Robust Method for Logistic Profiles Monitoring in Phase I

Ahmad Hakimi
MA, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran, ahmad.hakimi2010@gmail.com
Amirhossein Amiri *
Assistant professor, Department of Industrial Engineering, Shahed University, Tehran, Iran, amiri@shahed.ac.ir
Reza Kamranrad
PhD student, Department of Industrial Engineering, Shahed University, Tehran, Iran, r.kamranrad@shahed.ac.ir

Abstract: In this paper, a new robust method based on weighted maximum likelihood estimation (WMLE) is proposed to estimate the regression parameters in logistic profiles in Phase I. This approach reduces the outlier's effects on the statistical performance of T^2 control chart in terms of probability of Type I error. A numerical example is used to evaluate the performance of the proposed method. The results show the better performance of the proposed estimator compared to the maximum likelihood estimation method in terms of power in T^2 control chart.

Keywords: Logistic Profile, Outlier, Robust Method, Weighted Maximum Likelihood Estimation, Phase I.

Introduction: Yeh et al. (2009) proposed five based T^2 statistics to monitor the binary logistic regression profile in Phase I. Different approaches are proposed to monitor logistic regression profiles in Phase II. So far, few researches have been done on monitoring the profile with the presence of contaminated data. In this area, Ebadi and Shahriari (2014) proposed robust estimation approach to monitor the simple linear profile based on two classic and robust methods (M-estimator) with two functions including Huber weighted and double square functions. The aim of this paper is to monitor the logistic regression profiles with the presence of outliers in Phase I based on weighted maximum likelihood robust estimator and T^2 control chart. The main questions of this papers are as follows: a) Evaluating the effect of outliers on the mean and standard deviation of the proposed and classic estimators of the logistic regression profile parameters and probability of Type I error in common T^2 control chart, b) Comparing performance of the proposed and classic estimators on the T^2 control chart power for different shifts in logistic regression profile parameters under outliers in Phase I.

Materials and Methods: Sometimes, there are outliers in the gathered data which lead to incorrect estimation of the profile parameters. Hence, to decrease or remove the effect of outlier(s), robust estimation methods are applied. In this paper, a robust approach called weighted maximum likelihood estimator (WMLE) is applied to estimate the parameters of the logistic regression profiles as follows (Maronna et al., 2006):

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \{ y_i \log p_i(\beta) + (m_i - y_i) \log(1 - p_i(\beta)) \}, \quad (1)$$

where, $p_i(\beta)$ is the probability of response variable in each level of logistic regression profile using the estimated parameters. A robust estimate for obtaining parameters is achieved by minimizing

* Corresponding author

the above function. However, in order to give less weight to outliers, we can consider the following relationship and minimize it.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (y_i \log p_i(\beta) + (m_i - y_i)(\log(1 - p_i(\beta))), \qquad (2)$$

where w_i is the weight of the *i*th observation which is calculated as Equation (3)

$$w_i = W(h_n(y_i)), \qquad (3)$$

in which W is a non-ascending function and computed based on Carroll and Pederson (1993) as follows:

$$W(u) = (1 - \frac{u^2}{c^2})^3 I(|u| \le c). \qquad (4)$$

Results and Discussion

The Type I error probability of T^2 control chart considering the outlier using MLE and WMLE methods is summarized in Table 1.

Table 1- Type I error probability of T^2 control chart considering MLE and WMLE methods

Estimation Method	MLE	WMLE
Type I error probability	0.1242	0.0718

In this section, r percentage of the total data is contaminated with an increase in the variance of the errors For r equal to 0.07 and 0.15, the variance error is changed from 1 to 4 and Type I error probability of the T^2 control chart with both classic and proposed estimators are calculated and reported in Table 2.

Table 2- Type I error probability of the T^2 control chart with both classic and proposed estimators under different r

	Estimation methods	Type I error probability		Estimation methods	Type I error probability
r=0.15	MLE	0.2779	r=0.07	MLE	0.1801
	WMLE	0.1541		WMLE	0.1021

Based on Table 2, Type I error probability of the T^2 control chart under the classic method is more than the robust one and this result shows the better performance of the proposed method rather than the classic one.

Conclusion

In this paper, a robust approach was developed to estimate the logistic regression profiles with the presence of outliers in Phase I. The performance of the proposed robust estimator was compared with the classic method (MLE) based on Type I error probability and power of T^2 control chart in Phase I. Results showed that the WMLE method outperforms the MLE in estimating the logistic regression profile parameter under outliers.

References

Ebadi, M., & Shahriari, H., (2014), "Robust Estimation of Parameters in Simple Linear Profiles Using M-Estimators", *Communications in Statistics - Theory and Methods,* 43(20), 4308-4323.

Maronna, AR., Martin, R.D., & Yohai, V.J., (2006), *Robust Statistics Theory and Methods*, John Wiley, New York.

Yeh A.B., Huwang L., & Li Y.M., (2009), "Profile Monitoring for a Binary Response", *IIE Transactions*, 41(13), 931-941.

مدیریت تولید و عملیات، دوره ۹، پیاپی ۱۶، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۷
دریافت: ۱۳۹۲/۰۹/۲۰ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۰۸
صص: ۱۱۸-۱۰۷

توسعۀ روشی استوار برای پایش پروفایل‌های لجستیک در فاز ۱

احمد حکیمی [۱]، امیر حسین امیری [۲]* رضا کامران راد [۳]

۱ - کارشناس ارشد گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، ahmad.hakimi2010@gmail.com
۲- استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، amiri@shahed.ac.ir
۳- دانشجوی دکتری گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، r.kamranrad@shahed.ac.ir

چکیده: در برخی از فرآیندها، کیفیت محصولات یا عملکرد فرآیند به‌وسیلۀ رابطۀ بین دو یا چند متغیر توصیف می‌شود. این رابطه می‌تواند خطی ساده، خطی چندگانه، چندمتغیره، غیرخطی و لجستیک باشد که به اصطلاح به آن پروفایل گفته می‌شود. برخی از روش‌های توسعه داده‌شده در پایش پروفایل مرتبط با پایش پروفایل‌های لجستیک هستند. همچنین حضور داده‌های پرت درون داده‌ها سبب می‌شود تا پارامترهای پروفایل به‌درستی تخمین زده نشوند. در این مقاله روش جدید حداکثر درست‌نماییِ وزنی مبتنی بر رویکرد استوار برای تخمین پارامترهای پروفایل‌های لجستیک در فاز ۱ ارائه شده است تا اثر داده‌های پرت روی عملکرد آماری نمودار کنترل T^2 برمبنای احتمال خطای نوع ۱ برای پایش پروفایل‌های لجستیک کاهش یابد. عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از مثال عددی بررسی و نتایج آن با روش حداکثر درست‌نمایی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد روش پیشنهادی بهتر از روش حداکثر درست‌نمایی براساس توان نمودار کنترل T^2 عمل می‌کند.

