Portfolio Optimization Based on Nonparametric Estimation Methods

Mahsa Ghandehari [1 *], Azimeh Shamshiri [2], Saeed Fathi [3]

1- Associate Professor, Faculty of Administrative Sciences and Economics, Isfahan University, Isfahan, Iran
2- Graduate Student of Financial Management, Isfahan University, Isfahan, Iran
3- Associate Professor, Faculty of Administrative Sciences and Economics, Isfahan University, Isfahan, Iran

Abstract:

One of the major issues that investors are facing with in capital markets is decision making about selecting an appropriate stock exchange for investment and selecting an optimal portfolio. This process is done through the risk and expected return assessment. On the other hand, in portfolio selection problems if the assets' expected returns are normally distributed, variance and standard deviation are used as a risk measure. However, the expected returns on assets are not necessarily normal and sometimes have significant differences from normal distribution. This paper offers an optimal portfolio by introducing conditional value at risk (CVaR) as a measure of risk in a nonparametric framework considering a given expected return. This method is compared with the linear programming method.
The data used in this study consists of monthly returns of 15 companies selected from the top 50 companies in Tehran Stock Exchange during the winter of 1392 which is considered from April of 1388 to June of 1393.
The results of this study show the superiority of the nonparametric method over the linear programming method while the nonparametric method is much faster than the linear programming method.

Keywords: Portfolio optimization; Conditional value at risk; Nonparametric estimation; Kernel function

مدیریت تولید و عملیات، دوره ۸، پیاپی(۱٤)، شماره (۱)، بهار و تابستان۱۳۹٦
دریافت: ۱۳۹۳/۰۷/۲۹ پذیرش:۱۳۹۵/۰۹/۰۷
صص: ۱۸٤-۱۷۵

بهینه‌سازی سبد سهام برمبنای روش‌های تخمین ناپارامتریک

مهسا قندهاری[1*]، عظیمه شمشیری[2]، سعید فتحی[3]
۱- استادیار، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی گرایش مالی، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
۳- استادیار، دانشکده علوم اداری و اقتصاد، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

از جمله مسائل عمده‌ای که سرمایه‌گذاران بازارهای سرمایه با آن مواجه هستند، تصمیم‌گیری جهت انتخاب اوراق بهادار مناسب برای سرمایه‌گذاری و تشکیل سبد بهینۀ سهام است که این فرایند ازطریق ارزیابی ریسک و بازده صورت می‌گیرد؛ از طرفی در بحث سبد سهام در صورتی که بازده دارایی‌ها دارای توزیع نرمال باشد از واریانس و انحراف معیار برای محاسبۀ ریسک استفاده می‌شود؛ اما در دنیای واقع بازده دارایی‌ها لزوماً نرمال نیست و گاهی نیز تفاوت فاحش با توزیع نرمال دارد. مقالۀ حاضر با معرفی ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR)، به‌عنوان معیار محاسبه ریسک در یک چارچوب ناپارامتریک و به‌ازای بازده معین سبد بهینه سهام را ارائه می‌دهد و این روش را با روش برنامه‌ریزی خطی مقایسه می‌کند.

داده‌های مورداستفاده در این مقاله را بازده‌های ماهانه ۱۵ شرکت منتخب از ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران در زمستان ۱۳۹۲ تشکیل می‌دهند که در دورۀ زمانی فروردین‌ماه ۱۳۸۸ تا خردادماه ۱۳۹۳ در نظر گرفته شده‌اند.درنهایت سبد بهینۀ حاصل از به‌کارگیری دو روش ناپارامتریک و برنامه‌ریزی خطی ارائه شده و مقادیر CVaR آنها مقایسه شده است که در این مورد برتری روش ناپارامتریک نسبت به برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض خطر مشروط، بهینه‌سازی پرتفوی، تابع کرنل، تخمین ناپارامتریک.

* نویسنده مسوول: مهسا قندهاری   پست الکترونیک: M.ghandehari@ase.ui.ac.ir

۱- مقدمه

مدیریت پرتفوی سهام دربرگیرندهٔ مجموعه ای از قیمت‌های مناسب در رابطه با خرید و فروش سهام است. این فرایند، مدیریت صحیح پول را نیز دربرمی‌گیرد؛ علاوه بر این، مدیریت پرتفوی سهام باعث کاهش ریسک و افزایش بازده می‌شود. در بهینه‌سازی پرتفوی سهام مسئلهٔ اصلی انتخاب بهینهٔ دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه کرد (فرناندز و گومز؛ ۲۰۰۷).

هری مارکویتز بنیان‌گذار ساختاری مشهور به تئوری جدید پرتفو است. در تئوری جدید پرتفو، ریسک چنین تعریف شده است: «تغییرپذیری کل بازده‌ها حول میانگین بازده» و با استفاده از واریانس یا به‌گونه‌ای دیگر با استفاده از انحراف معیار، محاسبه می‌شود (مارکویتز؛ ۱۹۵۹).

