93.5$ تغییر نمی‌کند و قرار می‌دهیم:

(۲۲)

$$w^{(3)} = \sum_{j=1}^{j} y_j - K = 2$$

$$\theta^{(3)} = \frac{\tau \times \left(\mathrm{UB} - z_{LR}(\lambda^{(3)})\right)}{(w^{(3)})^2} = \frac{2 \times (100.5 - 93.5\ )}{2^2} = 3.5$$

$$\lambda^{(4)} = \lambda^{(3)} + \theta^{(3)} \times w^{(3)} = 0 + 2 \times 3.5 = 7$$

$$\lambda^{(k+1)} = max\ \{0\ , \lambda^{(k)} + \theta^{(k)} \times w^{(k)}\} \Rightarrow \lambda^{(4)} = 7$$

برای یافتن بهترین λ، تکرارهای الگوریتم به همین ترتیب ادامه دارد تا به بهترین مقدار دست پیدا کرد. هربار که بعد از τ تکرار بهبودی در کران پایین حاصل نشد باید τ را طبق قانون الگوریتم نصف کرد. مقدار τ با توجه به هر مسأله متفاوت است، به این منظور که الگوریتم به جواب نهایی همگرا شود و در نهایت مقدار بهینه‌ای برای λ بدست آید.

نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی روی تعدادی مثال نمونه با ساختار مختلف گزارش شده است. به این منظور نتایج حاصل از روش لاگرانژ پیشنهادی و نتایج حاصل از حل یکپارچه مدل با استفاده از نرم افزار سیپلکس در جدول ۵ آمده است. لازم به ذکر است به دلیل حل بهینه مسئل توسط روش پیشنهادی، هدف از مقایسه نشان دادن توانایی الگوریتم در مقایسه با سلور قدرتمندی مانند سیپلکس است که در آن از جدیدترین ابزارهای حل همانند تابع مانع و روش شاخه و برش استفاده شده است. با توجه به در نظر گرفتن روش لاگرانژ در این مسأله، روند پیشروی الگوریتم در ابعاد مختلف، متفاوت عمل می-

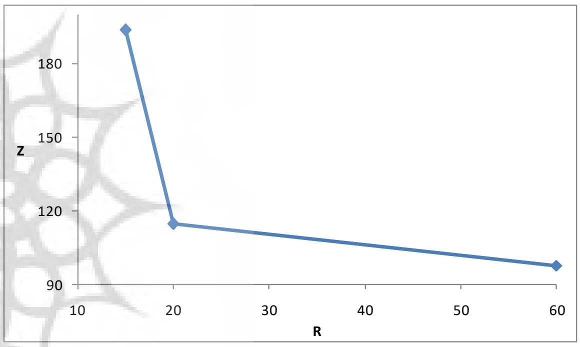
کند بطوریکه در بعضی از نمونه‌ها خیلی سریعتر به ضریب لاگرانژ بهینه همگرا می‌شود و در بعضی نمونه‌ها روند کندتری دارد. در هر مثال از یکی از جواب‌های شدنی مسأله به عنوان کران بالا استفاده شده است.