واژه‌های کلیدی: پروفایل لجستیک، داده‌های پرت، رویکرد استوار، روش حداکثر درست‌نمایی وزنی، فاز ۱

*نویسنده مسؤول

مقدمه

معمولاً در کنترل فرآیند آماری، کیفیت محصول یا فرآیند به‌وسیلهٔ مشخصهٔ کیفی تک یا چندمتغیره توصیف می‌شود؛ ولی گاهی کیفیت محصول یا فرآیند به‌وسیلهٔ رابطهٔ بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود که به این رابطه پروفایل گفته می‌شود. این رابطه می‌تواند خطی ساده، چندجمله‌ای، غیرخطی، لجستیک و یا پیچیده‌تر باشد. پایش پروفایل‌ها در دو فاز ۱ و ۲ انجام می‌شود. هدف اصلی در فاز ۱ تخمین پارامترهای پروفایل و در فاز ۲ کشف تغییرات در زودترین زمان ممکن است.

در پروفایل‌های خطی رابطهٔ بین متغیر پاسخ و متغیر(های) مستقل به‌صورت خطی است. کنگ و آلباین[1] (۲۰۰۰) در فاز ۲ پایش پروفایل‌های خطی ساده را توصیف کرده‌اند. آنها روش تخمین پارامترهای پروفایل را تشریح و با استفاده از نمودار کنترل T^2 پارامترهای پروفایل را پایش کردند. آنها همچنین در روشی دیگر با استفاده از نمودار کنترل EWMA-R باقیمانده‌های مدل برازش‌شده را پایش کردند.

پس از این مقاله، پژوهش‌های بسیاری در زمینهٔ پایش انواع پروفایل‌ها صورت گرفت که فهرست نسبتاً کاملی از پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه در مقالات مروری محمود و وودال[2] (۲۰۰۴) ، وودال (۲۰۰۷)، همچنین کتاب نورالسناء و همکاران (۲۰۱۱) وجود دارد. سقایی و همکاران (۲۰۰۹) روشی مبتنی بر آمارهٔ CUSUM را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده ارائه کرده است. ژیانگ و همکاران[3] (۲۰۰۹) با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی روشی را برای پایش پروفایل‌های خطی مطرح کردند. ژو و لین[4] (۲۰۱۰) بر پایش شیب پروفایل خطی در هر دو فاز ۱ و ۲ تمرکز کرده‌اند. در فاز ۲ آن‌ها نشان دادند متوسط طول دنباله در نمودار کنترل پیشنهادی تنها به شیب وابسته است؛ درحالی‌که متوسط طول دنباله در نمودار کنترل T^2 به شیب، عرض از مبدأ و همبستگی بین این دو وابسته است.

باتوجه‌به اینکه پروفایل‌های غیرخطی پیچیدگی بیشتری نسبت به پروفایل‌های خطی دارند، پژوهش‌های کمتری نسبت به پروفایل‌های خطی روی آنها صورت گرفته است. به‌طور موردی در حوزهٔ پروفایل‌های غیرخطی و خطیِ تعمیم‌یافته نیز پژوهش‌هایی انجام شده است؛ برای مثال ویلیامز و همکاران[5] (۲۰۰۳) روش‌هایی را برای پایش پروفایل‌های غیرخطی در فاز ۱ ارائه کرده‌اند. ویلیامز و همکاران (۲۰۰۷) روش‌هایی را مبتنی بر نمودار کنترل T^2 برای پایش پروفایل‌های غیرخطی پیشنهاد داده‌اند. زو و همکاران[6] (۲۰۰۸) روش‌هایی را برای پایش پروفایل‌های غیرخطی با استفاده از آمارهٔ EWMA و آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته ارائه کرده‌اند. واقفی و همکاران[7] (۲۰۰۹) روش‌های ارائه‌شده در فاز ۱ به‌وسیلهٔ ویلیامز (۲۰۰۳) را به فاز ۲ توسعه داده‌اند. در این مقاله از سه رویکرد پارامتری، ناپارامتری و هوش مصنوعی مبتنی بر شبکه‌های عصبی برای پایش پروفایل‌های غیرخطی در فاز ۲ استفاده و کارایی آنها با استفاده از شبیه‌سازی بررسی شده است.

در زمینهٔ پایش پروفایل‌های مبتنی بر الگوهای خطی تعمیم‌یافته[8] (GLM)، یه و همکاران[9] (۲۰۰۹) پنج روش مبتنی بر آمارهٔ T^2 را برای پایش پروفایل‌های لجستیک در فاز ۱ ارائه دادند. سقایی و همکاران[10] (۲۰۱۲) نیز پایش پروفایل‌های لجستیک در فاز ۲ را بررسی کردند. نورالسناء و ایزدبخش (۱۳۹۱) برای پایش پروفایل‌های لجستیک رسته‌ای از نمودار کنترل T^2 و آزمون نسبت درست‌نمایی استفاده کرده‌اند.

