فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی
واحد سنندج – سال دوازدهم/ شماره ۴۱ / پاییز ۱۳۹۶

# مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای مبتنی بر TOPSIS

**حسین عزیزی**
گروه ریاضی، واحد پارس‌آباد مغان، دانشگاه آزاد اسلامی، پارس‌آباد مغان، ایران
**Email:azizhossein@gmail.com**
**علیرضا امیرتیموری**
گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران
**سهراب کردرستمی**
گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ دریافت: ۹۵/۸/۲۳ * تاریخ پذیرش: ۹۶/۹/۱

## چکیده
تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای سنجش عملکرد گروهی از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که از ورودی‌های متعدد برای تولید خروجی‌های متعدد استفاده می‌کنند. این مقاله دو DMUی مجازی به نام DMUی ایده‌آل و DMUی آنتی‌ایده‌آل را وارد DEAی بازه‌ای می‌کند. مدل‌های DEAی بازه‌ای به دست آمده به ترتیب DEAی بازه‌ای با DMUهای ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل نامیده می‌شوند. یکی از آنها DMUها را از دیدگاه کارآیی خوشبینانه ارزیابی می‌کند، در حالی که دیگری آنها را از دیدگاه کارآیی بدبینانه ارزیابی می‌کند. این دو کارآیی بازه‌ای متمایز با هم ترکیب می‌شوند و یک شاخص جامع به نام نزدیکی نسبی به DMUی ایده‌آل را درست مانند رویکرد روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل در تصمیم چندشاخصی تشکیل می‌دهند. سپس از شاخص نزدیکی نسبی به عنوان سنجش کلی هر DMU استفاده می‌شود و بر مبنای آن یک رتبه‌بندی کلی برای همه‌ی DMUها به دست می‌آید. یک مثال نیز در زمینه‌ی ارزیابی عملکرد بیست شعبه‌ی بانک ارائه خواهد شد که نشان می‌دهد که رویکرد DEAی بازه‌ای پیشنهادی یک روش ساده، مؤثر و عملی برای اندازه‌گیری عملکرد در موقعیت‌های زندگی واقعی است.

**کلمات کلیدی**: تحلیل پوششی داده‌ه، داده‌های بازه‌ای، واحدهای تصمیم‌گیری ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل، TOPSIS، نزدیکی نسبی، رتبه‌بندی.

## ۱-مقدمه

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها[۱] (DEA)، که به طور معمول برای ارزیابی کارآیی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری[۲] (DMUها) به کار می‌روند، فرض می‌کنند که داده‌های مربوط به تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها به طور دقیق معلوم هستند. اما در برخی از کاربردها، برخی از عوامل ممکن است مشتمل بر داده‌های نادقیق باشند. به عنوان مثال، در مورد یک عامل کیفی (مثلاً سهولت استفاده، سطح مهارت کارگران)، خیلی از اوقات ممکن است یک کارشناس بگوید که $DMU_1$ بهترین است، $DMU_2$ در مرتبه‌ی دوم است، و الی آخر. در عوض می‌توان عملکردها DMUها را به چند گروه تقسیم کرد (مثلاً خوب، متوسط، ضعیف). Cook و همکاران طریقه‌ی بسط DEA برای کار با اینگونه داده‌های ترتیبی را نشان دادند (Cook, Kress, & Seiford, 19961993 ,). در برخی از موارد، ممکن است کارشناس بگوید که عملکرد $DMU_1$ از نظر یک عامل بیش از دو برابر و کمتر از سه برابر $DMU_2$ است. همچنین، می‌توان گفت که $DMU_2$ در مقایسه با $DMU_1$ در سطح بین ۷۰ و ۸۰ است.

داده‌های نادقیق موجود بستگی به مسئله‌ی مورد نظر و جزئیات خاص آن، مانند دانش قبلی یا تجربیات موجود در مورد عامل ارزیابی، دارد. در حالت کلی، انواع مختلفی از داده‌های نادقیق شامل موارد فوق‌الذکر وجود دارد. در مقالات تحلیل تصمیم چندمعیاره[۳]، می‌توانیم بحث گسترده‌تری در مورد استفاده از داده‌های نادقیق پیدا کنیم، که در آن انواع مختلف داده‌های نادقیق که در عمل بروز می‌کنند، بررسی شده‌اند (Kyung Sam Park & Kim, 1997; Sage & White, 1984). موقعیت‌های مشابهی به خاطر شباهت ساختاری بین تحلیل تصمیم چندمعیاره و DEA در زمینه‌ی DEA وجود دارند (Belton & Vickers, 1993; Bouyssou, 1999; Stewart, 1996).

برای کار با داده‌های نادقیق پیشگفته به همراه DEA، Cooper و همکاران DEAی نادقیق را به عنوان مجموعه‌ای از مفاهیم و روش‌ها پیشنهاد کردند (William W. Cooper, Park, & Yu, 1999). Kim و همکاران نخستین بار آن را برای ارزیابی کارآیی دفاتر تلفن در کره استفاده کردند (Kim, Park, & Park, 1999). Cooper و همکاران کاربرد روش DEAی نادقیق را در مثالی در مورد شرکت مخابرات سیار کره نشان دادند (W. W. Cooper, Park, & Yu, 2001b). روشی نیز برای تبدیل مدل DEAی غیرخطی به یک مدل هم‌ارز خطی ابداع شده است، زیرا برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها، متغیرهای تصمیم ناشناخته هستند. همچنین، برای جزئیات مربوط به تبدیل‌ها، رک. Cooper و همکاران، و Park، که در این میان، مقاله‌ی Park تکنیک‌های تبدیل ارائه شده توسط Cooper و همکاران را ساده کرده است (W. W. Cooper, Park, & Yu, 2001a; W. W. Cooper et al., 2001b; William W. Cooper et al., 1999; K. S. Park, 2004).

این نوع روش‌ها به صورت عمومی برای کار با داده‌های نادقیق برای نامعادلات خطی دلخواه ایجاد شده‌اند. در عین حال، Zhu نشان داد که همین نمرات کارآیی را می‌توان به طور مؤثر با بکارگیری آلگوریتم دیگری برای حل و فصل مسئله‌ی DEAی نادقیق غیرخطی در رابطه با داده‌های نادقیق خاص (ولی معمولی)، مانند رتبه‌ای و داده‌های کراندار، به دست آورد (Zhu, 20042003 ,). با آنکه آلگوریتم‌ها متفاوت هستند، ولی به نمرات کارآیی یکسانی منتهی می‌شوند، و لذا واحدها را به صورت یکسانی به گروه‌های کارآ و غیرکارآ تقسیم می‌کنند.

Despotis و Smirlis داده‌های بازه‌ای یا کراندار در DEA را بررسی کردند، و یک طبقه‌بندی سه‌دسته‌ای کارآیی را نشان دادند (Despotis & Smirlis, 2002). کارهای Kao و Liu با وضعیت نسبتاً متفاوتی سر و کار داشت که در آن داده‌های فازی در DEA وجود داشتند که به این حالت DEAی فازی می‌گویند (Kao & Liu, 2000a, 2000b). علیرغم انواع متفاوت داده‌ها، رویکرد فازی از داده‌های فازی داده شده، داده‌های کراندار ایجاد می‌کند. Wang و همکاران زوج جدیدی از مدل‌های DEAی بازه‌ای را برای کار با داده‌های نادقیق، از قبیل داده‌های بازه‌ای، اطلاعات ترجیح ترتیبی، داده‌های فازی و مخلوط آنها تشکیل دادند (Wang, Greatbanks, & Yang, 2005). مدل‌های DEAی بازه‌ای آنها، در مقایسه با مدل DEAی نادقیق ابداع شده توسط Cooper و همکاران، آسان‌فهم‌تر و سهل‌الاستفاده‌ترند (W. W. Cooper et al., 

---

[1] Data envelopment analysis (DEA).
[2] Decision-making units (DMUs).
[3] Multi-criteria decision analysis (MCDA).

Despotis ,2001b; William W. Cooper et al., 19992001a). همچنین، در مقایسه با مدل‌های DEAی بازه‌ای Despotis و Smirlis، مدل‌های DEAی بازه‌ای آنها از مرز تولید ثابت و یکنواختی به عنوان محک برای اندازه‌گیری کارآیی همه‌ی DMUها استفاده می‌کنند، که مدل‌های آنها را عقلانی و مطمئن‌تر می‌کند. به علاوه، روش کار آنها با اطلاعات ترجیح ترتیبی نسبت به روش Zhu معقول‌تر به نظر می‌رسد (Zhu, 2003). اخیراً Azizi و Ganjeh Ajirlu رویکرد DEAی بدترین عملکرد را برای اندازه‌گیری کارآیی هر DMU با داده‌های نادقیق معرفی کرده‌اند (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011). رویکرد DEAی پیشنهادی آنها، کارآیی هر DMU را نسبت به مرز بدترین عملکرد (مرز ناکارآیی) اندازه‌گیری می‌کند و کارآیی بدبینانه نامیده می‌شود. مدل‌های DEAی بازه‌ای آنها داده‌های قطعی، ترتیبی، بازه‌ای، عوامل غیرقابل کنترل و مخلوط آنها را به طور همزمان برای اندازه‌گیری کارآیی‌های نسبی DMUها در نظر می‌گیرند. همچنین، مدل‌های DEAی بازه‌ای آنها، می‌توانند بدترین DMUها را به آسانی و به درستی شناسایی کنند.