جدول ۵. نتایج کران‌های بدست آمده برای نمونه‌های عددی

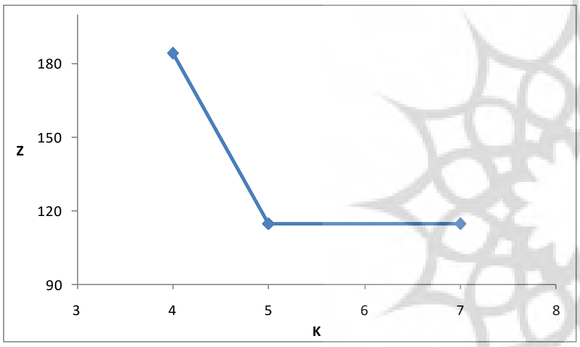
تعداد نمونه	تعدادکل گره-ها(J)	تسهیلات نامطلوب (K)	حداکثرشعاع خدمات(R)	تعداد تکرار	کران بالای تعیین شده (UB)	بهترین λ	بهترین کران پایین بدست آمده (LB)	جواب بهینه سیپلکس
۱	۱۰	۲	۳۰۰	۲	۴۲۶۶	۳۲۸	۴۰۵۶	۴۰۵۶
۲	۲۰	۵	۶۰	۱۱	۱۰۰,۵	۲,۵	۹۷,۵	۹۷,۵
۳	۲۵	۶	۱۵	۲	۱۹۵,۴۹۹	۲۸,۲۵	۱۶۴,۵	۱۶۴,۵
۴	۳۰	۸	۱۵	۱۲	۱۹۲,۵	۷,۲۴۸	۱۵۶,۵	۱۵۶,۵
۵	۴۰	۹	۳۰۰	۱۲	۱۱۲۶	۸	۱۱۰۷	۱۱۰۷
۶	۵۵	۱۲	۱۵۰	۲۹	۴۱۸,۵	۱۶,۸۳	۳۴۳,۵	۳۴۳,۵
۷	۶۰	۱۷	۲۵	۲۰	۴۲۴,۵	۵,۰۲	۴۰۹,۵	۴۰۹,۵
۸	۷۰	۱۹	۱۵۰	۱۳	۲۲۶۲	۳	۲۲۴۳	۲۲۴۳
۹	۸۰	۲۲	۲۰	۹	۵۷۱,۵	۱۶,۷۴۹	۵۵۴,۵	۵۵۴,۵
۱۰	۹۰	۲۵	۲۰	۱۵	۶۳۲	۱۲,۹۲۶	۶۰۱,۹۹۹	۶۰۲
۱۱	۱۰۰	۲۹	۱۸	۲	۷۰۰	۱۷,۲	۶۷۵,۹۹	۶۷۶
۱۲	۲۰۰	۳۵	۱۵۰	۱۷	۶۹۳۲	۲۷,۹۳	۶۸۷۱,۹۳۵	۶۸۷۲
۱۳	۳۰۰	۳۶	۲۵۰	۳	۱۱۷۵۵	۷۳,۰۸۳۲	۱۱۶۲۱	۱۱۶۲۱
۱۴	۴۰۰	۳۹	۳۵۰	۱۰	۲۴۳۸۵	۶۱۶,۲۵	۲۳۵۱۳	۲۳۵۱۳
۱۵	۵۰۰	۴۱	۶۵۰	۱۵	۲۳۲۵۲	۵۹,۵۷۶	۲۳۱۳۰	۲۳۱۳۰

تحلیل حساسیت

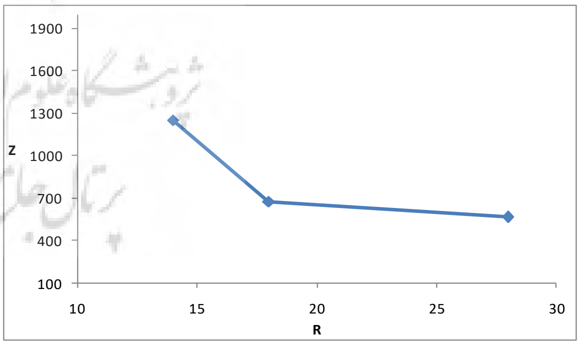
در بیشتر کاربردهای عملی، بعضی از داده‌های مسأله دقیقا معلوم نیست و از این رو تا جایی که امکان داشته باشد تخمین زده می‌شوند. وقتی تخمین‌های دیگری از بعضی از داده‌های مسأله در دسترس قرار می‌گیرد پیداکردن جواب بهینه جدید بدون اینکه مجبور باشیم هزینه گران حل مجدد مسأله از ابتدا متحمل شویم، بسیار اهمیت دارد. در این تحقیق نیز به منظور بررسی عوامل اثرگذار بر مقدار تابع هدف لازم است که تحلیل حساسیتی از پارامترهای مسأله بعمل آید. به این منظور دو مثال شماره ۲ و ۱۱ از جدول بالا برای شروع کار در نظر گرفته شده است. در این مثال‌ها با تغییرات پارامتر شعاع با شرط ثابت نگهداشتن سایر پارامترها و تغییرات پارامتر تعداد تسهیلات نامطلوب با شرط ثابت نگهداشتن سایر پارامترها تغییرات تابع هدف اندازه‌گیری شده است. نتایج بدست آمده در شکل‌های زیر آمده است.