در پایش پارامترهای پروفایل در فاز ۱ ابتدا با نمونه‌گیری از فرآیند تحت کنترل و با استفاده از روش‌های

کلاسیک حداقل مربعات[11] یا حداکثر درست‌نمایی[12] پارامترهای مدل برآورد می‌شوند. نکتهٔ درخور توجه این است که در زمان نمونه‌گیری برای برآورد پارامترهای فرآیند ممکن است در برخی از زیرگروه‌ها داده‌های بسیار بزرگ و بسیار کوچک نسبت به بقیهٔ داده‌ها وجود داشته باشند. این داده‌ها که با عنوان داده‌های پرت[13] شناخته می‌شوند برآورد روش کلاسیک را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهند. این تأثیر باعث می‌شود نمودار کنترلی رسم‌شده بازتر شود و احتمال خطای نوع ۱ افزایش یابد و عملکرد مناسبی در تشخیص و شناسایی انحرافات با دلیل در فاز ۲ نداشته باشد. این امر باعث ظهور تخمین‌زننده‌هایی شد تا نسبت به داده‌های پرت حساسیت کمتری داشته باشند و پارامترهای پروفایل را به‌طریق مناسب‌تری برآورد کنند (مونتگومری و همکاران[14]، ۲۰۱۵؛ هابر[15]، ۱۹۸۱).

تاکنون پژوهش‌های محدودی در زمینهٔ پایش پروفایل با حضور داده‌های آلوده انجام شده است؛ از جملهٔ این پژوهش‌ها، پژوهش عبادی و شهریاری[16] (۲۰۱۴) است که در آن از روش‌های تخمین استوار برای پایش پروفایل‌های خطی ساده استفاده کرده‌اند. در این پژوهش پارامترهای پروفایل با دو روش کلاسیک و استوار (M-estimator) با دو تابع وزنی هابر و دومربعی با حضور داده‌های پرت و بدون آن تخمین زده شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد وقتی آلودگی وجود ندارد، بین روش‌های تخمین تفاوت زیادی وجود ندارد؛ ولی با وجود داده‌های آلوده تخمین روش استوار دقیق‌تر است و تابع وزنی دومربعی جواب بهتری نشان می‌دهد.

هدف از این مقاله تخمین پارامتر در پروفایل‌های لجستیک با حضور دادهٔ پرت در مشاهدات با استفاده از روش استوار و بررسی اثر تخمین روی احتمال خطای نوع ۱ و توان نمودار کنترل T^2 است. سوال‌های اصلی این پژوهش عبارتند از: ۱- بررسی اثر دادهٔ پرت روی میانگین و انحراف استاندارد تخمین‌زنندهٔ پیشنهادی و کلاسیک پارامترهای رگرسیون لجستیک و احتمال خطای نوع ۱ نمودار کنترل T^2؛ ۲- بررسی اثر تخمین‌زنندهٔ پیشنهادی در مقایسه با تخمین‌زنندهٔ کلاسیک در توان نمودار کنترل T^2 تحت شیفت‌های مختلف در پارامترهای رگرسیون لجستیک در حضور داده‌های پرت.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش ۲ روش حداکثر درست‌نمایی برای تخمین پارامترهای پروفایل لجستیک بیان می‌شود. بخش ۳ مسئله را تعریف و سپس روش پیشنهادی را ارائه می‌کند. در بخش ٤ با ارائهٔ مثال عددی، عملکرد روش پیشنهادی با روش کلاسیک حداکثر درست‌نمایی مقایسه می‌شود.

روش حداکثر درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای پروفایل لجستیک

الگوی رگرسیون لجستیک در عمل بیشتر از سایر انواع رگرسیون خطی تعمیم‌یافته استفاده می‌شود. این نوع رگرسیون برای مواردی به‌کار می‌رود که مقادیر متغیر پاسخ به‌صورت ۰ یا ۱ باشند؛ به عبارت دیگر مقادیر متغیر پاسخ دارای توزیع برنولی هستند. در رگرسیون لجستیک احتمال موفقیت در هر آزمایش مستقل برنولی با رابطهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$\pi_i = \frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}}, \qquad (۱)$$

در رابطهٔ فوق احتمال موفقیت توزیع برنولی با π_i نشان داده شده است و $\mathbf{x}_i$ بردار متغیرهای مستقل و $\boldsymbol{\beta}$ بردار پارامترهای مدل هستند.

مفروضات و مدل مسئله

فرض کنید n مجموعه آزمایش مستقل وجود دارد و در هر مجموعه بردار متغیرهای پیش‌بینی p به‌صورت $\mathbf{x}_i=\left(x_{i1},x_{i2},...,x_{ip}\right)$ است به‌نحوی‌که متغیر پاسخ به‌صورت $i=1,2,...,n$, z_i تعریف می‌شود. z_i دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت π_i است. احتمال π_i تابعی از x_i بوده و در مدل رگرسیون لجستیک به‌وسیلهٔ تابع ارتباطی $g\left(\pi_i\right)$ مطابق رابطهٔ (۲) مشخص شده است.

$$g\left(\pi_i\right)=\log\frac{\pi_i}{1-\pi_i}=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\cdots+\beta_px_{ip}, \tag{۲}$$

بردار $\boldsymbol{\beta}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\right)^T$ بردار پارامتر مدل است. $x_{i1}=1$ به‌طوری‌که β_1 مقدار ثابت مدل است. باتوجه‌به این تعاریف مقدار احتمال برای هر مجموعه از مشاهدات طبق رابطهٔ (۳) تعیین می‌شود.

$$\pi_i=\frac{\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)}{1+\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)}=\frac{\exp\left(\eta_i\right)}{1+\exp\left(\eta_i\right)}, \tag{۳}$$

در رابطهٔ (۳)، $\eta_i=\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}=\sum_{j=1}^{p}\beta_jx_{ij}$ است. فرض می‌شود داده‌ها گروهی بوده طوری‌که برای مجموعهٔ iام متغیرهای کنترلی، m_i مشاهده وجود دارد. $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ بیانگر تعداد کل مشاهدات است. بدیهی است که $y_i=\sum_{j=1}^{m_i}z_{ij}$، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(m_i,\ \pi_i)$ با میانگین $m_i\pi_i$ و واریانس $m_i\pi_i(1-\pi_i)=m_i\times\frac{\exp(\eta_i)}{1+\exp(\eta_i)}\times\frac{1}{1+\exp(\eta_i)}$ است.