مهم‌ترین نقش این تئوری، ایجاد چارچوب ریسک–بازده برای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران است. مدلی که وی مطرح کرده است، محور اصلی بسیاری از پژوهش‌ها در زمینهٔ مسائل مالی در دنیای واقعی است. مارکویتز برای ریسک سرمایه‌گذاری، مدل میانگین واریانس را در امر انتخاب دارایی‌ها و مدیریت پرتفوی سهام ارائه کرد. در این مدلْ میانگین، بازده موردانتظار را نشان می‌دهد و واریانس، بیانگر ریسک پرتفوی سهام است. انحراف‌معیار و واریانس به‌عنوان معیار سنجش ریسک با فرض نرمال‌بودن توزیع بازدهی است.

فرض نرمال‌بودن بازده موردانتظار، در بسیاری از مواقع درست نیست؛ زیرا بسیاری از پژوهش‌ها نشان می‌دهند که شکل تابع توزیع داده‌ها دارای دو انتهای ضخیم‌تر نسبت به تابع نرمال است یا توزیع بازده چوله است. مشکل دیگر استفاده از واریانس است که سودهایی که فاصلهٔ زیادی از میانگین دارند و برای سرمایه‌گذار مطلوب هستند نیز به‌عنوان ریسک شناخته می‌شوند و در فرایند بهینه‌سازی به سهام با تابع توزیع کشیده‌تر، وزن بیشتری داده می‌شود (مارکویتز، ۱۹۵۲). این مشکلات سبب شد تا مدل‌های جدیدی برای تشکیل سبد بهینهٔ سهام پیشنهاد شود که فرض نرمال‌بودن داده‌ها را در نظر نمی‌گیرد.

راکفلر و اوریاسو[3] (۲۰۰۲،۲۰۰۰)، یک معیار اندازه‌گیری جایگزین برای ریسک بیان کردند با عنوان ارزش در معرض خطر مشروط($CVaR$). این معیار به‌صورت میانگین ریسک‌هایی که بزرگ‌تر از ارزش در معرض خطر باشند تعریف می‌شود (یامای و یوشیبا؛ ۲۰۰۰).

پی فلاگ[5](۲۰۰۰)، نشان می‌دهد که $CVaR$ یک معیار منطقی برای اندازه‌گیری ریسک است که ویژگی‌های مثبت زیادی دارد و شامل تحدب نیز می‌شود.

از نظر محاسباتی راکفلر و اوریاسو، مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفو با استفاده از $mean\text{-}CVaR$ را به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی تبدیل کردند. روش استاندارد دیگری که برای محاسبهٔ $CVaR$ به‌صورت گسترده رایج است استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو است. در اغلب موارد ذکرشده در ادبیات، فرض می‌شود که فاکتورهای ریسک (متغیرهای تصادفی)، توزیع احتمال شناخته‌شده‌ای یا توزیع پارامتری مشخصی دارند؛ اما در بعضی مواقع اطلاعات کمی درخصوص تابع چگالی یا احتمال فاکتورهای ریسک وجود دارد (لی؛ ۲۰۰۷).

یائو و همکاران[7](۲۰۱۲) نشان دادند از آنجایی که در بیشتر موارد فاکتورهای ریسک بردارهای تصادفی چندبعدی هستند، اگر تکنیک ناپارامتریک برای تخمین چگالی بردار تصادفی چندبعدی به کار گرفته شود، سرعت همگرایی پایین می‌آید؛ بنابراین در این مرحله

از بردارهای تصادفی تک‌بعدی برای افزایش سرعت همگرایی استفاده می‌شود. نتایج محاسباتی که آنها انجام دادند نشان می‌دهد که رویکرد ناپارامتریک از روش برنامه‌ریزی خطی بهتر است. این رویکرد دو مزیت دارد: اول، بعد مدل *mean-CVaR* در رویکرد ناپارامتریک برای بهینه‌سازی پرتفو n+1 است که n تعداد نمونه‌ها است؛ اما بعد مدل در رویکرد برنامه‌ریزی خطی n+1+T است که n تعداد دارایی‌ها و T تعداد نمونه‌ها است؛ بنابراین رویکرد ناپارامتریک سریع‌تر از رویکرد برنامه‌ریزی خطی است. دوم، مدل *mean-CVaR* ناپارامتریک، مسئلهٔ بهینه‌سازی پرتفو را محدب نگه می‌دارد.

در این مقاله قصد داریم پرتفوی بهینه از پنجاه شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش ارزش در معرض خطر مشروط برمبنای روش‌های تخمین ناپارامتریک را برگزینیم.

۲- پیشینهٔ پژوهش

در این قسمت اشاره‌ای کوتاه به برخی مطالعات صورت‌گرفته در این زمینه می‌شود.

یان و همکاران (۲۰۰۷) در پژوهشی با استفاده از روش‌های PSO[۸] و GA[۹] به انتخاب چنددوره‌ای پرتفو با استفاده از عامل ریسک نیم واریانس پرداخته‌اند و نشان داده‌اند که استفادهٔ ترکیبی از این دو روش از کاربرد هریک از آنها به‌تنهایی به‌مراتب کاراتر است.