DEA سنتی، که توسط Charnes و همکاران ابداع شده است (Charnes, Cooper, & Rhodes, 1978)، DMUها را از زاویه‌ی کارآیی خوشبینانه ارزیابی می‌کند. اگر یک DMU کارآیی خوشبینانه‌ی واحد داشته باشد، آنگاه گفته می‌شود که کارآی DEA است؛ در غیر این صورت، گفته می‌شود که غیرکارآی DEA است. همواره تصور بر این است که DMUهای کارآی DEA عملکردی بهتر از DMUهای غیرکارآی DEA دارند. معذالک، اگر یک DMUی کارآی DEA در ارزیابی از دیدگاه بدبینانه، کارآیی نسبی بدتری نسبت به یک DMUی غیرکارآی DEA داشته باشد، آیا باز هم می‌توانیم بگوییم که DMUی کارآی DEA عملکردی بهتر از DMUی غیرکارآی DEA دارد؟ در این موقعیت، نتیجه‌گیری مسلماً نامشخص است. بنابراین، مشخصاً این ضرورت وجود دارد که کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه را ترکیب کنیم تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید.

Entani و همکاران کارآیی‌های DEA را هم از دیدگاه خوشبینانه و هم از دیدگاه بدبینانه در نظر گرفتند (Entani, Maeda, & Tanaka, 2002). در مدل‌های DEAی آنها، با استفاده از کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه، یک بازه تشکیل می‌شود. ولی مدل آنها برای محاسبه‌ی کارآیی بدبینانه دارای یک عیب اساسی است و آن این است که برخی اطلاعات ورودی و خروجی را در نظر نمی‌گیرد، زیرا عملاً فقط داده‌های یک ورودی و یک خروجی از DMUی مورد ارزیابی استفاده می‌شوند و بقیه‌ی داده‌های ورودی و خروجی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

Wang و Yang دو مدل کراندار DEA، برای داده‌های دقیق ارائه کردند (Wang & Yang, 2007). زوج مدل کراندار DEA، بیشترین استفاده را از همه‌ی اطلاعات ورودی و خروجی به عمل می‌آورند و کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ی هر DMU را با وارد کردن یک DMUی آنتی‌ایده‌آل (ADMU) اندازه‌گیری می‌کنند، که بیشترین مقدار ورودی را مصرف می‌کند ولی فقط کمترین مقدار خروجی را تولید می‌نماید. بنابراین، می‌توانند هر دو مرز کارآیی و ناکارآیی را شناسایی کنند.

Wang و Luo مسایل ارزیابی کارآیی DEA را به صورت متفاوتی بررسی کردند (Wang & Luo, 2006). آنها یک DMUی ایده‌آل مجازی (IDMU) را نیز وارد مدل DEA کردند. دو DMUی مجازی (IDMU و ADMU)، برای ساخت دو مدل DEA به ترتیب برای محاسبه‌ی کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه استفاده شدند. سپس این دو کارآیی متمایز با استفاده از رویکرد مشهور روش ترجیح ترتیب بر اساس شباهت به جواب ایده‌آل[۴] (TOPSIS) در تصمیم‌گیری چندشاخصی[۵] تلفیق شدند تا یک شاخص مرکب به نام نزدیکی نسبی[۶] (RC) به IDMU به دست آید. شاخص RC به عنوان اندازه‌ای از سنجش کلی هر DMU استفاده شد، و بر اساس آن یک رتبه‌بندی کلی را برای DMUها ایجاد کردند. بنابراین، ارزش دارد که رویکرد آنها را برای داده‌های نادقیق بسط بدهیم. ما مدل‌های خود را برای یک مجموعه‌ی داده‌های واقعی به کار می‌بریم که در مقاله‌ی Jahanshahloo و همکاران ارائه شده است و به نتایج ارزیابی مفیدتری منتهی می‌شود (Jahanshahloo, Hosseinzadeh Lotfi, Rostamy Malkhalifeh, & Ahadzadeh Namin, 2009).

---

[4] Technique for order preference by similarity to ideal solution (TOPSIS).
[5] Multiple attribute decision making (MADM).
[6] Relative closeness (RC).

## ۲- مواد و روش‌ها

فرض کنید $n$ DMU باید ارزیابی شوند. هر DMU $m$ ورودی را برای تولید $s$ خروجی مصرف می‌کند. به طور خاص، $\mathrm{DMU}_j$ مقادیر $X_j = \{x_{ij}\}$ از ورودی ($i = 1, \ldots, m$) را مصرف می‌کند و مقادیر $Y_j = \{y_{rj}\}$ از خروجی ($r = 1, \ldots, s$) را تولید می‌کند. بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض می‌شود که همه‌ی داده‌های $x_{ij}$ و $y_{rj}$ ($i = 1, \ldots, m$، $r = 1, \ldots, s$، و $j = 1, \ldots, n$) به علت وجود عدم اطمینان به طور دقیق قابل تعیین نیستند. فقط می‌دانیم که در درون کران‌های بالا و پایین تعیین شده به صورت $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ و $[y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ قرار دارند، که در اینجا $x_{ij}^L > 0$ و $y_{rj}^L > 0$.

برای کار کردن با چنین موقعیت نامطمئنی، Wang و همکاران مدل‌های برنامه‌ریزی خطی[7] (LP) زیر را برای به دست آوردن کران‌های بالا و پایین کارآیی هر DMU ارائه کردند، که کارآیی‌های خوشبینانه‌ی DMUها را اندازه‌گیری می‌کنند (Wang et al., 2005):

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^L = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{۱}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^L \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{۲}$$

که در اینجا $\mathrm{DMU}_o$ نشان دهنده‌ی DMUی مورد ارزیابی است و $v_i$ ($i = 1, \ldots, m$) و $u_r$ ($r = 1, \ldots, s$) متغیرهای تصمیم‌گیری و $\varepsilon$ بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی است. $\theta_o^U$ و $\theta_o^L$ به ترتیب کارآیی‌های خوشبینانه تحت مطلوب‌ترین موقعیت و نامطلوب‌ترین موقعیت برای $\mathrm{DMU}_o$ می‌باشند. آنها بازه‌ی کارآیی خوشبینانه‌ی $[\theta_o^L, \theta_o^U]$ را تشکیل می‌دهند. اگر مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشند که باعث شود $\theta_o^{U*} = 1$، آنگاه $\mathrm{DMU}_o$ کارآی DEA یا کارآی خوشبینانه نامیده می‌شود؛ در غیر این صورت، به آن غیرکارآی DEA یا غیرکارآی خوشبینانه می‌گویند.

در چارچوب با ماهیت ورودی از دیدگاه بدبینانه، که مبتنی بر مجموعه‌ی نیازمندی ورودی و مرز بدترین عملکرد آن است، در صدد آن است که ضمن حفظ خروجی، حداکثر در حد فعلی، مقادیر ورودی را حتی‌الامکان افزایش دهد. که بر این واقعیت تأکید می‌کند که سطح خروجی بدون تغییر می‌ماند، و مقادیر ورودی به صورت متناسب افزایش داده می‌شوند، تا مرز بدترین عملکرد حاصل شود. برآورد کننده‌ی DEA برای مجموعه‌ی امکان تولید ناکارا، اصطلاحاً کارآیی بدبینانه و یا بدترین کارآیی نسبی نامیده می‌شود. برای یک DMUی خاص، مثلاً $\mathrm{DMU}_o$، کارآیی‌های بدبینانه را می‌توان از مدل‌های DEAی زیر محاسبه کرد (Azizi & Ganjeh Ajirlu, 2011):

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^U \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}^U = 1, \\ & u_r, v_i \ge \varepsilon, \quad r = 1, \ldots, s; \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{۳}$$