فرض کنید مشاهدات بینم در سطوح مختلف از یکدیگر مستقل هستند؛ بنابراین تابع درست‌نمایی توأم $y_1,y_2,\cdots,y_n$ به‌صورت رابطهٔ (٤) تعریف می‌شود.

$$L\left(\pi\,;y\right)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m_i}{y_i}\pi_i^{y_i}\left(1-\pi_i\right)^{m_i-y_i} \tag{٤}$$

طوری‌که $\boldsymbol{\pi}=\left(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n\right)^T$ و $\mathbf{y}=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T$ است. از رابطهٔ (٤) لگاریتم گرفته و با در نظر گرفتن $\eta_i=\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}=\sum_{j=1}^{p}\beta_jx_{ij}=\log\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$، تابع لگاریتم درست‌نمایی طبق رابطهٔ (٥) تعریف می‌شود.

$$l\left(\beta;y\right)=\sum_{i=1}^{n}\log\binom{m_i}{y_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}y_i\beta_jx_{ij}-\sum_{i=1}^{n}m_i\log\left[1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\beta_jx_{ij}\right)\right] \tag{٥}$$

.

با مشتق‌گرفتن از رابطهٔ (٥) نسبت به $\boldsymbol{\beta}$، رابطهٔ (٦) برقرار است.

$$\frac{\partial l\left(\beta;y\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{X}^T\mathbf{y}-\sum_{i=1}^{n}m_i\pi_iX_i=\mathbf{X}^T(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}), \tag{٦}$$

که $\boldsymbol{\mu}=\left(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\right)^T$ و $E(y)=\left(m_1\pi_1,m_2\pi_2,\ldots,m_n\pi_n\right)$ ماتریس $n\times p$ است. طبق رابطهٔ (٦) $\mathbf{X}^T(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})=0$ است که $\mathbf{0}=\left(0,0,\cdots,0\right)^T$ بردار صفر pبعدی است. در عمل MLE را می‌توان با تکرار تخمین‌های روش حداقل مربعات وزنی نیز تقریب زد. $\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_p\right)^T$ بیانگر تخمین‌های بردار پارامترهای β است به‌نحوی‌که $\hat{\boldsymbol{\eta}}=\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\cdots,\hat{\eta}_n\right)^T=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و $\hat{\pi}_i=\dfrac{\exp\left(\hat{\eta}_i\right)}{1+\exp\left(\hat{\eta}_i\right)}$.

ماتریس وزن $\hat{\mathbf{W}}=diag\{m_1\pi_1(1-\pi_1),m_2\pi_2(1-\pi_2),\ldots,m_n\pi_n(1-\pi_n)\}$ ماتریس قطری $n\times n$ است که دارای قطر اصلی و سایر عناصر صفر است. $\mathbf{q}$ بردار متغیرهای وابستهٔ تعدیل‌شده به‌صورت $\mathbf{q}=\left(q_1,q_2,\cdots,q_n\right)^T$است؛ جایی‌که $q_i=\hat{\eta}_i+\left(y_i-m_i\hat{\pi}_i\right)/\left[m_i\hat{\pi}_i\left(1-\hat{\pi}_i\right)\right]$ برقرار است؛ بنابراین مطابق تعاریف بیان‌شده رابطهٔ (٧) حاصل می‌شود.

$$\mathbf{q}=\hat{\boldsymbol{\eta}}+\hat{\mathbf{W}}^{-1}(\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\mu}})=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\hat{\mathbf{W}}^{-1}(\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \qquad (٧)$$

در رابطهٔ (٧)، $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\left(m_1\hat{\pi}_1,m_2\hat{\pi}_2,\ldots,m_n\hat{\pi}_n\right)$ است. هر دو سمت رابطهٔ (٦) را در $\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}$ ضرب کرده، رابطهٔ (٨) به دست می‌آید.

$$\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\mathbf{q}=\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\,\hat{\mathbf{W}}^{-1}(\mathbf{y}-\hat{\mu})=\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}^T(\mathbf{y}-\hat{\mu}) \qquad (٨)$$

طبق فرض $\mathbf{X}^T(\mathbf{y}-\hat{\mu})=0$ رابطهٔ (٨) به معادلهٔ تخمین $\boldsymbol{\beta}$ تبدیل می‌شود؛ بنابراین رابطهٔ (٩) برای تخمین پارامتر به کار گرفته می‌شود.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}\mathbf{q} \qquad (٩)$$

مقادیر $\boldsymbol{\beta}$ پس از چند تکرار و باتوجه‌به شرط توقف مطابق گام‌های زیر تخمین زده می‌شود.

گام‌های تخمین پارامتر

١) تخمین اولیه‌ای از $\boldsymbol{\beta}$ را به دست آورده و $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$ بنامید. توجه کنید این مقدار اولیه براساس تخمین حداقل مربعات معمولی به دست می‌آید؛ یعنی

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \qquad (١٠)$$

قرار دهید $i=0$.

٢) براساس $\hat{\mathbf{t}}^{(i)}$، مقادیر $\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}$، $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(i)}$ و $\hat{\mathbf{W}}^{(i)}$ را محاسبه کنید.

٣) $\hat{\mathbf{q}}^{(i)}=\hat{\boldsymbol{\eta}}^{(i)}+\left(\hat{\mathbf{W}}^{(i)}\right)^{-1}(\mathbf{y}-\hat{\mu}^{(i)})$ را به دست آورید.

٤) تخمین $\boldsymbol{\beta}$ را با استفاده از رابطهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i+1)}=\left(\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}^{(i)}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\hat{\mathbf{W}}^{(i)}\hat{\mathbf{q}}^{(i)}$ به‌هنگام کرده و قرار دهید $i=i+1$.

٥) گام ٢ تا ٤ را تکرار کنید. تا زمانی‌که $\varepsilon\le\dfrac{\left\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}-\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i-1)}\right\|}{\left\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i-1)}\right\|}$ شود. $\|v\|$ نرم اقلیدسی بردار v و ε مقدار ثابت کوچک (مثلا $\varepsilon=10^{-5}$) است؛ آنگاه $\hat{\boldsymbol{\beta}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}$ تخمینی مطلوب برای $\boldsymbol{\beta}$ است.