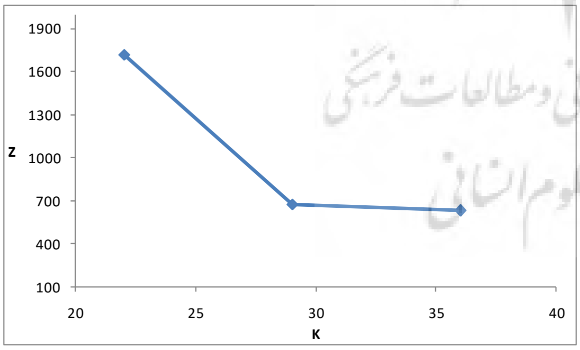
(أ) تغییرات پارامتر شعاع در مثال ۲



(ب) تغییرات پارامتر تعداد تسهیلات نامطلوب در مثال ۲



(ت) تغییرات پارامتر شعاع در مثال ۱۱



(ث) تغییرات پارامتر تعداد تسهیلات نامطلوب در مثال ۱۱

شکل ۱. تحلیل حساسیت

با توجه به شکل‌ها می‌توان به این نتیجه رسید که تغییرات در تابع هدف نسبت به افزایش هر دو پارامترهای شعاع و تعداد تسهیلات دارای رفتاری نزولی است. البته همچنان که ملاحظه می‌کنید این رفتار در رابطه با پارامتر تعداد تسهیلات در ابتدا دارای شیب تندتری است ولی با افزایش تعداد تسهیلات مقدار تغییرات کم و کمتر شده است و البته این رفتار با توجه به ماهیت مسئله تا حد زیادی قابل پیش‌بینی بود. اگر حداکثر تعداد تسهیلات نامطلوبی که می‌تواند استقرار یابد و همچنین حداکثر شعاع پوشش دهی این تسهیلات کمتر باشد، بخصوص در نمونه‌های بزرگتر مسأله به زمان بیشتری نیاز دارد که به جواب بهینه می‌رسد در عین حال به دنیای واقعی نزدیکتر می‌شود و می‌توان در نمونه-های واقعی مانند مکان بهینه‌ی سطل‌های زباله در شهر نیز از آن استفاده کرد. بنابراین در نظر گرفتن تعداد تسهیلات کمتر و شعاع پوشش‌دهی کمتر و متناظر با دنیای واقعی برای حل این مسأله بهتر است.

نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی

در این مقاله برای اولین بار مدلی برای مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارایه شده و روش آزادسازی لاگرانژ جهت حل این مسئله مورد استفاده قرار گرفته است. به این منظور ابتدا مدل ریاضی گسترش داده سپس روش آزادسازی لاگرانژ ارایه و کاربرد این روش در مسأله‌ی مکان‌یابی تسهیلات نامطلوب تشرح شد. در این مسأله با آزاد کردن محدودیت حداکثر تسهیلات نامطلوب این امکان فراهم شد در تکرارهای کم کران پایین مناسبی که با جواب نرم افزار حل دقیق سیپلکس منطبق است، حاصل شود. روش پیشنهادی برای نمونه‌هایی با ساختارهای مختلف پیاده‌سازی شده و در نهایت با جواب کران‌های بدست آمده با نرم افزار سیپلکس مقایسه شد. در مقایسه با نتایج بدست آمده در ادبیات ضروری است به این نکات توجه شود که اولاً در این مسأله روش حل بندرز برای این مسأله کارا نیست به این دلیل که این مسأله قابل تفکیک به دو مرحله‌ی مجزا نمی‌باشد. همچنین روش تجزیه دانتزیگ–ولف به این دلیل که روش تجزیه دانتزیگ–ولف برای مسایل خطی مناسب است و با توجه به این که این مسأله از نوع عددصحیح صفر و یک می‌باشد، برای این مسأله مناسب به نظر نمی‌رسد. از جمله یافته‌های پژوهش جاری می‌توان به این موضوع اشاره کرد که مکان بهینه‌ی تسهیلات نامطلوب به کاهش آلودگی‌های زیست محیطی، کاهش هزینه‌ی حمل و نقل، کمینه کردن میزان سرمایه گذاری، راحتی مردم برای استفاده از این امکانات کمک فراوانی می‌کند. این تسهیلات در عین حال که تسهیلات ضروری برای مردم هستند برای ساکنان