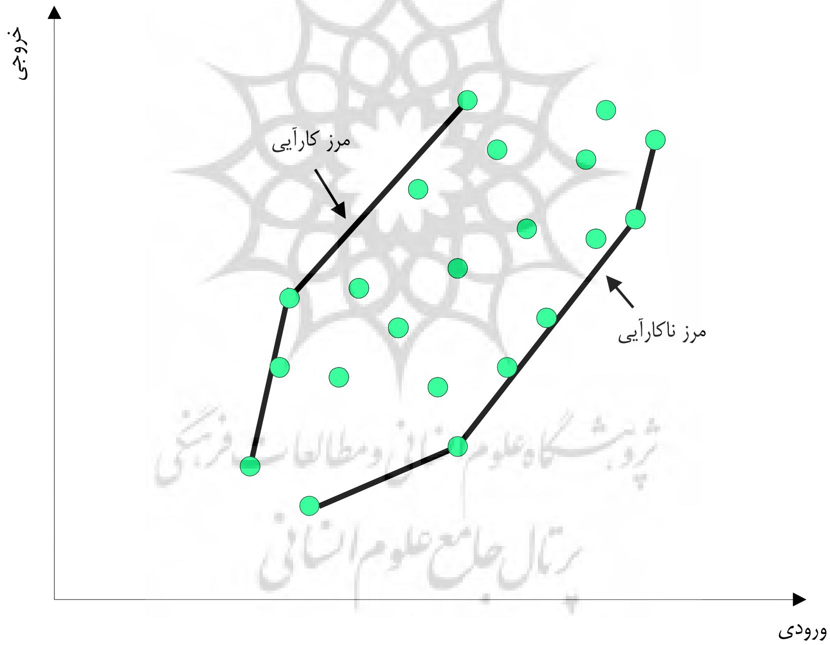
---

[7] Linear programming.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & {}_{o}^{U} \quad {}_{r\ 1}^{s} u_r y_{ro}^{U} \\
\text{s.t.} \quad & {}_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{L} - \sum_{i\ 1}^{m} v_i x_{ij}^{U} \quad 0, \quad j \quad 1,\ldots,n, \\
& \sum_{i\ 1}^{m} v_i x_{io}^{L} \quad 1, \\
& u_r, v_i \quad , \quad r=1,\ldots,s; \quad i \quad 1, \quad ,m.
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

در مدل‌های (۳) و (۴)، ${}_{o}^{L}$ کارآیی بدبینانه تحت نامطلوب‌ترین موقعیت و ${}_{o}^{U}$ کارآیی بدبینانه تحت مطلوب‌ترین موقعیت برای $\mathrm{DMU}_o$ می‌باشند. آنها برای $\mathrm{DMU}_o$ بازه‌ی کارآیی بدبینانه‌ی $[{}_{o}^{L}, {}_{o}^{U}]$ را ارائه می‌کنند. زمانی که مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشند تا 1 ${}_{o}^{L*}$ را تأمین کند، می‌گوییم که $\mathrm{DMU}_o$ ناکارآی DEA یا ناکارآی بدبینانه است. در غیر این صورت، می‌گوییم که $\mathrm{DMU}_o$ غیرناکارآی DEA یا غیرناکارآی بدبینانه است.

دقت کنید که رویکرد DEAی متعارف اکیداً بین DMUهای غیرکارآی DEA و ناکارآی DEA افتراق نمی‌دهد، و آنها را به یک معنا به کار می‌برد. اما در مدل‌های (۱)-(۴)، واحدهای غیرکارآی DEA، ناکارآی DEA، و غیرناکارآی DEA هر کدام مؤکداً افتراق داده می‌شوند، زیرا هر یک معنای خاصی دارند. واحدهای غیرکارآی DEA لزوماً نشان دهنده‌ی آن نیست که آنها ناکارآی DEA هستند. به همین ترتیب، واحدهای غیرناکارآی DEA نیز لزوماً کارآی DEA نیستند. مرزهای کارآیی و ناکارآیی با یک ورودی و یک خروجی، در شکل ۱ نشان داده شده است، که از داده‌های مشاهده شده ساخته می‌شوند.




شکل شماره (۱): مرزهای کارآیی و ناکارآیی برای یک ورودی و یک خروجی.

مشخصاً این ضرورت وجود دارد که کارآیی‌های خوشبینانه و بدبینانه را ترکیب کنیم تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید. در ادامه، مدل‌های DEAی Wang و Luo را که برای داده‌های دقیق پیاده‌سازی شده بودند را به مدل‌های DEAی بازه‌ای بسط می‌دهیم (Wang & Luo, 2006). به همین منظور، ابتدا ADMU و IDMU را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱: IDMU یک DMUی مجازی است که با مصرف کمترین مقدار ورودی، بیشترین مقدار خروجی را تولید می‌کند.

تعریف ۲: ADMU یک DMUی مجازی است که با مصرف بیشترین مقدار ورودی، کمترین مقدار خروجی را تولید می‌کند.

با توجه به تعاریف ۱ و ۲، مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های IDMU را با نماد $x_i^{L\min}$ $(i \quad 1, \quad ,m)$، $x_i^{U\min}$ $(i \quad 1,\ldots,m)$، $y_r^{L\max}$ $(r \quad 1, \quad ,s)$ و $y_r^{U\max}$ $(r \quad 1, \quad ,s)$ و مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های ADMU را با نماد $x_i^{L\max}$ $(i \quad 1, \quad ,m)$، $x_i^{U\max}$ $(i \quad 1, \quad ,m)$، $y_r^{L\min}$ $(r \quad 1, \quad ,s)$ و $y_r^{U\min}$ $(r \quad 1, \quad ,s)$ نشان می‌دهیم. این مقادیر با فرمول‌های زیر تعیین می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&x_i^{L\min} \quad \min_j\{x_{ij}^L\} \quad \text{and} \quad x_i^{L\max} \quad \max_j\{x_{ij}^L\}, \quad i \quad 1, \quad ,m,\\
&x_i^{U\min} \quad \min_j\{x_{ij}^U\} \quad \text{and} \quad x_i^{U\max} \quad \max_j\{x_{ij}^U\}, \quad i \quad 1, \quad ,m,\\
&y_r^{L\min} \quad \min_j\{y_{rj}^L\} \quad \text{and} \quad y_r^{L\max} = \max_j\{y_{rj}^L\}, \quad r=1, \quad ,s,\\
&y_r^{U\min} \quad \min_j\{y_{rj}^U\} \quad \text{and} \quad y_r^{U\max} \quad \max_j\{y_{rj}^U\}, \quad r \quad 1,\ldots,s.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

گرچه IDMU یک DMUی مجازی است، ولی رفتار تولیدی آن باید مورد تعقیب همه‌ی DMUها باشد. روشن است که IDMU باید بتواند به بالاترین کارآیی خوشبینانه دست یابد. با فرض اینکه $_{IDMU}^{*}$ کارآیی خوشبینانه‌ی IDMU باشد، می‌توان آن را از مدل‌های LP زیر به دست آورد:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & _{IDMU}^{U} \quad {}_{r\ 1}^{s} u_r y_r^{U\max}\\
\text{s.t.} \quad & {}_{r\ 1}^{s} u_r y_{rj}^U \quad {}_{i\ 1}^{m} v_i x_{ij}^L \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n,\\
& {}_{i\ 1}^{m} v_i x_i^{L\min} \quad 1,\\
& u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i \quad 1, \quad ,m,
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & _{IDMU}^{L} \quad {}_{r\ 1}^{s} u_r y_r^{L\max}\\
\text{s.t.} \quad & {}_{r\ 1}^{s} u_r y_{rj}^U \quad {}_{i\ 1}^{m} v_i x_{ij}^L \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n,\\
& {}_{i\ 1}^{m} v_i x_i^{U\min} \quad 1,\\
& u_r, v_i \quad , \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i \quad 1,\ldots,m,
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

فرض کنید [ $_{IDMU}^{L*}$ , $_{IDMU}^{U*}$ ] بازه‌ی کارآیی خوشبینانه‌ی IDMU باشد. از آنجا که این امکان وجود دارد که مدل‌های LP (۶) و (۷) بهینه‌های متعدد داشته باشد، از مدل‌های LP زیر برای تعیین کارآیی‌های خوشبینانه‌ی $\mathrm{DMU}_o$ تحت شرط بدون تغییر ماندن کارآیی‌های خوشبینانه‌ی IDMU استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & _{o}^{U} \quad \sum_{r\ 1}^{s} u_r y_{ro}^U\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r\ 1}^{s} u_r y_{rj}^U \quad {}_{i\ 1}^{m} v_i x_{ij}^L \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n,\\
& \sum_{r\ 1}^{s} u_r y_j^{U\max} \quad {}_{i\ 1}^{m} v_i(\ _{IDMU}^{U*} x_i^{L\min}) \quad 0,\\
& {}_{i\ 1}^{m} v_i x_{io}^L \quad 1,\\
& u_r, v_i \quad , \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i \quad 1, \quad ,m.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & _{o}^{L} \quad {}_{r\ 1}^{s} u_r y_{ro}^L\\
\text{s.t.} \quad & {}_{r\ 1}^{s} u_r y_{rj}^U \quad \sum_{i\ 1}^{m} v_i x_{ij}^L \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n,\\
& {}_{r\ 1}^{s} u_r y_j^{L\max} \quad {}_{i\ 1}^{m} v_i(\ _{IDMU}^{L*} x_i^{U\min}) \quad 0,\\
& {}_{i\ 1}^{m} v_i x_{io}^U \quad 1,\\
& u_r, v_i \quad , \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i=1, \quad ,m.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

