فصلنامه اعتیاد پژوهی سوءمصرف مواد، سال دهم، شماره چهلم، زمستان ۱۳۹۵
Quarterly Journal of Research on Addiction, Vol. 10, No. 40, Winter 2017

مقاله پژوهشی
Research Article

ارائه مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل برای شیوع سوءمصرف مواد مخدر

سید حمید حسینی[۱]، ابوالفضل تاری مرزآباد[۲]، مجید حسن پورعزتی[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۶/۲۹

چکیده

هدف: شیوع مصرف مواد مخدر امروزه از جمله مشکلاتی است که به شدت رو به افزایش است و برکنش‌های اجتماعی افراد معتاد بر دیگر نفرات جامعه بستگی دارد. هدف این پژوهش ارائه یک مدل پیوسته ریاضی با استفاده از معادله انتگرال- دیفرانسیل برای مسئله شیوع سومصرف مواد مخدر در بین نفرات یک جامعه مفروض می‌باشد. **روش:** ساختارهای ارتباطی که در شبکه‌ها و سیستم‌های گسسته در میان اعضای یک مجموعه مفروض وجود دارند، می‌تواند به یک مدل شبکه‌ای گسسته و درنهایت به یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل در حالت پیوسته منتهی شود. در این پژوهش مصرف کنندگان مواد مخدر و میزان پاکی و سلامت آن‌ها با درنظرگرفتن تأثیر نفرات دیگر جامعه بررسی شده‌است. **یافته‌ها:** در این مقاله، علاوه بر ارائه مدل‌های گسسته ساده برای مسئله شیوع مصرف مواد مخدر، مدل جایگزین جدیدی به همراه مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل معرفی می کنیم که از سکون و اینرسی موجود در مدل‌های قدیمی‌در شیوع مصرف در بین افراد جامعه دوری می کند. **نتیجه گیری:** تحلیل‌هایی بر روی مدل‌های شبکه‌ای گسسته برای مسئله شیوع سوءمصرف مواد مخدر در یک جامعه مفروض انجام شد و معادله‌ای ریاضی برای روند انتشار سوءمصرف مواد مخدر با درنظرگرفتن انعطاف‌پذیری نفرات و اثرگذاری افراد معتاد بر دیگران ارائه شد.

کلیدواژه‌ها: مدل ریاضی، وابستگی به مواد مخدر، شیوع

* این طرح با حمایت مالی ستاد مبارزه با مواد مخدر ریاست جمهوری انجام شده است.

۱. نویسنده مسئول: دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، پست الکترونیک: Hamidhosseini90@yahoo.com
۲. استادیار گروه ریاضی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران
۳. استادیار گروه زیست‌شناسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

مقدمه

براساس ماهیت علم اکثر حوادث و اتفاقات طبیعی که در واقعیت آن‌ها را لمس می کنیم به زبان ریاضیات می توان بیان کرد. این تبدیل زبان کمک می کند که از ابزارهای بی‌شماری که در علم ریاضی موجود است استفاده کنیم و در پی آن تحلیل‌ها و برنامه‌ریزی‌هایی را نتیجه گیری کنیم. مصرف مواد مخدر امروزه از جمله مشکلاتی است که به شدت رو به افزایش است و شیوع آن در میان جوامع بیش از گذشته باعث تحت تاثیر قرارگرفتن افراد دیگر جامعه به خصوص افراد سالم و پاک شده است. از آنجا که مصرف انواع مختلف مواد مخدر در مصرف کننده با بروز اختلالات روانی همراه است، این موضوع می تواند زمینه‌ساز ایجاد بسیاری از حوادث و جرائم مانند سوانح رانندگی، نزاع‌ها و سایر آسیب‌های اجتماعی در کشور شود. سطح مصرف مواد مخدر هر جامعه مفروضی در میان افراد آن جامعه یکسان نبوده و به عواملی مانند انعطاف‌پذیری افراد و اثرگذاری افراد معتاد بر دیگر نفرات جامعه بستگی دارد. در این پژوهش سعی‌شده تا یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل به کمک سیستم‌های شبکه‌ای گسسته برای بررسی شیوع اعتیاد به موادمخدر ارائه شود. دلیل انتخاب مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل این است که در سال‌های اخیر نشان داده شده در مدل‌سازی ریاضی شیوع بیماری‌های عفونی و ویروسی که از نظر همه‌گیرشناسی و گسترش مشابه با اعتیاد هستند، مدل‌های معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال-دیفرانسیل پرکاربرد بوده‌اند (مدلاک، و کات،[1] ۲۰۰۳). با توجه به اینکه اعتیاد دارای برگشت‌پذیری است و فرد مبتلا به آن بعد از بهبودی نسبت به ابتلا مجدد ایمن نخواهدبود، این ویژگی برگشت‌پذیری برای بیماری‌های مشابه با اعتیاد فقط توسط مدل‌های معادله انتگرال-دیفرانسیل قابل مدل‌سازی می‌باشند (فن‌دن دریشه، و زو[2]، ۲۰۰۷). لازم به ذکر است، در حالی که مصرف موادمخدر و وابستگی افراد به آن بیماری مدنظر می‌باشد ولی شیوع و اپیدمیولوژی آن به وضوح متفاوت از شیوع در بیماری‌های عفونی و ویروسی مانند سرخک، آنفولانزا و ... می‌باشد. تاکنون در ارتباط با شیوع مصرف موادمخدر مدل ریاضی