تعریف مسئله و رویکرد پیشنهادی

در جمع‌آوری داده ممکن است داده(های) پرتی درون داده‌ها وجود داشته باشند که باعث تخمین نادرست پارامترهای پروفایل‌ها شوند. برای اینکه تأثیر این نوع داده‌ها حذف یا کمتر شود از روش‌هایی با نام استوار استفاده می‌شود. این روش‌ها در مدل‌های رگرسیونی استفاده شده‌اند و عملکرد مناسب خود را در حالتی که دادهٔ آلوده وجود دارد نشان داده‌اند؛ اما در حوزهٔ کنترل فرآیند آماری و به‌طور خاص پروفایل‌ها، پژوهش‌های اندکی انجام شده است. در این مقاله رویکردی جدید برای مقاوم‌سازی پروفایل لجستیک مبتنی بر روش حداکثر درست‌نمایی وزنی[۱۷] (WMLE) ارائه شده است. این روش یکی از روش‌های استوار برای تخمین پارامترهای رگرسیون لجستیک است که مارونا و همکاران[۱۸] (۲۰۰٦) آن را ارائه داده‌اند. این روش درواقع توسعه‌یافتهٔ روش حداکثر درست‌نمایی است و به‌گونه‌ای به داده‌های پرت موجود وزن کمتری اختصاص می‌دهد.

معرفی روش حداکثر درست‌نمایی وزنی

کارول و پدرسون (۱۹۹۳) روش ساده‌ای مبتنی بر روش حداکثر تابع درست‌نمایی برای تخمین پارامترها پیشنهاد کرده‌اند. در این روش به داده‌های دورافتاده به‌صورت کاهشی وزن تخصیص داده می‌شود. یک مقیاس برای اندازه‌گیری مشاهدات به‌صورت زیر تعریف می‌شود که این مقیاس شبیه به فاصلهٔ ماهالانوبیس[۱۹] است. مارونا و همکاران (۲۰۰٦) این فاصله برای حالتی محاسبه می‌شود که متغیر x ثابت نبوده و فرآیند استوارسازی روی آن انجام شود.

$$h_n(x) = ((\mathbf{x}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_n)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n^{-1}(\mathbf{x}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_n))^{1/2}, \qquad (۱۱)$$

به‌طوری‌که $\hat{\boldsymbol{\mu}}_n$ بردار میانگین مقادیر $\mathbf{x}$ و $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n$ ماتریس واریانس-کوواریانس این مقادیر است و n تعداد مشاهدات را نشان می‌دهد. در کتاب مذکور، روش برمبنای توزیع برنولی توسعه داده شده است؛ ولی در این مقاله روش پیشنهادی برمبنای توزیع بینم است که در قسمت زیر تشریح می‌شود.

روش پیشنهادی

در پروفایل‌ها چون مقادیر x ثابت فرض می‌شوند و قصد بر این است که مشاهدات (y) نسبت به میانگین آنها استوار شود، فاصلهٔ آماری به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$h_n(y_i) = \frac{y_i - \mu_{y_i}}{\sigma_{y_i}}, \qquad (۱۲)$$

در رابطهٔ فوق $\mu_{y_i} = m.\pi_i$ و $\sigma_{y_i} = \sqrt{m.\pi_i.(1-\pi_i)}$ است. درواقع این فاصله می‌خواهد مقیاسی استانداردشده از فاصلهٔ مشاهدات از میانگین را نشان دهد. به این فاصله، باقیماندهٔ پیرسون[۲۰] نیز اطلاق می‌شود. حال با استفاده از تابع توزیع دوجمله‌ای رابطه‌ای برای تخمین استوار پارامترها ارائه می‌شود. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی دوجمله‌ای برابر است با:

$$P(y) = \binom{m}{y}.[p\ (\beta)]^{y}.(1-p(\beta))^{(m-y)}, \qquad (۱۳)$$

تابع درست‌نمایی برای پارامتر β در رابطهٔ بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n}\binom{m_i}{y_i}.[p_i\ (\beta)]^{y_i}.(1-p_i\ (\beta))^{(m-y_i)}, \qquad (۱٤)$$

اگر از طرفین لگاریتم گرفته شود و عباراتی حذف شوند که به پارامتر β بستگی ندارند، رابطهٔ (۱۵) به دست می‌آید.

$$\log L(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i\log p_i(\beta)+(m_i-y_i)\log(1-p_i(\beta))\}. \qquad (۱۵)$$

تخمین استوار برای به دست آوردن پارامترها از حداقل‌کردن تابع فوق حاصل می‌شود؛ ولی برای اینکه به مشاهدات پرت وزن کمتری داده شود می‌توان رابطه زیر را در نظر گرفت و آن را حداقل کرد.

$$\sum_{i=1}^{n}w_i(y_i\log p_i(\beta)+(m_i-y_i)(\log(1-p_i(\beta))), \qquad (۱۶)$$

w_i به‌صورت رابطهٔ (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$w_i=W(h_n(y_i)), \qquad (۱۷)$$

در رابطهٔ فوق W تابعی غیرصعودی است. کارول و پدرسون (۱۹۹۳) تابع زیر را برای محاسبهٔ W پیشنهاد دادند. ($c>0$)

$$W(u)=(1-\frac{u^2}{c^2})^3 I(|u|\le c), \qquad (۱۸)$$

در رابطهٔ فوق c مقداری دلخواه است و اگر $|u|\le c$ باشد، مقدار تابع I برابر با یک است؛ در غیر این صورت صفر خواهد شد. الگوریتم محاسبهٔ پارامتر β به‌صورت زیر است:

۱- ابتدا مقدار اولیه برای β در نظر گرفته می‌شود؛ مثلاً مقداری که به‌وسیلهٔ روش MLE به دست آمده است.

۲- با قراردادن مقدار اولیه در رابطهٔ (۱۶) یک عدد حاصل و ثبت می‌شود.

۳- سپس با تغییر پارامتر β تعیین می‌شود که تغییر رابطهٔ (۱۶) افزایشی یا کاهشی است (مقدار کمتر برای این رابطه دنبال می‌شود).