کارآیی ADMU به عنوان یک DMUی مجازی مشخصاً از هر DMUی دیگر بدتر است. با فرض اینکه $_{ADMU}^{*}$ کارآیی بدبینانه‌ی ADMU باشد، می‌توان آن را از مدل‌های LP زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & {}^{L}_{ADMU} = \ {}^{s}_{r=1} u_r y_r^{L\min} \\
\text{s.t.} \quad & {}^{s}_{r=1} u_r y_{rj}^{L} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{U} \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_i^{U\max} = 1, \\
& u_r, v_i \geq \ , \quad r = 1,\ldots,s; \quad i = 1, \quad ,m,
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & {}^{U}_{ADMU} \quad {}^{s}_{r\ 1} u_r y_r^{U\min} \\
\text{s.t.} \quad & {}^{s}_{r\ 1} u_r y_{rj}^{L} \quad {}^{m}_{i\ 1} v_i x_{ij}^{U} \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n, \\
& {}^{m}_{i\ 1} v_i x_i^{L\max} \quad 1, \\
& u_r, v_i \quad , \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i \quad 1, \quad ,m,
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

فرض کنید $[\ {}^{L*}_{ADMU},\ {}^{U*}_{ADMU}\ ]$ بازه‌ی کارآیی بدبینانه‌ی ADMU باشد. آنگاه می‌توان از مدل‌های LP زیر برای تعیین کارآیی‌های بدبینانه‌ی $\mathrm{DMU}_o$ تحت شرط بدون تغییر ماندن کارآیی‌های بدبینانه‌ی ADMU، استفاده کرد:

$$\begin{aligned}
\min \quad & {}^{L}_{o} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}^{L} \\
\text{s.t.} \quad & {}^{s}_{r=1} u_r y_{rj}^{L} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{U} \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& {}^{s}_{r\ 1} u_r y_j^{L\min} - \sum_{i=1}^{m} v_i (\ {}^{L*}_{ADMU} x_i^{U\max}) = 0, \\
& {}^{m}_{i=1} v_i x_{io}^{U} \quad 1, \\
& u_r, v_i \geq \ , \quad r \quad 1, \quad ,s; \quad i = 1, \quad ,m.
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & {}^{U}_{o} \quad {}^{s}_{r\ 1} u_r y_{ro}^{U} \\
\text{s.t.} \quad & {}^{s}_{r\ 1} u_r y_{rj}^{L} - \ {}^{m}_{i\ 1} v_i x_{ij}^{U} \quad 0, \quad j \quad 1, \quad ,n, \\
& {}^{s}_{r\ 1} u_r y_j^{U\min} \quad {}^{m}_{i\ 1} v_i (\ {}^{U*}_{ADMU} x_i^{L\max}) \quad 0, \\
& {}^{m}_{i\ 1} v_i x_{io}^{L} \quad 1, \\
& u_r, v_i \geq \ , \quad r \quad 1,\ldots,s; \quad i \quad 1, \quad ,m.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

فرض کنید $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$ و $[\ {}^{L*}_{o},\ {}^{U*}_{o}\ ]$ به ترتیب بازه‌های کارآیی خوشبینانه و بدبینانه‌ی $\mathrm{DMU}_o$ باشند، که از مقادیر بهینه‌ی تابع هدف مدل‌های (۸)، (۹)، (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند، آنگاه تعریف‌های زیر را داریم.

تعریف ۳: گفته می‌شود که $\mathrm{DMU}_o$ کارآی DEA یا کارآی خوشبینانه است، اگر $\phi_o^{U*} = 1$، در غیر این صورت، اگر $\phi_o^{U*} \quad 1$، گفته می‌شود که غیرکارآی DEA یا غیرکارآی خوشبینانه است.

تعریف ۴: گفته می‌شود که $\mathrm{DMU}_o$ ناکارآی DEA یا ناکارآی بدبینانه است، اگر $\psi_o^{L*} = 1$، در غیر این صورت، اگر $\psi_o^{L*} \quad 1$، گفته می‌شود که غیرناکارآی DEA یا غیرناکارآی بدبینانه است.

باید خاطرنشان کرد که کارآیی در مدل‌های DEAی بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) مبتنی بر ADMU بزرگ‌تر یا مساوی یک تعریف شده است. در حقیقت، کارآیی متعارف DEAی بازه‌ای می‌تواند DMUهایی را که عملکرد ضعیفی دارند، افتراق دهد، ولی نمی‌تواند مشخص کند که در میان DMUهایی که کارآی DEA هستند، کدامیک بهترین عملکرد را دارند، در حالی که کارآیی‌های تعریف شده در مدل‌های DEAی بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) دارای قابلیت شناسایی این هستند که کدام DMU بهترین عملکرد را دارد، ولی قابلیت مشخص کردن اینکه کدام DMU بدترین عملکرد را دارد، ندارند. بنابراین، دو تعریف کارآیی مکمل یکدیگر هستند.

از مطالب بالا، معلوم می‌شود که مدل‌های DEAی بازه‌ای (۶)–(۹) مبتنی بر IDMU کارآیی‌های خوشبینانه‌ی IDMU و $n$

DMUی حقیقی را اندازه‌گیری می‌کنند، در حالی که مدل‌های DEAی بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) کـه مبتنـی بـر ADMU هسـتند، کارآیی‌های بدبینانه‌ی ADMU و $n$ DMUی واقعی را اندازه‌گیری می‌کنند. این دو سنجش متمایز کارآیی، ممکن اسـت بـه نتیجه‌گیری‌های کاملاً متفاوتی منجر شوند. بنابراین، باید آنها را با هم در نظر گرفت، تا یک سنجش کلی از هر DMU به دست آید. برای این منظور، Wang و Luo مفهوم RC را به صورت زیر معرفی کردند، که در رویکـرد TOPSIS کـه از روش‌هـای معروف تصمیم‌گیری چندشاخصی است (Hwang & Yoon, 1981)، زیاد به کار می‌رود:

$$RC_j \quad \frac{\ ^{*}_{j} \quad \ ^{*}_{ADMU}}{(\psi_j^* - \varphi_{ADMU}^*) + (\theta_{IDMU}^* - \phi_j^*)}, \quad j = 1, \quad , n \tag{۱۴}$$

روشن است که هر چه تفاوت بین $\ ^{*}_{j}$ و $\varphi^{*}_{ADMU}$ بیشتر و تفاوت بین $\ ^{*}_{IDMU}$ و $\ ^{*}_{j}$ کوچک‌تر باشد، به معنـای عملکـرد بهتـر برای $\mathrm{DMU}_j$ خواهد بود. بنابراین، هر چه $RC_j$ بزرگ‌تر باشد، عملکرد $\mathrm{DMU}_j$ بهتر خواهد بود.

تعریف ۵: فرض کنیـد $A \quad [a^L, b^U]$ و $B \quad [b^L, b^U]$ کـه در آن $a^L, b^L \quad 0$، دو عـدد بـازه‌ای دلخـواه باشـند. در ایـن صورت، فاصله‌ی بین $A$ و $B$ به صورت $D(A,B) \quad \sqrt{\frac{1}{2}\,(a^L \quad b^L)^2 \quad (a^U \quad b^U)^2}$ تعریف می‌شود.