کریمی(۱۳۸٦) با استفاده از یکی از روش‌های بهینه‌سازی محلی، به مقایسهٔ مرزهای کارایی الگوهای مارکویتز و «ارزش در معرض ریسک» اقدام کرد و با توجه به قرارگیری مرزهای کارایی الگوی «ارزش در معرض ریسک» بالاتر از الگوی مارکویتز، این الگو را نسبت به الگوی مارکویتز کاراتر معرفی کرده است.

گل مکانی (۱۳۹۱) در مقاله‌ای پس از توسعهٔ مدل انتخاب سهام مارکویتز، روشی مبتنی بر ترکیب دو روش بهینه‌یابی اجتماع مورچگان و شبیه‌سازی تبرید – تدریجی پارتو، به کار گرفته است. به‌منظور اعتبارسنجی این روش، عملکرد آن را در بورس اوراق بهادار تهران با عملکرد چند روش فرااِبتکاری دیگر مقایسه کرده است. نتایج به‌دست‌آمده حاکی از برتری روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها است.

امیری و همکاران (۱۳۸۹) در مقاله‌ای به دنبال تعیین مدل مناسب تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، با استفاده از فرایند تحلیل شبکه به بررسی شرکت‌های قرارگرفته در هفت صنعت پرداختند. پس از بررسی بهینه‌بودن پرتفوی سهام انتخاب‌شده از شرکت‌های موجود در این صنایع براساس معیار شارپ و ترینر، جهت بهینه‌سازی پرتفوی سهام، الگوریتم ممتیک را به کار گرفتند. نتایج حاصل بیانگر این موضوع بود که الگوریتم ممتیک در دستیابی به جواب بهینهٔ مسئله بسیار توانمند بود و در مقایسه با الگوریتم ژنتیک در مدت‌زمان مشابه، نتایج بهتری را ارائه خواهد کرد.

یائو و همکاران (۲۰۱۲) در مقاله‌ای با عنوان «انتخاب پرتفوی با استفاده از میانگین–ارزش در معرض خطر مشروط» که یک چارچوب تخمین ناپارامتریک است، در ابتدا فرمول تخمین‌شدهٔ محاسبهٔ CVaR را با استفاده از تخمین ناپارامتریک تابع چگالی ضرر، در زمان‌هایی که فروش استقراضی مجاز است یا غیرمجاز، به دست آورده‌اند و سپس ثابت کرده‌اند که هر دو مدل ناپارامتریک mean – CvaR مسائل بهینه‌سازی محدب هستند.

کهنسال و ناجکار (۱۳۹۲) در پژوهشی با عنوان «بهینه سازی بازده سهام با استفاده از بازده‌های فازی تصادفی»، انتخاب پرتفوی با درنظرگرفتن مسائلی

همچون بازده‌های احتمالی آینده و بازده‌های انتظاری نامعین را بررسی کردند. در انتخاب پرتفوی سهام فازی تصادفی، مدل به‌صورت غیرخطی فرموله‌بندی شده است و متغیرها به‌صورت اعداد فازی تصادفی در نظر گرفته شده‌اند. سپس نتایج مدل بهینه‌سازی فازی و تصادفی با نتایج حاصل از روش حرکت تجمعی ذرات مقایسه شد و این نتیجه حاصل شد که بازده پرتفوی به‌دست‌آمده با مدل بازده تصادفی بیشتر از وقتی است که روش حرکت تجمعی ذرات به کار گرفته شود.

هانن و فوزی[10](۲۰۱٤)، در پژوهشی با عنوان «مدل میاگین- VaR[11] با نوسانات تصادفی» مسئلهٔ تصمیم‌گیری برای انتخاب ترکیبی بهینه از یک دارایی ریسکی و یک دارایی خاص با استفاده از ماکزیمم‌کردن تابع مطلوبیت با محدودیت VaR را که با یک ضرر متناسب با بازده جاری محدود شده است، بررسی کردند. نتایج این پژوهش بیانگر این بود که محدودیت VaR، مقادیر سرمایه‌گذاری‌شده در دارایی ریسکی را رفته‌رفته در طول زمان کاهش می‌دهد و نوسانات تأثیر مهمی بر جواب بهینه دارند.

۳- روش پژوهش

این پژوهش از نظر هدف جزء پژوهش‌های کاربردی است و ازنظر روش جزء پژوهش‌های توصیفی- تحلیلی محسوب می‌شود.

داده‌های این پژوهش با استفاده از نرم‌افزار ره‌آورد نوین گردآوری شده اند.

۳-۱- روش‌های ناپارامتریک

تابع چگالی احتمال، مفهومی اساسی در آمار و احتمال است که با دانستن آن می‌توان به رفتار تصادفی تخمین‌کننده‌ها پی برد. البته تعیین توزیع تخمین‌کننده ها به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. درواقع به‌وسیلهٔ تابع چگالی احتمال است که می‌توان به رفتار متغیرهای تصادفی پی برد. روش‌های تخمین چگالی، عمدتاً به دو گروه اصلی تقسیم‌بندی می‌شوند: ۱- تخمین پارامتری؛ ۲- تخمین ناپارامتری.