۴- پس از یافتن جهت حرکت، مقادیر β تا آنجایی تغییر داده می‌شود که دیگر رابطهٔ (۱۶) تغییر محسوسی نداشته باشد؛ درواقع اختلاف دو جواب کمتر از ε شود (در اینجا ε برابر 10^{-4} فرض شده است).

در این بخش از روش حداکثر درست‌نمایی وزنی برای تخمین استوار پارامترهای مدل استفاده شد. در ادامه برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی نتایج که شامل برآورد پارامترهای مدل و احتمال خطای نوع ۱ و توان آزمون است با نتایج حاصل از روش حداکثر درست‌نمایی مقایسه می‌شود.

پایش پروفایل لجستیک

برای پایش پروفایل‌ها در فاز ۱ روش‌های متداولی وجود دارد که از مهم‌ترین آنها روش T^2 است. در مقالهٔ یه و همکاران (۲۰۰۹) نیز از این روش استفاده شده است. در مقالهٔ مذکور با ۵ روش T^2 محاسبه شد که بهترین آنها از لحاظ کشف شیفت‌ها T_I^2 است. این روش مبتنی بر میانگین نمونه و ادغام بین پروفایل‌ها[۲۱] است.

در این روش پس از تخمین پارامترها، آماره T^2 به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$T_{I,j}^2 = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \bar{\hat{\boldsymbol{\beta}}}\right)' \mathbf{S}_I^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \bar{\hat{\boldsymbol{\beta}}}\right), \qquad (۱۹)$$

در این رابطه، $\mathbf{S_I}$ از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{S}_I^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{j}}) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{var}(\mathbf{X}' \mathrm{W_j}\, \mathbf{X})^{-1}, \qquad (۲۰)$$

در رابطهٔ فوق $\mathbf{W}$ از رابطه‌ای که در بخش ۲-۱ ذکر شد به دست می‌آید.

مثال عددی

مثال منتخب برای این مقاله مثال موجود در یه و همکاران (۲۰۰۹) است. در این مثال $\mathbf{x}$ یا بردار متغیرهای مستقل دارای ۹ سطح است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{x} = [\log(0.1), \log(0.2), \log(0.3), \log(0.4), \log(0.5), \log(0.6), \log(0.7), \log(0.8), \log(0.9)]$$

در این مثال هر متغیر پاسخ برابر با مجموع $m=$ ۳۰ متغیر برنولی است؛ درنتیجه دارای توزیع دوجمله‌ای (بینم) با ۳۰ آزمایش است و در هربار شبیه‌سازی $k=$ ۳۰ پروفایل تولید می‌شود. برای تولید این داده‌ها از تابع رابط لجیت به‌صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\pi_i = \frac{e^{3+2x_i}}{1+e^{3+2x_i}}, \qquad (۲۱)$$

در این مثال $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ است که $\beta_0 =$ ۳ و $\beta_1 =$ ۲ است. احتمال خطای نوع ۱ روی مقدار ۰/۰۵ ثابت شده است. برای ایجاد داده‌های پرت از رابطهٔ (۲۲) استفاده می‌شود.

$$\pi_i = \frac{e^{x_i^T \beta + \varepsilon_i}}{1+e^{x_i^T \beta + \varepsilon_i}}, \qquad (۲۲)$$

در این رابطه εها دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. در این‌صورت مقادیر به‌دست‌آمده احتمال خطای نوع ۱ برای حد بالای کنترل T_I^2 تغییر می‌یابد. اگر واریانس خطاها (σ^2) یک در نظر گرفته شود، تغییر احتمال خطای نوع ۱ برای هر دو روش برآورد در جدول شماره ۱ نشان داده شده است.

جدول۱- مقادیر احتمال خطای نوع ۱ پس از افزودن ε

روش تخمین	MLE	WMLE
احتمال خطای نوع ۱	۰/۱۲٤۲	۰/۰۷۱۸

پس از به دست آوردن حد بالای کنترل برای هریک از روش‌ها برای رابطهٔ (۲۲)، اثر داده‌های پرت به‌وسیلهٔ افزایش واریانس خطاها بررسی می‌شود. اگر برای پروفایل‌های ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵ و ۳۰ از ۹ سطح موجود برای $\mathbf{x}$ که سه سطح آن به‌تصادف انتخاب شده است، واریانس خطاها از ۱ به ٤ افزایش یابد، مقادیر برآورد پارامترهای مدل برای ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی در جداول (۲) تا (۵) نشان داده شده است.

در جدول ۲ مقادیر میانگین و در جدول ۳ مقادیر انحراف استاندارد برای برآورد پارامتر β_0 برای حالتی که به $\beta_0 + \delta$ شیفت کرده است، تحت مقادیر مختلف δ با روش پیشنهادی و روش حداکثر درست‌نمایی نشان داده شده است.

جدول ۲- مقادیر میانگین برآورد پارامتر β_0 درحالت افزایش واریانس خطاها

δ	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
MLE	۳/۶۱۴۲	۳/۸۹۴۵	۳/۹۹۸۲	٤/۱۱۲۷	٤/۳۰۱۹	٤/٦۱۱۲
WMLE	۳/۱۷٤۹	۳/۱۸۸۹	۳/۲۰۱۸	۳/٤۷۲۰	۳/٦۱۰۲	۳/۸۰۱٦

جدول ۳- مقادیر انحراف استاندارد برآورد پارامتر β_0 در حالت افزایش واریانس خطاها

δ	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
MLE	۱/۱۲٤۵	۱/٤۷۸۰	۱/۷۲۱۱	۲/۰۱٤۵	۲/۲۰۳٤	۲/۷۱۲۰
WMLE	۰/٤۸۹۹	۰/۵۰۷۹	۰/٦۲۷۵	۰/۸۰۱۲	۰/۹۹٤۲	۱/۰۰۱۰

حال مقادیر میانگین و انحراف استاندارد برآورد پارامتر β_1 درحالتی‌که این پارامتر به $\beta_1+\lambda$ شیفت کرده است، برای مقادیر مختلف λ با دو روش برآوردِ ذکرشده محاسبه و در جداول ٤ و ۵ آورده شده است.