فرض کنید $[\ ^{L*}_{IDMU}, \ ^{U*}_{IDMU}]$ و $[\ ^{L*}_{j}, \ ^{U*}_{j}]$ به ترتیب بازه‌های کـارآیی خوشـبینانه‌ی IDMU و $\mathrm{DMU}_j$ باشـند، کـه بـه وسیله‌ی مدل‌های DEAی بازه‌ای (۶)–(۹) تعیین شده‌اند، و $[\varphi^{L*}_{ADMU}, \ ^{U*}_{ADMU}]$ و $[\ ^{L*}_{j}, \ ^{U*}_{j}]$ به ترتیب بازه‌هـای کـارآیی بدبینانه‌ی ADMU و $\mathrm{DMU}_j$ بر اساس مدل‌های DEAی بازه‌ای (۱۰)–(۱۳) باشند. در این صورت شاخص نزدیکـی نسـبی $\mathrm{DMU}_j$ به IDMU، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RC_j \quad \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\,(\ ^L_j \quad \ ^L_{ADMU})^2 \quad (\ ^U_j \quad \ ^U_{ADMU})^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\,(\ ^L_j \quad \ ^L_{ADMU})^2 \quad (\ ^U_j \quad \ ^U_{ADMU})^2} \quad \sqrt{\frac{1}{2}\,(\ ^L_{IDMU} \quad \ ^L_j)^2 \quad (\ ^U_{IDMU} \quad \ ^U_j)^2}} \tag{۱۵}$$

$$\frac{\sqrt{(\ ^{L*}_j \quad \ ^L_{ADMU})^2 \quad (\ ^U_j \quad \ ^U_{ADMU})^2}}{\sqrt{(\ ^L_j \quad \ ^L_{ADMU})^2 \quad (\ ^U_j \quad \ ^U_{ADMU})^2} \quad \sqrt{(\ ^L_{IDMU} \quad \ ^L_j)^2 \quad (\ ^U_{IDMU} \quad \ ^U_j)^2}}, \quad j \quad 1,\mathrm{K}\ , n$$

در ادامه، رویکرد جدید پیشنهادی را برای ارزیابی عملکرد بیست شعبه‌ی بانک تجاری به کار می‌بریم. تمـام مـدل‌هـا روی یـک کامپیوتر شخصی با استفاده از برنامه‌ی حل کننده‌ی LP به نام GAMS اجرا شدند. مقـدار بـی‌نهایـت کوچـک غیرارشمیدسـی $10^{15}$ منظور شد.

مسئله‌ی اندازه‌گیری عملکرد برای بیست شعبه‌ی بانک تجاری (DMU) در ایران را در نظر بگیرید. هر شعبه از سه ورودی برای تولید چهار خروجی استفاده می‌کند. در جدول‌های ۱ و ۲ ورودی‌های بازه‌ای و خروجی‌های بازه‌ای برای این DMUها داده شـده است. مجموعه داده‌های این تحلیل از مقاله‌ی Jahanshahloo و همکاران گرفته شده‌اند (Jahanshahloo et al., 2009).

*ورودی‌ها*

$x_1$: سود قابل پرداخت.

$x_2$: پرسنل.

$x_3$: وام‌های بدون عملکرد.

*خروجی‌ها*

$y_1$: جمع کل چهار سپرده‌ی اصلی.

$y_2$: کارمزد.

$y_3$: وام‌های داده شده.

$y_4$: بهره‌ی دریافتی.

جدول شماره (۱): داده‌های ورودی برای بیست شعبه‌ی بانک.

| $\mathrm{DMU}_j$ | $x_{1j}^L$ | $x_{1j}^U$ | $x_{2j}^L$ | $x_{2j}^U$ | $x_{3j}^L$ | $x_{3j}^U$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۵۰۰۷٫۳۷ | ۹۶۱۳٫۳۷ | ۳۶٫۲۹ | ۳۶٫۸۶ | ۸۷۲۴۳ | ۸۷۲۴۳ |
| ۲ | ۲۹۲۶٫۸۱ | ۵۹۶۱٫۵۵ | ۱۸٫۸ | ۲۰٫۱۶ | ۹۹۴۵ | ۱۲۱۲۰ |
| ۳ | ۸۷۳۲٫۷ | ۱۷۷۵۲٫۵ | ۲۵٫۷۴ | ۲۷٫۱۷ | ۴۷۵۷۵ | ۵۰۰۱۳ |
| ۴ | ۹۴۵٫۹۳ | ۱۹۶۶٫۳۹ | ۲۰٫۸۱ | ۲۲٫۵۴ | ۱۹۲۹۲ | ۱۹۷۵۳ |
| ۵ | ۸۴۸۷٫۰۷ | ۱۷۵۲۱٫۶۶ | ۱۴٫۱۶ | ۱۴٫۸ | ۳۴۲۸ | ۳۹۱۱ |
| ۶ | ۱۳۷۵۹٫۳۵ | ۲۷۳۵۹٫۳۶ | ۱۹٫۴۶ | ۱۹٫۴۶ | ۱۳۹۲۹ | ۱۵۶۵۷ |
| ۷ | ۵۸۷٫۶۹ | ۱۲۰۵٫۴۷ | ۲۷٫۲۹ | ۲۷٫۴۸ | ۲۷۸۲۷ | ۲۹۰۰۵ |
| ۸ | ۴۶۴۶٫۳۹ | ۹۵۵۹٫۶۱ | ۲۴٫۵۲ | ۲۵٫۰۷ | ۹۰۷۰ | ۹۹۸۳ |
| ۹ | ۱۵۵۴٫۲۹ | ۳۴۲۷٫۸۹ | ۲۰٫۴۷ | ۲۱٫۵۹ | ۴۱۲۰۳۶ | ۴۱۳۹۰۲ |
| ۱۰ | ۱۷۵۲۸٫۳۱ | ۳۶۲۹۷٫۵۴ | ۱۴٫۸۴ | ۱۵٫۰۵ | ۸۶۳۸ | ۱۰۲۲۹ |
| ۱۱ | ۲۴۴۴٫۳۴ | ۴۹۵۵٫۷۸ | ۲۰٫۴۲ | ۲۰٫۵۴ | ۵۰۰ | ۹۳۷ |
| ۱۲ | ۷۳۰۳٫۲۷ | ۱۴۱۷۸٫۱۱ | ۲۲٫۸۷ | ۲۳٫۱۹ | ۱۶۱۴۸ | ۲۱۳۵۳ |
| ۱۳ | ۹۸۵۲٫۱۵ | ۱۹۷۴۲٫۸۹ | ۱۸٫۴۷ | ۲۱٫۸۳ | ۱۷۱۶۳ | ۱۷۲۹۰ |
| ۱۴ | ۴۵۴۰٫۷۵ | ۹۳۱۲٫۲۴ | ۲۲٫۸۳ | ۲۳٫۹۶ | ۱۷۹۱۸ | ۱۷۹۶۴ |
| ۱۵ | ۳۰۳۹٫۵۸ | ۶۳۰۴٫۰۱ | ۳۹٫۳۲ | ۳۹٫۸۶ | ۵۱۵۸۲ | ۵۵۱۳۶ |
| ۱۶ | ۶۵۸۵٫۸۱ | ۱۳۴۵۳٫۵۸ | ۲۵٫۵۷ | ۲۶٫۵۲ | ۲۰۹۷۵ | ۲۳۹۹۲ |
| ۱۷ | ۴۲۰۹٫۱۸ | ۸۶۰۳٫۷۹ | ۲۷٫۵۹ | ۲۷٫۹۵ | ۴۱۹۶۰ | ۴۳۱۰۳ |
| ۱۸ | ۱۰۱۵٫۵۲ | ۲۰۳۷٫۸۲ | ۱۳٫۶۳ | ۱۳٫۹۳ | ۱۸۶۴۱ | ۱۹۳۵۴ |
| ۱۹ | ۵۸۰۰٫۳۸ | ۱۱۸۷۵٫۳۹ | ۲۷٫۱۲ | ۲۷٫۲۶ | ۱۹۵۰۰ | ۱۹۵۶۹ |
| ۲۰ | ۱۴۴۵٫۶۸ | ۲۹۲۲٫۱۵ | ۲۸٫۹۶ | ۲۸٫۹۶ | ۳۱۷۰۰ | ۳۲۰۶۱ |
| IDMU | ۵۸۷٫۶۹ | ۱۲۰۵٫۴۷ | ۱۳٫۶۳ | ۱۳٫۹۳ | ۵۰۰ | ۹۳۷ |
| ADMU | ۱۷۵۲۸٫۳۱ | ۳۶۲۹۷٫۵۴ | ۳۹٫۳۲ | ۳۹٫۸۶ | ۴۱۲۰۳۶ | ۴۱۳۹۰۲ |

جدول شماره (۲): داده‌های خروجی برای بیست شعبه‌ی بانک.