در تخمین پارامتری فرض می‌شود که داده‌ها از یک خانوادهٔ توزیع احتمال مانند نرمال با پارامترهای مجهول δ^2, μ هستند. در این حالت، هدف تخمین δ^2, μ از روی داده‌ها است. در تخمین ناپارامتری خود تابع چگالی f مجهول است و در این حالت، خود داده‌ها باید تخمین f را تعیین کنند (آمار، ۱۳۸٤).

روش‌های برآورد چگالی:

۱ . هیستوگرام
۲ . برآورد ساده
۳ . کرنل
٤ . کرنل تطبیقی
۵ . نزدیک‌ترین همسایه
٦ . نزدیک‌ترین همسایهٔ تعمیم‌یافته
۷ . سری‌های متعامد
۸ . ماکزیمم درست‌نمایی تاوانیده

با توجه به اینکه برآوردگر کرنل تعمیمی از برآوردگر ساده است در این پژوهش به بررسی این دو روش پرداخته شده است.

برآوردگر ساده

بنا به تعریف، اگر X دارای تابع چگالی احتمال f باشد، آنگاه:

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} p(x-h < X < x+h) \qquad (1)$$

یک برآوردگر طبیعی از $p(x-h < X < x+h)$ عبارت است از:

$$\frac{\left(\text{تعداد } X_1,\dots,X_n \text{ های واقع در } (x+h,x-h)\right)}{\mathrm{h}} \qquad (2)$$

بنابراین برآوردگر ساده به این صورت تعریف می‌شود:

(۳)

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2nh}\Big((x+h, x-h)\text{ در واقع های } X_1, \dots, X_n \text{ تعداد}\Big)$$

حال اگر تابع w به‌صورت زیر تعریف شود:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

(٤)

برآوردگر ساده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}w\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$$

(٥)

۳-۲- برآوردگر کرنل

تابع کرنل[1] یک تابع غیرمنفی، حقیقی و انتگرال‌پذیر با هستهٔ K است. تابعی موزون و استاندارد که به‌دلیل h=1 تابع موزون نامیده شده است. پارامتر h، پارامتر هموارسازی یا پهنای باند نامیده می‌شود (والتر زوچینی[2]، ۲۰۰۳: ۱۵۰۵).

همان‌طور که اشاره شد برآوردگر کرنل تعمیمی از برآوردگر ساده به‌منظور فائق‌آمدن بر مشکلات برآوردگر ساده است. در برآوردگر ساده چنانچه تابع با وزن w را به‌وسیلهٔ تابع K به‌نام تابع کرنل که در شرایط زیر صدق می‌کند جایگزین کنیم، برآوردگر کرنل با هستهٔ K حاصل می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\,dx = 1$$

(٦)

معمولاً K خود یک تابع چگالی احتمال متقارن مانند چگالی گاوسی است. به این ترتیب برآوردگر کرنل با هستهٔ K به‌صورت زیر تعریف می‌شود (سیلورمن[3]، ۱۹۸٦: ٦٥۹):

$$\widehat{f(x)} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$$

(۷)

تخمین ناپارامتریک کرنل به انتخاب تابع کرنل حساس نیست؛ مثلاً K(.) می‌تواند به‌صورت زیر باشد که دلیل انتخاب این هسته، نبودِ محدودیت بازه‌ای برای متغیر v و همچنین یک‌ضابطه‌ای و پیوسته‌بودن آن است:

$$K(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{v^2}{2}} \quad (۸)$$

اما انتخاب پهنای باند یک مسئلهٔ بحرانی و مهم است. برای تخمین ناپارامتریک $\widehat{f(x)}$، براساس یک قاعدهٔ سرانگشتی h به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (لی و راسین، ۲۰۰۷: ٦٥۸):

$$h = 1.06\,\delta_x T^{-1/5}$$

(۹)

که δ_x انحراف استاندارد از X است و می‌تواند به این صورت تخمین زده شود:

$$\widehat{\delta_x} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(X_i - \bar{X})^2}$$

(۱۰)

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{T}\right)\sum_{i=1}^{T} X_i$$

(۱۱)

۳-۳- مدل ارزش در معرض خطر مشروط

راکفلر و اوریاسو (۲۰۰۰)، معیار جایگزینی با عنوان ارزش در معرض خطر مشروط (*CVaR*) برای محاسبهٔ ریسک ارائه دادند که کمبود انتظاری نیز نامیده می‌شود. بر این اساس *CVaR* به‌عنوان میانگین ریسک‌هایی که بزرگ‌تر و فراتر از ارزش در معرض خطر باشند، در نظر گرفته می‌شود. اگرچه *VaR* یک معیار بسیار رایج برای محاسبهٔ ریسک است؛ اما فاقد یک سری خصیصه‌های ریاضیاتی مانند جمع‌پذیری و تحدب است و فقط زمانی که برمبنای انحراف استاندارد از توزیع نرمال باشد یک معیار ذاتی ریسک است؛ اما در دنیای واقع در اکثر مواقع توزیع ضررها نرمال نیست؛ زیرا توابع ضرر تمایل دارند گسستگی تجربی را نشان دهند. بنابراین با توجه به مطالعهٔ آرتزنر و همکارانش *VaR* نمی‌تواند یک معیار ذاتی ریسک

باشد. با توجه به این نواقص معیار جدیدی با عنوان *CVaR* برای سنجش ریسک ارائه شد.