جدول ٤- مقادیر میانگین برآورد پارامتر β_1 در حالت افزایش واریانس خطاها

λ	۰	۰/۳	۰/٦	۰/۹	۱/۲	۱/۵
MLE	۲/٤۱۲۰	۲/٦۱۱۷	۲/۸۰۱۸	۲/۹۹۲۵	۳/۲۰۱۷	۳/٤۲۵۵
WMLE	۲/۱۰۰۵	۲/۱۱۷۹	۲/۲۰۱۷	۲/۳۱۱۸	۲/٤٤۵۹	۲/۵۷۷۹

جدول ۵- مقادیر انحراف استاندارد برآورد پارامتر β_1 در حالت افزایش واریانس خطاها

λ	۰	۰/۳	۰/٦	۰/۹	۱/۲	۱/۵
MLE	۰/۹۹۷۱	۱/۱۲۰۵	۱/۵۲۳۵	۱/۹۱۲۸	۲/۳۱۷۹	۲/۷۷۸۵
WMLE	۰/۳۰۲۷	۰/٤٤۷۹	۰/۵۸۹۲	۰/٦۷۷۵	۰/۷۱۱۲	۱/۰۱۲۷

همان‌طورکه مشاهده می‌شود درحالتی‌که واریانس خطاها افزایش می‌یابد، میانگین و انحراف استاندارد تخمین پارامترها به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌گیرد. این تغییرات بسیار محسوس‌تر از حالتی است که فقط در پروفایل‌ها شیفت باشد؛ زیرا با تغییر واریانس خطاها، داده‌های پرتی درون پروفایل‌ها ایجاد می‌شود که روش کلاسیک MLE از آن‌ها تأثیر زیادی می‌پذیرد و روی تخمین پارامترها اثر منفی می‌گذارد. از سوی دیگر همان‌گونه در جداول بالا مشخص است روش پیشنهادی به‌مراتب تأثیرپذیری کمتری از داده‌های پرت دارد و با وزن‌دادن به داده‌هایی که دورافتاده هستند تخمین بهتری از پارامترها به دست می‌آید.

حال احتمال خطای نوع ۱ نمودار کنترل T^2 در حضور داده‌های پرت در سطوح مشخص از طریق افزایش واریانس خطاها محاسبه و نتایج در جدول ٦ نشان داده شده است.

جدول ٦- مقادیر احتمال خطای نوع ۱ پس از افزایش واریانس خطاها

روش تخمین	MLE	WMLE
احتمال خطای نوع ۱	۰/۲۵٤۳	۰/۱۲۵۱

همان‌گونه‌که از جدول ٦ مشخص است درصورت وجود داده‌های آلوده که از طریق افزایش واریانس خطاها به دست می‌آید، روش استوار به‌مراتب عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

حال برای مقایسهٔ توان نمودار کنترل T^2 زمانی‌که پارامترهای پروفایل با روش پیشنهادی و روش کلاسیک

تخمین زده می‌شوند، حد کنترل بالا به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که احتمال خطای نوع ۱ برابر ۰/۰۵ برای نمودار کنترل برمبنای هر دو روش تخمین به دست آید. سپس با شیفت‌دادن در پارامترهای رگرسیون لجستیک توان نمودار کنترل تحت شیفت‌های مختلف در پارامترهای β_0 و β_1 محاسبه می‌شود.

جدول ۷- مقادیر احتمال خطای نوع ۱ و توان آزمون برای شیفت در پارامتر β_0

δ	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
MLE	۰/۰۵۰۰	۰/۰۵٦۲	۰/۰٦٦۱	۰/۰۷٦۱	۰/۰۸۹۱	۰/۱۰۰۵
WMLE	۰/۰٤۹۹	۰/۰۵۸۹	۰/۰۷۵۷	۰/۰۹۰۱	۰/۱۰۹۸	۰/۱۲۷۵

جدول ۸- مقادیر احتمال خطای نوع ۱ و توان آزمون برای شیفت در پارامتر β_1

λ	۰	۰/۳	۰/٦	۰/۹	۱/۲	۱/۵
MLE	۰/۰۵۰۰	۰/۰۵٦۹	۰/۰٦۵۳	۰/۰۷۵۵	۰/۰۸٦۵	۰/۰۹۵۷
WMLE	۰/۰۵۰۲	۰/۰۵۹۱	۰/۰۷٦۲	۰/۰۸۸۱	۰/۰۹۹۷	۰/۱۰۹۸

باتوجه‌به جداول ۷ و ۸ نتیجه می‌شود که با ایجاد شیفت در پارامترهای رگرسیون لجستیک، توان نمودار کنترل برمبنای روش پیشنهادی از روش کلاسیک حداکثر درست‌نمایی بالاتر است. این مطلب نشان‌دهندهٔ عملکرد بهتر روش پیشنهادی است.

در این بخش نحوهٔ آلوده‌کردن داده‌ها تغییر داده می‌شود؛ به این صورت که درصدی (r) از کل داده‌های موجود با افزایش واریانس خطاها آلوده می‌شود. در جدول ۹ برای r برابر با ۰/۰۷ و ۰/۱۵ واریانس خطاها از ۱ به ٤ تغییر داده شده و احتمال خطای نوع ۱ نمودار کنترل T^2 تحت هر دو روش پیشنهادی و کلاسیک تخمین محاسبه و گزارش شده است.