| $\mathrm{DMU}_j$ | $y_{1j}^L$ | $y_{1j}^U$ | $y_{2j}^L$ | $y_{2j}^U$ | $y_{3j}^L$ | $y_{3j}^U$ | $y_{4j}^L$ | $y_{4j}^U$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲۶۹۶۹۹۵ | ۳۱۲۶۷۹۸ | ۹۶۵٫۹۷ | ۶۹۵۷٫۳۳ | ۱۶۷۵۵۱۹ | ۱۸۵۳۳۶۵ | ۱۰۸۶۳۴٫۷۶ | ۱۲۵۷۴۰٫۲۸ |
| ۲ | ۳۴۰۳۷۷ | ۴۴۰۳۵۵ | ۳۰۴٫۶۷ | ۷۴۹٫۴ | ۳۷۷۳۰۹ | ۳۹۰۲۰۳ | ۳۲۳۹۶٫۶۵ | ۳۷۸۳۶٫۵۶ |
| ۳ | ۱۰۲۷۵۴۶ | ۱۰۶۱۲۶۰ | ۲۲۸۵٫۰۳ | ۳۱۷۴ | ۱۲۳۳۵۴۸ | ۱۸۲۲۰۲۸ | ۹۶۸۴۲٫۳۳ | ۱۰۸۰۸۰٫۰۱ |
| ۴ | ۱۱۴۵۲۳۵ | ۱۲۱۳۵۴۱ | ۲۰۷٫۹۸ | ۵۱۰٫۹۳ | ۴۶۸۵۲۰ | ۵۴۲۱۰۱ | ۳۲۳۶۲٫۸ | ۳۹۲۷۳٫۳۷ |
| ۵ | ۳۹۰۹۰۲ | ۳۹۵۲۴۱ | ۶۳٫۳۲ | ۹۲٫۳ | ۱۲۹۷۵۱ | ۱۴۲۸۷۳ | ۱۲۶۶۲٫۷۱ | ۱۴۱۶۵٫۴۴ |
| ۶ | ۹۸۸۱۱۵ | ۱۰۸۷۳۹۲ | ۴۸۰٫۱۶ | ۸۶۹٫۵۲ | ۵۰۷۵۰۲ | ۵۷۴۳۵۵ | ۵۳۵۹۱٫۳ | ۷۲۲۵۷٫۲۸ |
| ۷ | ۱۴۴۹۰۶ | ۱۶۵۸۱۸ | ۱۷۶٫۵۸ | ۳۷۰٫۸۱ | ۲۸۸۵۱۳ | ۳۲۳۷۲۱ | ۴۰۵۰۷٫۹۷ | ۴۵۸۴۷٫۴۸ |
| ۸ | ۴۰۸۱۶۳ | ۴۱۶۴۱۶ | ۴۶۵۴٫۷۱ | ۵۸۸۲٫۵۳ | ۱۰۴۴۲۲۱ | ۱۰۷۱۸۱۲ | ۵۶۲۶۰٫۰۹ | ۷۳۹۴۸٫۰۹ |
| ۹ | ۳۳۵۰۷۰ | ۴۱۰۴۲۷ | ۵۶۰٫۲۶ | ۲۵۰۶٫۶۷ | ۱۵۸۴۷۲۲ | ۱۸۰۲۹۴۲ | ۱۷۶۴۳۶٫۸۱ | ۱۸۹۰۰۶٫۱۲ |
| ۱۰ | ۷۰۰۸۴۲ | ۷۶۸۵۹۳ | ۵۸٫۸۹ | ۸۶٫۸۶ | ۲۲۹۰۷۴۵ | ۲۵۷۳۵۱۲ | ۶۶۲۷۲۵٫۲۱ | ۷۹۱۴۶۳٫۰۸ |
| ۱۱ | ۶۴۱۶۸۰ | ۶۹۶۳۳۸ | ۱۰۷۰٫۸۱ | ۲۲۸۳٫۰۸ | ۱۵۷۹۹۶۱ | ۲۲۸۵۰۷۹ | ۱۷۵۲۷٫۵۸ | ۲۰۷۷۳٫۹۱ |
| ۱۲ | ۴۵۳۱۷۰ | ۴۸۱۹۴۳ | ۳۷۵٫۰۷ | ۵۵۹٫۸۵ | ۲۴۵۷۲۶ | ۲۷۵۷۱۷ | ۳۵۷۵۷٫۸۳ | ۴۲۷۹۰٫۱۴ |
| ۱۳ | ۵۵۳۱۶۷ | ۵۷۴۹۸۹ | ۴۳۸٫۴۳ | ۸۳۶٫۸۲ | ۴۲۵۸۸۶ | ۴۳۱۸۱۵ | ۴۵۶۵۲٫۲۴ | ۵۰۲۵۵٫۷۵ |
| ۱۴ | ۳۰۹۶۷۰ | ۳۴۲۵۹۸ | ۹۳۶٫۶۲ | ۱۴۶۸٫۴۵ | ۱۲۴۱۸۸ | ۱۲۶۹۳۰ | ۸۱۴۳٫۷۹ | ۱۱۹۴۸٫۰۴ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۵ | ۲۸۶۱۴۹ | ۳۱۷۱۸۶ | ۱۲۰۳٫۷۹ | ۴۳۳۵٫۲۴ | ۷۸۷۹۵۹ | ۸۱۰۰۸۸ | ۱۰۶۷۹۸٫۶۳ | ۱۱۱۹۶۲٫۳ |
| ۱۶ | ۳۲۱۴۳۵ | ۳۴۷۸۴۸ | ۲۰۰٫۳۶ | ۳۹۹٫۸ | ۳۶۰۸۸۰ | ۳۷۹۴۸۸ | ۸۹۹۷۱٫۴۷ | ۱۶۵۵۲۴٫۲۲ |
| ۱۷ | ۶۱۸۱۰۵ | ۸۳۵۸۳۹ | ۲۷۸۱٫۲۴ | ۴۵۵۵٫۴۲ | ۹۱۳۶۵۰۷ | ۹۱۳۶۵۰۷ | ۳۳۰۳۶٫۷۹ | ۴۱۸۲۶٫۵۱ |
| ۱۸ | ۲۴۸۱۲۵ | ۳۲۰۹۷۴ | ۲۴۰٫۰۴ | ۲۷۴٫۷ | ۲۶۶۸۷ | ۲۹۱۷۳ | ۹۵۲۵٫۶ | ۱۰۸۷۷٫۷۸ |
| ۱۹ | ۶۴۰۸۹۰ | ۶۷۹۹۱۶ | ۹۶۱٫۵۶ | ۱۹۱۴٫۲۵ | ۲۹۴۶۷۹۷ | ۳۹۸۵۹۰۰ | ۶۶۰۹۷٫۱۶ | ۹۵۳۲۹٫۸۷ |
| ۲۰ | ۱۱۹۹۴۸ | ۱۲۰۲۰۸ | ۲۸۲٫۷۳ | ۴۷۱٫۲۲ | ۲۹۷۶۷۴ | ۳۰۸۰۱۲ | ۲۱۹۹۱٫۵۳ | ۲۷۹۳۴٫۱۹ |
| IDMU | ۲۶۹۶۹۹۵ | ۳۱۲۶۷۹۸ | ۴۶۵۴٫۷۱ | ۶۹۵۷٫۳۳ | ۹۱۳۶۵۰۷ | ۹۱۳۶۵۰۷ | ۶۶۲۷۲۵٫۲۱ | ۷۹۱۴۶۳٫۰۸ |
| ADMU | ۱۱۹۹۴۸ | ۱۲۰۲۰۸ | ۵۸٫۸۹ | ۸۶٫۸۶ | ۲۶۶۸۷ | ۲۹۱۷۳ | ۸۱۴۳٫۷۹ | ۱۰۸۷۷٫۷۸ |

با اجرای مدل‌ها بر مجموعه داده‌ها؛ مدل DEAی (۱)، ده تا از بیست DMU را کارآی DEA (کارآی خوشبینانه) ارزیابی می‌کند، ولی دیگر نمی‌تواند بین آنها بیشتر افتراق بدهد. و همه‌ی ده DMUی دیگر را به عنوان غیرکارآی خوشبینانه می‌شناسد. تصمیم گیرنده از این نتیجه زیاد راضی نیست، چون تعداد زیادی از DMUها نمره‌ی کارآیی کامل گرفته‌اند (اگر ده واحد کارآی خوشبینانه در وضعیت بهترین فعالیت تولیدی باشند، کارآی خوشبینانه هستند؛ در غیر این صورت، آنها نیز غیرکارآی خوشبینانه هستند). از جدول ۳ روشن است که مدل DEAی (۳)، هشت تا از بیست DMU را به عنوان ناکارآی DEA (ناکارآی بدبینانه) شناسایی می‌کند، و همه‌ی دوازده DMUی دیگر را به عنوان غیرناکارآی بدبینانه می‌شناسد (اگر هشت واحد ناکارآی بدبینانه در وضعیت بدترین فعالیت تولیدی باشند، ناکارآی بدبینانه هستند؛ در غیر این صورت، آنها نیز غیرناکارآی بدبینانه هستند). برای سنجش بهتر عملکرد و رتبه‌بندی قابل اعتماد بیست DMU، مدل‌های IDMU و ADMU برای ارزیابی مجدد عملکرد بیست DMU مورد استفاده قرار می‌گیرند. IDMU و ADMUی مجازی در دو سطر آخر جدول‌های ۱ و ۲ تعریف شده‌اند. بازه‌ی کارآیی خوشبینانه‌ی IDMU، [۱۶٫۸۴۵۹, ۳۹٫۴۶۵۲] و بازه‌ی کارآیی بدبینانه‌ی ADMU، [۰٫۰۲۱۹, ۰٫۰۲۸۵] است. مقدار این دو کارآیی در دو سطر آخر جدول ۳ درج شده‌اند.