1. Medlock, & Kot
2. Van den driessche, & Zou

مشـابهی ارائه نشـده اسـت. اما در این خصـوص تحقیقات مشـابهی در رابطه با شـیوع مصـرف الکل با روش مشـابه مدل‌سـازی ارائه شـده است (براون، ویلسون، پلسکو، باچانان، گلیسون[1]، ۲۰۰۶؛ ویلســون، بـاچـانـان، گلیســون، و براون، ۲۰۰۴؛ فرنچ، تیموراوغلو، لویز، و براون[2]، ۲۰۱۰). در منابع ذکر شـده مدل شـبکه‌ای گسـسـته با تابع نرخ پایدار برای رفتار و شـیوع این شــرایط در یک جمعیت به همراه محاسـبات ارائه‌شــده‌اســت. در این‌جا به‌منظور آزمایش پایداری (به‌طور تحلیلی) مدل‌های جدید سـاده‌ای با الهام از مدل شـبکه‌ای گسـسـته ارائه و درنهایت یک مدل معادله انتگرال- دیفرانسـیل معرفی می‌شـود. شــرایط زیادی وجوددارند که در آن‌ها نشــان داده شــده، نفراتی از یک جمعیت می‌توانند بر میزان میل و رغبت افراد دیگر برای مصــرف موادمخدر تـأثیرگـذار بـاشــند. در حقیقت، با بررســی مطالعات قبلی درمی‌یـابیم کـه تـأثیر و نفوذ نفراتی از یـک جمعیـت بر نفرات دیگر بـه معنی همـان شــیوع می‌باشـد (فانک، سـالاته، و جانسـن[3]، ۲۰۱۰). برای مطالعه بیشـتر درباره تاریخچه مدل‌های موجود در مباحث اجتماعی خوانندگان را به منابع این پژوهش ارجاع‌می‌دهیم. اســاســاً، در این پژوهش به ارزیابی شــاخص مصــرف‌مواد مخدر توســط افراد و یا گروه‌هایی از جامعه پرداخته خواهد شـد. به این منظور دینامیک‌های موجود در یک جامعه توسـط عواملی مانند انعطـاف‌پـذیری، آمـادگی نفرات آن جـامعـه و روابط‌اجتمـاعی آن‌هـا مورد ارزیـابی قرار خواهدگرفت. سـاز و کار این مدل‌ها دارای گنجایشـی برای شبیه‌سازی اثر مصرف‌کنندگان موادمخدر به روی افراد پاک جمعیت می‌باشد (نقل از براون و همکاران، ۲۰۰۶).

روش

مدل معادله دیفرانسیل پایه‌ای: نقطه شروع بررسی‌ها، معادله دیفرانسیل زیر است:

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i(1 - v_i)(n_i - r_i) \qquad (۱)$$

این معادله دارای تابع نرخ پایداری اسـت و در سـیسـتم شـبکه‌ای گسـسـته مورد استفاده قرار مـی‌گیرد (براون و همکـاران، ۲۰۰۶). در معـادلـه (۱)، تـابع $v_i = v_i(t)$ احتمـال بروز مشــکلات مرتبط با مصــرف موادمخدر را برای فرد i در لحظه t مدل‌ســازی می‌کند (مانند:

1. Braun, Wilson, Pelesko, Buchanan, & Gleeson
2. French, Teymuroglu, Lewis, & Braun
3. Funk, Salathe, & Jansen

دستگیری، تصادف رانندگی، مشاجره و درگیری). فرض می کنیم مشکلات مرتبط با مصرف موادمخدر برای یک شخص می تواند به‌جای کیفی‌بودن کمی در نظرگرفته‌شود. در این جا همچنین اصطلاح پاک‌بودن افراد و یا معتاد بودن آن‌ها (اعتیاد به یک یا چند نوع مخدر) را برای v_{i} درنظرمی گیریم. از این پس این تابع را به عنوان تابع اعتیاد معرفی می کنیم، این تابع از نوع توابع‌احتمالی می‌باشد و مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می کند. پس اگر فرد i، پاک باشد $v_{\mathrm{i}} \cong 0$ و اگر فرد i، معتاد باشد $v_{\mathrm{i}} \cong 1$ می‌شود.