۳-٤- تعریف *CVaR*

ارزش در معرض خطر[۱۰]مشروط عبارت است از میانگین ریسک‌هایی که بزرگ‌تر و فراتر از ارزش در معرض خطر باشند. به عبارت دیگر، α٪ از میانگین توزیع بازده متغیر تصادفی بزرگ‌تر از ارزش در معرض خطر (یامای و یوشیبا، ۲۰۰۰: ٦۰).

۳-٤-۱- تعریف ریاضی *CVaR*

فرض می‌کنیم $w \in \aleph$، یک بردار تصمیم و $\xi \in \mathbb{R}$، یک بردار تصادفی که بیان‌کنندهٔ ارزش مبنای فاکتورهای ریسک و $f(w,\xi)$ تابع ضرر است. به‌منظور ساده‌شدن، فرض می‌کنیم که $\xi \in \mathbb{R}$ یک بردار تصادفی پیوسته است. برای یک پرتفوی مشخص w، احتمال ضرری که از یک آستانهٔ α بیشتر نشود با یک تابع احتمال تحت (.) نشان داده شده است:

$$\psi(w,\alpha) := \mathbb{P}(f(w,\xi) \le \alpha). \quad (۱۲)$$

ارزش در معرض خطر پرتفوی w در سطح اطمینان مشخص $\beta\ (0<\beta<1)$ ، کمترین مقدار α است که $\psi(w,\alpha) \ge \beta$ را نتیجه می‌دهد؛ یعنی:

$$VaR_\beta(w) := inf\{\alpha \in \mathbb{R}\,, \psi(w,\alpha) \ge \beta\}. \quad (۱۳)$$

بنابراین *CVaR* به‌عنوان انتظار مشروط ضرر پرتفو که بیشتر یا مساوی *VaR* است تعریف می‌شود:

$$CVaR_\beta(w) = E\big[f(w,\xi) | f(w,\xi) \ge VaR_\beta(w)\big] \quad (۱٤)$$

۳-۵- مدل برنامه‌ریزی خطی *mean-CVaR*

اگر فرض شود که توزیع داده‌ها نامشخص است، اما $f(w,R_i)$ یک تابع خطی از w است، به‌منظور حل مسئلهٔ بهینه‌سازی *mean- CVaR* از روش برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شود؛ بنابراین مدل آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \mathrm{minCVaR_{Lp}(u)} = \\ \mathrm{min}_{w,\alpha,\eta_i}\left(\alpha + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{i=1}^{T}\eta_i\right) & i = 1,2,\dots,T. \\ s,t.\, w \in \aleph, \eta_i \ge 0, \alpha + \eta_i - f(w,R_i) \ge 0, \end{cases} \quad (۱۵)$$

۳-٦- مدل ناپارامتریک *mean- CVaR*

اما اگر توزیع داده‌ها نامشخص باشد و از تخمین ناپارامتریک برای تخمین توزیع داده‌ها استفاده شود با توجه به روابط (۵)، (۱٤) و (۱۵) مدل ناپارامتریک *mean- CVaR* که یک مسئلهٔ بهینه‌سازی محدب است، به‌صورت زیر خواهد بود (ضمیمه):

$$\begin{cases} min_{\omega,\alpha} CVaR_{nonp}(u) = \\ \quad \alpha - b\sum_{i=1}^{T}\left((\acute{\omega}R_i + \alpha)G\left({X_1}^{R_i}\right) + hH\left({X_1}^{R_i}\right)\right) \\ \quad s.t.\, \omega \in \aleph\,, w'e = 1\,, w'r = u \end{cases} \quad (۱٦)$$

٤- بحث

اوراق بهادار موردبررسی در این پژوهش سهام شرکت‌های لیست‌شده بین ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران در زمستان ۱۳۹۲ بوده است. از این بین شرکت‌هایی انتخاب شده‌اند که داده‌های کافی برای تخمین را در این بازهٔ زمانی داشته باشند. بنابراین شرکت‌های منتخب این پژوهش به ۱۵ شرکت کاهش یافتند که در جدول (۱) به آنها اشاره شده است:

جدول (۱): پانزده شرکت منتخب این پژوهش

ردیف	نماد	ردیف	نماد
۱	اخابر	۹	فولاد
۲	بترانس	۱۰	وبملت
۳	حکشتی	۱۱	وپارس
٤	خساپا	۱۲	وتجارت
٥	سفارس	۱۳	وسپه
٦	فاذر	١٤	وغدیر
۷	فخاس	۱٥	ونوین
۸	فملی	١٦	

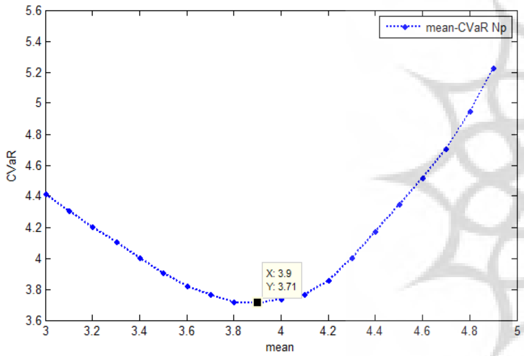
برای حل مسائل بهینه‌سازی و انتخاب سبد بهینه ابتدا باید توزیع داده‌های مورداستفاده در پژوهش را تعیین کنیم؛ بنابراین آزمون نرمال‌بودن داده‌ها با استفاده از آزمون *Jarque – Bro* و در محیط *eviews* صورت گرفت که درنتیجه فرض صفر رد شد و مشخص شد توزیع داده‌ها نرمال نیست.