جدول شماره (۳): کارآیی‌های بازه‌ای برای بیست شعبه‌ی بانک.

| DMU | بازه‌ی کارآیی خوشبینانه | | بازه‌ی کارآیی بدبینانه | |
|---|---|---|---|---|
| | مدل‌های (۱) و (۲) $([\ _j^{L*},\ _j^{U*}])$ | مدل‌های (۸) و (۹) $([\ _j^{L*},\ _j^{U*}])$ | مدل‌های (۳) و (۴) $([\ _j^{L*},\ _j^{U*}])$ | مدل‌های (۱۲) و (۱۳) $([\ _j^{L*},\ _j^{U*}])$ |
| ۱ | [۰٫۸۵۸۶, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۳۷۰۳, ۰٫۹۳۴۶] | [۱٫۵۴۳۱, ۳٫۱۳۸۶] | [۴٫۴۹۲۳, ۹٫۴۲۷۷] |
| ۲ | [۰٫۳۳۹۳, ۰٫۴۹۷۶] | [۰٫۱۷۷۶, ۰٫۴۳۹۷] | [۱٫۸۵۱۵, ۲٫۷۰۳۴] | [۴٫۸۸۴۹, ۱۳٫۵۴۹۵] |
| ۳ | [۰٫۵۲۴۶, ۰٫۶۶۹۹] | [۰٫۱۷۳۵, ۰٫۴۵۲۰] | [۲٫۳۱۳۹, ۳٫۹۲۳۲] | [۵٫۵۴۰۶, ۱۰٫۹۵۰۳] |
| ۴ | [۰٫۸۸۹۱, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۶۱۲۳, ۱٫۰۰۰۰] | [۱٫۴۷۵۲, ۲٫۴۸۹۸] | [۵٫۴۵۴۱, ۸٫۲۲۷۹] |
| ۵ | [۰٫۶۳۳۳, ۰٫۶۸۰۷] | [۰٫۰۴۰۳, ۰٫۰۶۲۸] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۱۸۰۹] | [۱٫۰۰۰۰, ۱۱٫۵۴۰۳] |
| ۶ | [۰٫۸۸۳۵, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۰۸۲۶, ۰٫۱۷۸۷] | [۱٫۶۰۷۵, ۳٫۲۶۴۲] | [۲٫۳۸۴۸, ۵٫۴۰۸۸] |
| ۷ | [۰٫۵۶۸۵, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۳۴۶۴, ۰٫۷۷۴۹] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۲۱۵۹] | [۱٫۴۹۰۵, ۳٫۵۳۳۲] |
| ۸ | [۰٫۸۱۳۴, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۲۱۰۱, ۱٫۰۰۰۰] | [۱٫۶۵۷۱, ۲٫۸۶۷۶] | [۲۱٫۰۲۷۶, ۴۳٫۲۸۲۱] |
| ۹ | [۰٫۶۸۳۷, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۱۴۷۵, ۰٫۳۳۰۰] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۰۷۶۱] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۳۸۶۵] |
| ۱۰ | [۰٫۸۸۳۹, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۴۱۴۰, ۱٫۰۰۰۰] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۳۹۵۷] | [۷٫۳۱۷۴, ۱۶٫۷۷۱۱] |
| ۱۱ | [۰٫۸۹۸۵, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۳۸۵۴, ۱٫۰۰۰۰] | [۱٫۷۷۸۶, ۲٫۷۶۴۶] | [۴۵٫۸۸۴۳, ۱۳۵۲٫۰۸۸۲] |
| ۱۲ | [۰٫۳۲۸۸, ۰٫۳۹۹۱] | [۰٫۰۸۳۵, ۰٫۱۸۳۴] | [۱٫۲۰۱۹, ۱٫۶۹۰۱] | [۱٫۸۱۰۶, ۳٫۷۶۸۷] |
| ۱۳ | [۰٫۴۴۳۹, ۰٫۵۴۷۵] | [۰٫۰۸۱۸, ۰٫۱۷۴۱] | [۱٫۲۲۳۶, ۲٫۳۴۱۵] | [۲٫۵۰۶۲, ۸٫۷۱۱۹] |
| ۱۴ | [۰٫۲۶۹۱, ۰٫۳۵۸۷] | [۰٫۰۵۱۳, ۰٫۲۲۲۵] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۱۳۴۱] | [۲٫۷۲۱۴, ۵٫۶۴۲۱] |
| ۱۵ | [۰٫۳۹۹۶, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۲۸۳۷, ۰٫۹۶۶۸] | [۱٫۳۴۰۱, ۱٫۸۷۷۱] | [۴٫۱۰۲۰, ۸٫۳۱۷۰] |
| ۱۶ | [۰٫۲۰۸۱, ۰٫۵۵۳۰] | [۰٫۱۵۴۱, ۰٫۵۳۴۳] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۵۹۶۸] | [۲٫۰۸۳۸, ۵٫۴۰۵۵] |
| ۱۷ | [۰٫۹۸۷۱, ۱٫۰۰۰۰] | [۰٫۵۸۲۲, ۱٫۰۰۰۰] | [۱٫۷۲۸۰, ۲٫۲۷۰۳] | [۴۰٫۷۵۵۹, ۵۸٫۵۶۶۹] |
| ۱۸ | [۰٫۲۶۵۱, ۰٫۳۵۳۴] | [۰٫۱۳۲۵, ۰٫۲۸۷۶] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۱۱۷۲] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۱۷۰۴] |
| ۱۹ | [۰٫۵۷۷۱, ۰٫۷۱۸۹] | [۰٫۲۸۱۴, ۰٫۶۵۳۰] | [۲٫۱۴۲۱, ۳٫۸۸۹۶] | [۱۸٫۸۹۵۰, ۵۴٫۷۷۸۰] |
| ۲۰ | [۰٫۱۸۴۱, ۰٫۴۰۰۴] | [۰٫۱۴۲۲, ۰٫۳۵۵۰] | [۱٫۰۰۰۰, ۱٫۰۰۲۲] | [۲٫۴۴۲۰, ۳٫۱۵۱۶] |
| IDMU | ــــ | [۱۶٫۸۴۵۹, ۳۹٫۴۶۵۲] | ــــ | ــــ |
| ADMU | ــــ | ــــ | ــــ | [۰٫۰۲۱۹, ۰٫۰۲۸۵] |

از جدول ۳ روشن است که مدل‌های DEAی بازه‌ای با IDMU فقط $DMU_4$، $DMU_8$، $DMU_{10}$، $DMU_{11}$ و $DMU_{17}$ را به عنوان کارآی خوشبینانه شناسایی می‌کنند (اگر این واحدها در وضعیت بهترین فعالیت تولیدی باشند)، و همه‌ی پانزده DMUی دیگر را به عنوان غیرکارآی خوشبینانه می‌شناسند. ملاحظه می‌شود که تعداد واحدهای کارآی خوشبینانه کاهش یافته است. مدل‌های DEAی بازه‌ای با ADMU، $DMU_5$، $DMU_9$ و $DMU_{18}$ را به عنوان ناکارآی بدبینانه، و هفده DMUی دیگر را به عنوان غیرناکارآی بدبینانه شناسایی می‌کنند. با توجه به نتایج نمره‌دهی در جدول ۳، می‌بینیم که مدل‌های DEAی بازه‌ای مبتنی بر IDMU، واحدهای کارآی خوشبینانه را شناسایی می‌کنند، ولی نمی‌توانند بین آنها افتراق دهند، در حالی که مدل‌های DEAی بازه‌ای مبتنی بر ADMU درست بر عکس هستند، یعنی واحدهای ناکارآی بدبینانه را شناسایی می‌کنند، ولی دیگر نمی‌توانند بین آنها افتراق بدهند. وقتی که نمرات مدل‌های DEAی بازه‌ای با هم در نظر گرفته شوند، به کمک معادله‌ی (۱۵) یک برآورد برای RCی هر DMU به IDMU به دست می‌آید، که مقادیر آن برای بیست DMU در جدول ۴ ارائه شده است. جدول ۴، رتبه‌بندی بیست DMU را بر اساس شاخص RC نشان می‌دهد. رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC نشان می‌دهد که $DMU_{11}$ بهترین عملکرد کلی را دارد، و $DMU_{17}$، $DMU_8$، $DMU_{19}$ و $DMU_{10}$ به دنبال آن واقع شده‌اند. ترتیب رتبه‌بندی کلی همه‌ی بیست DMU بر اساس شاخص RC در جدول ۴ ارائه شده است، که بر اساس آن می‌توان فهمید که همه‌ی بیست DMU بر اساس عملکرد کلی خود افتراق داده شده و رتبه‌بندی شده‌اند. این مزیت مهم روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر DEAی بازه‌ای است. روشن است که رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC جامع‌تر است. علت آن است که رتبه‌بندی بر اساس شاخص RC هم کارآیی‌های خوشبینانه و هم کارآیی‌های بدبینانه‌ی DMUها را در نظر می‌گیرد. بنابراین، متقاعد کننده‌تر است.