اطراف این تسهیلات مضر هستند. پس باید در مکان‌یابی این تسهیلات مدل‌ها و روش‌های حل مناسب و کارایی در نظرگرفت تا بتوان آلودگی‌های حاصل از این تسهیلات را برای ساکنان همسایه‌ی این تسهیلات به حداقل رساند در عین حال مکانی انتخاب شود که هزینه‌های حمل و نقل برای سایر مناطق تحت پوشش این تسهیل نامطلوب حداقل شود. همچنین می‌توان با یافتن مسیری مناسب برای حمل و نقل از این تسهیلات به مکان‌های تحت پوشش به کاهش اثرات مضر این تسهیلات برای مردم و محیط زیست کمک کرد. بنابراین به عنوان مطالعات می‌توان بررسی مسأله مسیریابی این مواد پیشنهاد گردد. همچنین به دلیل کاربردی بودن این تحقیق و همچنین عدم دسترسی محققین این مقاله به داده‌های واقعی، استفاده از داده‌های واقعی و بهره‌گیری از مدل پیشنهادی به عنوان مطالعات آتی مورد تاکید است. به عنوان آخرین زمینه تحقیقاتی استفاده از الگوریتمهای فراابتکاری برای حل مسئله در اندازه‌های بزرگتر مسأله نیز به علاقمندان پیشنهاد می‌گردد.

منابع

میرحسنی،سید علی، ۱۳۹۳، *برنامه ریزی تصادفی*، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر

E. Melachrinoudis, 1984. *Determining an optimum location for an undesirable facility in a workroom environment*, Appl. Math. Model., 9, 365-369.

A. Mehrez, Z. Sinuany-stern, A. Stulman, 1985. *The one-dimensional single facility maximin distance location problem*, Comput. Ops. Res., 12, 51-60.

O. Berman, Z. Drezner, 2000. *A note on the location of an obnoxious facility on a network*, Eur. J. Oper. Res., 120, 215-217.

S.E. Mousavi, M. Heydar, S.M.H. Mojtahedi, S.M. Mousavi, 2008. *A fuzzy multi objective decision making approach for locating undesirable facilities and hazardous materials*, Proceedings of the 2008 IEEE ICMIT, 1094-1098.

B. D. Song, J. R. Morrison, Y. D. Ko, 2013. *Efficient location and allocation strategies for undesirable facilities considering their fundamental properties*, Comput. Ind. Eng., 65, 475–484.

L.A.Wolsey,1998. *Integer Programming*, John Wiley & Sons, INC.

M. Colebrook, J. Gutierrez, J. Sicilia, 2005. *A new bound and an O(mn) algorithm for the undesirable 1-median problem (maxian) on networks*, Computers & Operations Research, 32, 309–325.

E. Erkut and S. Neuman, 1989. *Analytical models for locating undesirable facilities*, European Journal of Operational Research, 40, 275-291.

L. Giannikos, 1998. *A multi-objective programming model for locating treatment sites and routing hazardous wastes*, European Journal of Operational Research, 104, 333–342.

S. Ratick, A. White,1988. *A Risk-Sharing Model for Locating Noxious Facilities*. Envrionment and Planning B, 15, 165–179.

J. Brimberg and H. Juel, 1998, *On locating a semi-desirable facility on the continuous plane*, Int. Trans. Opl. Res., 51, 59-66.

E. Carrizosa and F. Plastria, 1999, *Location of semi-obnoxious facilities*, Studies in Locational Analysis,12 , 1-27.

E. Melachrinoudis and T.P. Cullinane, 1985, *Locating an undesirable facility within a geographical region using the maximin criterion*, Journal of Regional Science, 25, 115-127.

E. Melachrinoudis and T.P. Cullinane, 1986, *Locating an obnoxious facility within a polygonal region*, Annals of Operations Research, 6, 137-145.

E. Melachrinoudis and Z. Xanthopulos 2003, *Semi-obnoxious single facility location in euclidean space*, Computers & Operations Research, 30, 2191-2209.

F. Plastria, 1996, *Optimal location of undesirable facilities: A selective overview*, Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science, 36, 109-127.

J. Rakas, D. Teodorovi, T. Kim, 2004, Multi-objective modeling for determining location of undesirable facilities, Transportation Research Part D, 9, 125-138.