بنابراین برای بهینه‌سازی مسئلهٔ *mean-CVaR* از روش تخمین ناپارامتریک استفاده شد. تابع تخمین مورداستفاده در این پژوهش، تابع کرنل است که یک هستهٔ گاوسی مطابق رابطهٔ (۸) و یک پارامتر هموارسازی مطابق رابطهٔ (۹) را برای تخمین توزیع داده‌ها به کار می‌گیرد. پس از حل مسئلهٔ بهینه‌سازی در نرم‌افزار متلب، سبد بهینه به‌صورت جدول (۲)، به دست آمد:

جدول(۲) نشان می‌دهد که سبد بهینهٔ حاصل از روش Np باید شامل چه درصدی از سهام باشد؛ ملاحظه می‌کنیم بیشترین وزن را در این سبد سهم وسپه با مقدار ۲۱,۹٤٪ دارد و کمترین سهم سبد را سهام بترانس، سفارس، فاذر، فولاد و پارس با مقدار ۰,۰۱٪ دارند. شکل (۱) نیز مدل $mean - CVaR_{Np}$ را به‌ازای مقادیر مختلف u (بازده موردانتظار) نشان می‌دهد می‌دهد؛ به عبارتی، شکل (۱) نشان‌دهندهٔ این است که

جدول (۲): سبد منتخب به‌دست‌آمده با استفاده از بهینه‌سازی به‌روش Np

$= 3.71 CVaR_{NP}$			
اخابر	٪ ۳/۱۵	فولاد	٪ ۰/۰۱
بترانس	٪ ۰/۰۱	وبملت	٪ ۲/۱۷
حکشتی	٪ ۰/۰۱	وپارس	٪ ۰/۰۱
خساپا	٪ ۰/۰۳	وتجارت	٪ ۱۷/۸٦
سفارس	٪ ۰,۰۱	وسپه	٪ ۲۱/۹٤
فاذر	٪ ۰/۰۱	وغدیر	٪ ۱۳/۹۸
فخاس	٪ ۱٥/۳٥	ونوین	٪ ۱٥/۳۳
فملی	٪ ۱۰/۰۸		



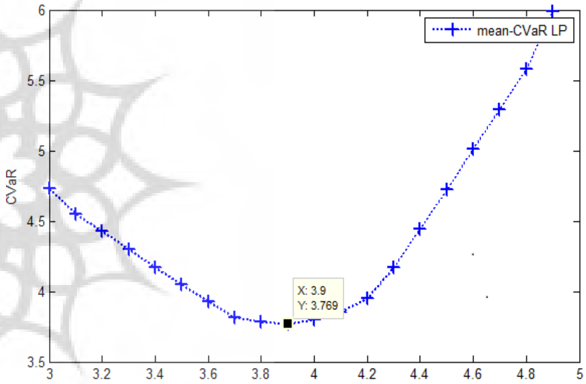
شکل ۱. مدل mean-CVaR با استفاده از روش NP

با تغییر بازده موردانتظار به‌ازای چه مقداری و کمترین مقدار را با CVaR= 3.71 به‌ازای u=3.9 نشان از بازده، ریسک کمترین مقدار خود را خواهد داشت.

اما اگر از روش *LP* برای بهینه‌سازی استفاده کنیم و فرض کنیم رابطهٔ خطی بین متغیرها برقرار است، سبد به‌دست‌آمده و مقدار *CVaR* مطابق با مقادیر جدول (۳) خواهد بود. در صورت استفاده از این روش سهم وتجارت با ۲۲,۲۱٪ بیشترین سهم سبد و سهام بترانس، سفارس، فاذر، فولاد و وپارس با ۰٪ کمترین سهم را در سبد بهینه خواهند داشت.