جدول شماره(۴): مقادیر RC و رتبه‌بندی برای بیست شعبه‌ی بانک.

| DMU | شاخص RC | رتبه‌بندی | DMU | شاخص RC | رتبه‌بندی |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰٫۲۱۳۴۳ | ۹ | ۱۱ | ۰٫۷۳۵۸۸ | ۱ |
| ۲ | ۰٫۲۲۵۸۶ | ۸ | ۱۲ | ۰٫۰۹۶۴۲ | ۱۶ |
| ۳ | ۰٫۲۴۸۶۹ | ۷ | ۱۳ | ۰٫۱۲۹۰۷ | ۱۲ |
| ۴ | ۰٫۲۵۰۷۳ | ۶ | ۱۴ | ۰٫۱۳۸۴۸ | ۱۱ |
| ۵ | ۰٫۰۵۵۰۰ | ۲۰ | ۱۵ | ۰٫۱۹۷۶۶ | ۱۰ |
| ۶ | ۰٫۱۲۳۵۴ | ۱۴ | ۱۶ | ۰٫۱۰۹۹۵ | ۱۵ |
| ۷ | ۰٫۰۸۱۷۳ | ۱۷ | ۱۷ | ۰٫۷۱۴۶۶ | ۲ |
| ۸ | ۰٫۵۵۸۰۵ | ۳ | ۱۸ | ۰٫۰۵۵۲۹ | ۱۹ |
| ۹ | ۰٫۰۵۵۳۳ | ۱۸ | ۱۹ | ۰٫۵۳۲۵۷ | ۴ |
| ۱۰ | ۰٫۳۰۷۴۷ | ۵ | ۲۰ | ۰٫۱۲۶۵۵ | ۱۳ |

## ۳- نتایج و بحث

در این مقاله، مدل‌های DEAی بازه‌ای جدیدی ارائه کردیم که دوتا از آنها مبتنی بر IDMUی مجازی و دوتای دیگری مبتنی بر ADMUی مجازی هستند. زوج مدل DEAی اولی، DMUها را با استفاده از کارآیی‌های خوشبینانه ارزیابی می‌کنند و می‌توان از آنها برای شناسایی واحدهای کارآی خوشبینانه استفاده کرد، در حالی که زوج مدل DEAی دومی، DMUها را بر اساس کارآیی‌های بدبینانه ارزیابی می‌کنند و می‌توان از آنها برای شناسایی واحدهای ناکارآی بدبینانه استفاده کرد. این دو بازه‌ی کارآیی متمایز با استفاده از شاخص RC تلفیق می‌شوند، که سنجش عملکردی کلی هر DMU را نشان می‌دهد، و لذا می‌توان از آن به عنوان مبنایی برای مقایسه و رتبه‌بندی DMUها استفاده کرد. در مقایسه با روش‌های موجود DEAی بازه‌ای، رویکرد DEAی پیشنهادی دارای امکان افتراق هر DMU از دیگران بر اساس عملکرد کلی آن است. یک مثال عددی مزایا، قابلیت و کاربردهای مدل‌های DEAی پیشنهادی و شاخص RC را نشان می‌دهد. عرصه‌های احتمالی کاربرد آن فراوان است، و شامل انتخاب پروژه، تحلیل مکان و سیاست، تحلیل عملکرد فروشندگان و کارگران، و امثال آن است.

## ۴- منابع


1. Azizi, Hossein, & Ganjeh Ajirlu, Hassan. (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. Applied Mathematical Modelling, 35(9), 4149-4156. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.038
2. Belton, Valerie, & Vickers, Stephen P. (1993). Demystifying DEA ˇ A Visual Interactive Approach Based on Multiple Criteria Analysis. Journal of the Operational Research Society, 44(9), 883-896. doi: 10.1057/jors.1993.157
3. Bouyssou, D. (1999). Using DEA as a tool for MCDM: some remarks. Journal of the Operational Research Society, 50(9), 974-978.
4. Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8
5. Cook, Wade D., Kress, Moshe, & Seiford, Lawrence M. (1993). On the Use of Ordinal Data in Data Envelopment Analysis. Journal of the Operational Research Society, 44(2), 133-140.
6. Cook, Wade D., Kress, Moshe, & Seiford, Lawrence M. (1996). Data Envelopment Analysis in the Presence of Both Quantitative and Qualitative Factors. J Oper Res Soc, 47(7), 945-953.
7. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001a). IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) with CMDs (Column Maximum Decision Making Units). Journal of the

Operational Research Society, 52(2), 176-181. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601070
8. Cooper, W. W., Park, K. S., & Yu, G. (2001b). An Illustrative Application of Idea (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean Mobile Telecommunication Company. Operations Research, 49(6), 807-820. doi: 10.1287/opre.49.6.807.10022
9. Cooper, William W., Park, Kyung Sam, & Yu, Gang. (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for Dealing with Imprecise Data in DEA. Management Science, 45(4), 597-607. doi: 10.1287/mnsc.45.4.597
10. Despotis, Dimitris K., & Smirlis, Yiannis G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. European Journal of Operational Research, 140(1), 24-36. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00200-4
11. Entani, Tomoe, Maeda, Yutaka, & Tanaka, Hideo. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. European Journal of Operational Research, 136(1), 32-45. doi: https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00055-8
12. Hwang, Ching-Lai, & Yoon, Kwangsun. (1981). Multiple attribute decision making: methods and applications: a state-of-the-art survey. Berlin; New York: Springer-Verlag.
13. Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostamy Malkhalifeh, M., & Ahadzadeh Namin, M. (2009). A generalized model for data envelopment analysis with interval data. Applied Mathematical Modelling, 33(7), 3237-3244. doi: 10.1016/j.apm.2008.10.030
14. Kao, Chiang, & Liu, Shiang-Tai. (2000a). Data Envelopment Analysis with Missing Data: An Application to University Libraries in Taiwan. The Journal of the Operational Research Society, 51(8), 897-905. doi: 10.2307/254045
15. Kao, Chiang, & Liu, Shiang-Tai. (2000b). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. Fuzzy Sets and Systems, 113(3), 427-437. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00137-7
16. Kim, Soung-Hie, Park, Choong-Gyoo, & Park, Kyung-Sam. (1999). An application of data envelopment analysis in telephone officesevaluation with partial data. Computers & Operations Research, 26(1), 59-72. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(98)00041-0
17. Park, K. S. (2004). Simplification of the transformations and redundancy of assurance regions in IDEA (imprecise DEA). Journal of the Operational Research Society, 55(12), 1363-1366. doi: 10.1057/palgrave.jors.2601824
18. Park, Kyung Sam, & Kim, Soung Hie. (1997). Tools for interactive multiattribute decisionmaking with incompletely identified information. European Journal of Operational Research, 98(1), 111-123. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(95)00121-2
19. Sage, A. P., & White, C. C. (1984). ARIADNE: A knowledge-based interactive system for planning and decision support. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, SMC-14(1), 35-47. doi: 10.1109/TSMC.1984.6313267
20. Stewart, Theodor J. (1996). Relationships between Data Envelopment Analysis and Multicriteria Decision Analysis. Journal of the Operational Research Society, 47(5), 654-665. doi: 10.1057/jors.1996.77
21. Wang, Ying-Ming, Greatbanks, Richard, & Yang, Jian-Bo. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. Fuzzy Sets and Systems, 153(3), 347-370. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2004.12.011
22. Wang, Ying-Ming, & Luo, Ying. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. Applied Mathematics and Computation, 173(2), 902-915. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.023
23. Wang, Ying-Ming, & Yang, Jian-Bo. (2007). Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies. Journal of Computational and Applied

Mathematics, 198(1), 253-267. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.12.025

24. Zhu, Joe. (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. European Journal of Operational Research, 144(3), 513-529. doi: 10.1016/S0377-2217(01)00392-7
25. Zhu, Joe. (2004). Imprecise DEA via Standard Linear DEA Models with a Revisit to a Korean Mobile Telecommunication Company. Operations Research, 52(2), 323-329. doi: 10.1287/opre.1030.0072