جدول ۹- احتمال خطای نوع ۱ در حالت خطای کلی

	روش برآورد	احتمال خطای نوع ۱
r=۰/۰۷	MLE	۰/۱۸۰۱
	WMLE	۰/۱۰۲۱
r=۰/۱۵	MLE	۰/۲۷۷۹
	WMLE	۰/۱۵٤۱

همان‌طورکه مشخص است در روش کلاسیک احتمال خطای نوع ۱ به‌شدت تحت تأثیر داده‌های پرت قرار می‌گیرد؛ ولی روش پیشنهادی به‌مراتب عملکرد بهتری نسبت به روش معمول دارد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش استوار برای تخمین پارامترهای پروفایل لجستیک استفاده و با روش کلاسیکِ حداکثر درست‌نمایی مقایسه شد. این دو روش در حالتی که داده‌های پرت درون داده‌ها وجود دارند از لحاظ تخمین پارامترها و احتمال خطای نوع ۱ و توان نمودار کنترل با هم مقایسه شدند. البته در این مقاله دو نوع آلودگی به‌صورت جداگانه در نظر گرفته شد. با مقایسهٔ نتایج مشخص می‌شود هرگاه دادهٔ پرت در مشاهدات وجود داشته باشد، روش کلاسیکِ حداکثر درست‌نمایی کارایی خود را به‌طور کامل از دست می‌دهد. در مقابل روش پیشنهادی

حداکثر درست‌نمایی وزنی به‌مراتب عملکرد مناسب‌تری نسبت به روش کلاسیک دارد. این نتیجه از تخمین‌های پارامترها، احتمال خطای نوع ۱ و توان نمودار کنترل برای پایش پروفایل‌های لجستیک در فاز ۱ مشاهده می‌شود؛ به عبارت دیگر هدف از این پژوهش نشان‌دادن عملکرد روش WMLE نسبت به روش MLE برای تخمین پارامترهای پروفایل رگرسیون لجستیک با حضور داده‌های پرت بوده که بدین‌منظور از مثال شبیه‌سازی استفاده و برمبنای تخمین پارامترها، معیارهای هشدار اشتباهی و توان نمودار کنترل تحلیل شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان داد روش WMLE به‌دلیل تخصیص وزن کمتر به داده‌های پرت و کاهش اثر این داده‌ها، عملکرد بهتری را در تخمین پارامتر از خود نشان داده است. بسیاری از پژوهشگران نیز برای نشان‌دادن و ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی خود از مثال شبیه‌سازی استفاده کرده‌اند؛ برای مثال می‌توان به پژوهش‌های اسدزاده و همکاران[۲۲] (۲۰۰۹)، شهریاری و همکاران[۲۳] (۲۰۰۹)، و عبادی و شهریاری (۲۰۱٤) اشاره کرد.

References

Noorossana, R., & Izadbakhsh, H.R., (2013), “Profile Monitoring for Multinomial Responses” *International Journal of Industrial Engineering & Production Managemen*, 23 (4), 417-429.

Asadzadeh, S. Aghaie, A, Shahriari, H. (2009), “Monitoring Dependent Process Steps Using Robust Cause-selecting Control Charts”, *Quality and Reliability Engineering International*, 25(2), 851–874.

Carroll, R.J., & Pederson, S., (1993), "On robustness in the logistic regression model", *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, 2(55), 693–706.

Ebadi, M., & Shahriari, H., (2014), "Robust Estimation of Parameters in Simple Linear Profiles Using M-Estimators", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 43(20), 4308-4323.

Huber, P. J., (1981), "Robust Statistics", John Wiley & Sons, New York.

Kang, L., & Albin, S.L., (2000), "On-Line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile", *Journal of Quality Technology*, 32(4), 418-426.

Mahmoud, M.A., & Woodall, W.H., (2004), "Phase I Analysis of Linear Profiles with Calibration Applications", *Technometrics*, 3(46), 380-391.

Maronna, AR., Martin, R.D., & Yohai, V.J., (2006), Robust Statistics Theory and Methods, John Wiley, New York.

Montgomery, D.C., Peck, & E.A., Vining, G., (2015), Introduction to linear regression analysis (4th ed.), John Wiley & Sons, New York.

Noorossana, R., Saghaei, A., & Amiri, A., (2011), "Statistical Analysis of Profile Monitoring", John Wiley & Sons, Inc.

Saghaei, A., Mehrjoo, M., & Amiri, A., (2009), "A CUSUM-based Method for Monitoring Simple Linear Profiles". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 45(10), 1252-1260.

Saghaei, A., Rezazadeh-Saghaei, M,. Noorossana, R., & Dorri, M., (2012),"Phase II Logistic Profile Monitoring",*International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, 23(4), 291-299.

Shahriari, H., Maddahi, A., Shokouhi, A.H. (2009), “A Robust Dispersion Control Chart Based on M-estimate”, *Journal of Industrial and System Engineering*, 2(4), 297-307.

Vaghefi, A., Tajbakhsh S.D., & Noorossana, R., (2009), "Phase II Monitoring of Nonlinear Profiles", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 21(38), 1834-1851.

Williams, J. D., Woodall, W. H., & Birch, J. B., (2003), "Phase I Monitoring of Nonlinear Profiles"., paper presented at the *2003 Quality and Productivity Research Conference*, Yorktown Heights, New York.

Williams J.D., Woodall W.H., & Birch, J.B, (2007), "Statistical Monitoring of Nonlinear Product and Process Quality Profiles", *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2), 925-941.

Woodall, W.H., (2007), "Current Research on Profile Monitoring", *Revista Producão*, 12(17), 420-436.

Yeh A.B., Huwang L., & Li Y.M., (2009), "Profile Monitoring for a Binary Response", *IIE Transactions*, 41(13), 931-941.

Zhang J., Li Z. H., & Wang Z. H, (2009), "Control Chart Based on Likelihood Ratio for Monitoring Linear Profiles". *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(7), 1440-1448.

Zhu J., & Lin D.K., (2010), "Monitoring the Slopes of Linear Profiles". *Quality Engineering*, 33(1), 1-12.

Zou, C., Tsung, F., & Wang, Z., (2008), "Monitoring Profiles Based on Nonparametric Regression Methods", *Technometrics*, 21(50), 512-526.

[1] Kang and Albin
[2] Mahmoud and Woodall
[3] Zhang et al.
[4] Zhu and Lin
[5] Williams et al.
[6] Zou et al.
[7] Vaghefi et al.
[8] Generalized Linear Model
[9] Yeh et al.
[10] Saghaei et al.
[11] Mean Square
[12] Maximum Likelihood
[13] Outlier
[14] Montgomery et al.
[15] Huber
[16] Ebadi and Shahriari
[17] Weighted Maximum Likelihood Method
[18] Maronna et al.
[19] Mahalanobis
[20] Pearson Residual
[21] T^2 based on sample average and intra profile pooling
[22] Asadzadeh et al.
[23] Shahriari et al.