جدول (۳): سبد منتخب به‌دست‌آمده با استفاده از بهینه‌سازی به‌روش LP

$= 3.77 CVaR_{NP}$			
اخبار	٪ ٦/٣١	فولاد	٠
بترانس	٠	وبملت	٪ ١/٥
حکشتی	٠	وپارس	٠
خساپا	٪ ٢/٥٥	وتجارت	٪ ٢٢/٢١
سفارس	٠	وسپه	٪ ٩/٦
فاذر	٠	وغدیر	٪ ١٥/٢٢
فخاس	٪ ٨/٩٢	ونوین	٪ ١٥/٧٦
فملی	٪ ١٧/٩٢		



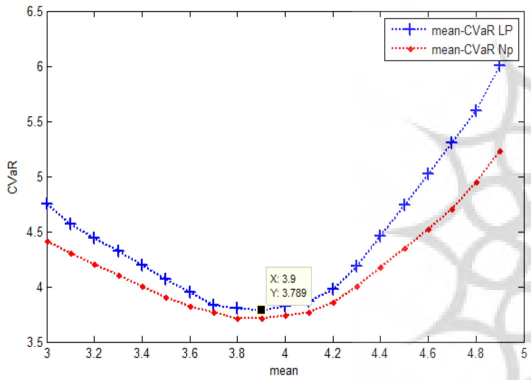
شکل ۲. مدل mean-CVaR با استفاده از روش LP

اکنون با مقایسهٔ دو روش یادشده ملاحظه می‌کنیم که نتایج حاصل از به‌کارگیری روش ناپارامتریک بهتر از روش برنامه‌ریزی خطی است و مقدار کم‌تری در تابع هدف نسبت به روش برنامه‌ریزی خطی ارائه کرده است. همچنین روش ناپارامتریک به‌کارگرفته‌شده در این پژوهش بسیار سریع‌تر از روش برنامه‌ریزی خطی است و از دیگر مزایای آن می‌توان به این مورد اشاره کرد که به هرگونه فروضی درخصوص توزیع متغیرهای مالی و پارامترهای بازار نیازی ندارد.

در این قسمت به‌منظور تست برتری مدل **Np** نسبت به مدل Lp، اگر مقادیر متغیرهای حاصل از محاسبهٔ مدل به‌روش LP را در مدل Np قرار دهیم ملاحظه می‌کنیم که مقدار $CVaR$ بدتر می‌شود. به این معنی که سبد به‌دست‌آمده به‌روش LP اگر با روش Np به کار گرفته شود مقدار $CVaR$ بیشتر از زمانی است که سبد با روش Np به دست آید. این موضوع بیانگر کاراتربودن روش ناپارامتریک نسبت به روش برنامه‌ریزی خطی است. نتایج حاصل از این مقایسه در جدول (٤) و شکل (۳) ارائه شده است.

جدول (٤): مقایسهٔ مقادیر $CVaR_{NP}$ و $CVaR_{LP}$

$CVaR_{Np}$	۳/۷۱
$CVaR_{LP}$	۳/۷۹



شکل ۳. مقایسهٔ مدل‌های $mean - CVaR_{Np}$ و $mean - CVaR_{LP}$

٥- نتیجه‌گیری

در صورتی که توزیع داده‌ها نرمال نباشد استفاده از روش Np نتایج بهتری نسبت به روش LP ارائه می‌دهد و اگر سبد به‌دست‌آمده ازطریق روش LP را در تابع هدف Np قرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم مقدار $CVaR$ به‌دست‌آمده بیشتر می‌شود که این نیز گواهی بر برتری روش Np بر روش LP است. همچنین نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از روش ناپارامتریک برای تهیهٔ پرتفوی سهام نسبت به روش برنامه‌ریزی خطی دارای سرعت محاسبهٔ بیشتری نیز است؛ بنابراین:

۱) با توجه به اینکه در دنیای واقعی همواره اطلاعات کمی درخصوص توزیع داده‌ها در اختیار است و در بیشتر موارد توزیع آنها ناشناخته است، توصیه می‌شود از روش ناپارامتریک استفاده شود.

۲) از آنجایی که نزدیکی نتایج به‌دست‌آمده از چنین مدل‌هایی به واقعیات دنیای سرمایه‌گذاری، به صحت اطلاعات و داده‌های وارده بستگی دارد، پیشنهاد می‌شود چنین مدلی برای سرمایه‌گذاری در بازارهایی به کار گرفته شود که ازلحاظ درجهٔ کارایی در سطح بالایی قرار گرفته باشند.

۳) در این پژوهش فقط دو معیار ریسک و بازده در نظر گرفته شده است؛ بنابراین توصیه می‌شود معیارهای دیگری نظیر نقدشوندگی نیز برای تشکیل سبد مورد توجه قرار گیرد.

و اما محدودیت‌های پژوهش حاضر به شرح زیر است:

۱) میزان تعمیم‌پذیری نتایج این پژوهش به دنیای سرمایه‌گذاری می‌تواند محدودیت اول این پژوهش باشد.

۲) با توجه به محدودبودن جامعهٔ آماری و نیز محدودیت‌های معاملاتی شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار و درنظرگرفتن این موضوع که شرکت‌های سرمایه‌گذاری به‌علت ماهیت خاص فعالیتشان از جامعهٔ آماری کنار گذاشته شده‌اند؛ بنابراین تعمیم دادن نتایج این پژوهش به سایر شرکت‌ها باید با احتیاط انجام گیرد.

۳) به‌دلیل درنظرگرفتن دورهٔ زمانی خاص، نتایج پژوهش حاضر از قطعیت لازم برای همهٔ دوره‌ها برخوردار نیست و تعمیم آن به سایر دوره‌ها نیازمند دقت نظر است.

٦- فهرست علائم

$CVaR_{true}$ ارزش در معرض خطر مشروط

$c(\beta)$ تابعی از β و erf

erf تابعی از هسته

$\delta(u)$ مینیمم انحراف استاندارد برای هر بازده موردانتظار داده‌شده با عنوان u

u بازده موردانتظار داده‌شده که عضو بازه‌ای از مینیمم داده‌ها تا ماکزیمم داده‌ها است، $u\epsilon[r_{min}, r_{max}]$

r بازده موردانتظار دارایی‌ها

$\delta^2(u)$ واریانس بازده موردانتظار داده‌شدهٔ u

Σ ماتریس کوواریانس بین بازده‌ها

w وزن دارایی موجود در سبد سهام

e بردار واحد

0_{15} بردار صفری با بعد ۱۵

$$c(\beta) = \sqrt{2}erf^{-1}(2\beta - 1), erf(z) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^{-z} e^{-t^2}$$

$CVaR_{lp}$ ارزش در معرض خطر مشروط با استفاده از برنامه‌ریزی خطی

β ۰/۹

T تعداد مشاهدات از هر دارایی

η_i $f(w, R_i) - \alpha^+$

$f(w, R_i)$ یک تابع خطی از w

$CVaR_{nonp}$ ارزش در معرض خطر مشروط با استفاده از تخمین ناپارامتریک

b $\frac{1}{(1-\beta)T}$

$G({X_1}^{R_i})$ $\int_{-\infty}^{X^{R_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{\frac{-t^2}{2}}$

t $\frac{f(w,R_i) - x}{h}$

h پارامتر هموارسازی، $0.5 * T^{\frac{-1}{5}} * \delta(x)$

$\delta(x)$ تخمین انحراف معیار بین داده‌ها

$H({X_1}^{R_i})$ $\int_{-\infty}^{X^{R_i}} t * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{\frac{-t^2}{2}}$

منابع

آمار، پژوهشکده (۱۳۸٤). برآورد چگالی داده‌ها و پارامترها. نشر پژوهشکده آمار.

امیری، مقصود و شریعت پناهی، مجید و بناکار، محمدهادی (۱۳۸۹). انتخاب سبد سهام بهینه با استفاده از تصمیم‌گیری چندمعیاره، فصل‌نامهٔ بورس اوراق بهادار، شماره ۱۱، ص ٢٤-٥..

شاه علی زاده، محمد و معماریانی، عزیزالله (۱۳۸۲). چارچوب ریاضی گزینش سبد سهام با اهداف چندگانه، نشریهٔ بررسی‌های حسابداری و حسابرسی، شماره ۳۲، ص ۸۳-۱۰۲.

کریمی، مریم (۱۳۸٦). بهینه‌سازی پرتفو با استفاده از مدل ارزش در معرض خطر VaR در بورس اوراق بهادار

تهران، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی، دانشگاه الزهرا، دانشکده مدیریت.

کهن سال، محمدرضا و ناجکار، نسترن (۱۳۹۲). بهینه‌سازی بازده سهام با استفاده از بازده‌های فازی تصادفی، کنفرانس ملی حسابداری و مدیریت، ص ۱٦-۹.

گل مکانی، حمیدرضا و درخشان، مجتبی و حنفی زاده، پیام (۱۳۹۱). رویکردی فراابتکاری برای انتخاب سبد سهام با اهداف چندگانه در بورس اوراق بهادار تهران، نشریهٔ بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره ۳، ص ۳۳۱-۳۱۷.

Fernandez, A. G." .(2007). Portfolio Selection Using Neural Networks". Computers & Operations Research. , 34(4), 1177-1191.

Hanen A O, Faouzi J. (2014). Mean-VAR Model with Stochastic Volatility. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *109*, 558-566.

Li Q, Racine JS. (2007). Nonparametric Econometrics: Theory and Practice. Princeton University Press.

Markowitz H (1952). Portfolio Selection**:** *Jurnal of Finance*, 7, 77-91.

Pflug G. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: Uryasev S, editor. Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rockfeller T, Uryasev S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distribution. *Journal of Banking and Finance*, 26(7),1443–71.

Silverman, B.(1986). Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Chapman & Hall.

Yamai, Y. & Yoshiba, T. (2002). "On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall**".** *Montary and Economic Studies*, 20, 57-85.

Yan Wei, Rong Miao, Shurong Li (2007). Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution. *Applied Mathematics and Computation*, 194, 128–134.

Yao, H., Li, Z., & Lai, Y. (2012). Mean-CVaR portfolio selection: A nonparametric estimation framework. *Computers & Operations Research, 40(4), 1014–102.2*

Zucchini Walter. (2003). Applied Smoothing Techniques, part1: Kernel Density Estimation.

پی نوشت:

[1] Fernandez and Gomez
[2] Markowitz
[3] Rockfeller and Uryasev
[4] Yamai and Yoshiba
[5] Pflug
[6] Li
[7] Yao et al.
[8] Particle swarm optimizatio*n*
[9] Genetic Algorithm
[10] Hanen and Faouzi
[11] Value at Risk
[12] Kernel Function
[13] Zucchini
[14] Silverman
[15] Value at Risk