تابع‌اثر $n_i = n_i(t)$ برای اندازه‌گیری تأثیر نفوذ افراد دیگر با درنظرگرفتن وزن‌های w_{ij} می‌باشد.

$$n_i(t) = \sum_j w_{ij} v_j(t),$$

به‌طوری‌که $w_{\mathrm{ij}} > 0$، اندازه ارتباط بین فرد i و j می‌باشد. همچنین فرض‌می‌شود که w_{ij} ها نرمال شده هستند ($\sum_j \mathrm{w_{ij}} = 1$ برای هر i)، علاوه بر این به‌جز یک حالت خاص می توانیم وزن‌های w_{ij} را متقارن درنظر بگیریم ($w_{\mathrm{ij}} = w_{\mathrm{ji}}$ برای هر j و i). r_{i} نیز انعطاف‌پذیری مربوط به فرد i می‌باشد ($0 \leq r_{\mathrm{i}} \leq 1$). هر اندازه r_{i} نزدیک‌ به عدد یک باشد، فرد i آمادگی کمتری برای معتاد شدن دارد. ما در این جا میزان انعطاف‌پذیری افراد را با ثابت r نشان می‌دهیم. همچنین شرط اولیه

$$v_i(0) = g_i \tag{۲}$$

برای تعیین مسئله و جواب آن لازم است.

مدل شبکه‌ای گسسته: در منابع ذکر شده مدل شبکه‌ای گسسته‌ای درنظرگرفته‌شده‌است که به نحوی میزان اعتیاد فرد i از مرحله زمانی m تا m+1 را در یک شبکه بزرگ به صورت زیر مدل‌بندی می کند.

$$v_i^{m+l} - v_i^m = \lambda v_i^m (1 - v_i^m)(n_i^m - r_i) \qquad n_i^m = \sum_j w_{ij} v_j^m. \tag{۳}$$

در اینجا v_i^m میزان پاکی و سلامت فرد i در زمان t_m است که مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می کند و $\lambda > 0$ یک نسبت ثابت می‌باشد. اگر فرض کنیم طول گام‌ها

کوچک باشـــند و همچنین زمان را از نو و دوباره مقیاس‌بندی کنیم آنگاه معادله دیفرانســیل (۱) به عنوان یک تقریب از معادله شبکه‌ای کامل و بزرگ بالا نتیجه می‌شود.

شـیوع بیماری به روی شـبکه‌ها، همواره یکی از موضـوعات مهم مورد بحث و تحقیق علمی درگذشــته و حال بوده اســت. بخصــوص وقتی که اتصــال‌ها و راه‌های ارتباطی بین نفرات جامعه (گره‌ها) در شـبکه یا به صـورت تصـادفی و یا به صـورت از پیش تعیین شـده تعریف شده باشد. این منابع روابط زیر را پیشنهاد می کنند:

$$\lim_{m\to\infty} v_i^m = \begin{cases} 1, & \bar{v}_0 > \bar{r} \\ 0, & \bar{v}_0 < \bar{r} \end{cases} \qquad (۴)$$

در اینجا $\bar{v}_0$، شـاخص میانگین و اولیه اعتیاد می‌باشـد و $\bar{r}$ انعطاف پذیری میانگین اســت. زمانی که $\bar{v}_0 > \bar{r}$ باشـد، جامعه شـامل مصـرف کنندگان اولیه مواد مخدر اسـت و زمانی که $\bar{v}_0 < \bar{r}$ باشد، جامعه به طور تحمیلی رو به پاکی هدایت می‌شود.

در منبع براون و همکاران، (۲۰۰۶) یک الگوی درمانی ارائه شـده اسـت. آن‌ها فرض کرده‌اند که درصـد کوچکی از افراد یک جمعیت با شـاخصـه‌های اعتیاد بالا می توانند درمان شـوند. این نفرات ناسـالم (با شـاخصـه اعتیاد بالا) برای یک دوره زمانی مشخص از جمعیت خود به منظور درمان حذف می‌شــوند و آنگاه پس از درمان و رســیدن به پاکی به یک جمعیت کلی با همان شـاخصـه اعتیاد مربوط به خودشـان که حالا به میزان نصف سطح انعطاف‌پذیری‌شان کاهش یافته اســت، بازگردانده می‌شــوند. همچنین با محاســبات عددی درمی‌یابیم که اگر به‌طور ســخت‌گیرانه ۷٪ از جمعیت، با توجه به یک پایه و اســاس منظم درمان شــوند، کل جمعیت پاک می‌شـوند. همین موضـوع می تواند به عنوان یک الگوی بسـیار سـودمند در باز پروری بیماران معتاد استفاده شود.

در بخش بعدی مجموعه‌ای از مدل‌های بسـیار سـاده برگرفته از مدل شـبکه‌ای گسـسـته را در نظر خواهیم گرفت این مجموعه شــامل مدل‌های بســیار ســاده و مهمی‌از جمله مدل تک متغیره، مـدل معادله دیفرانســیل دو جمعیتی و مدل انتگرال-دیفرانســیل می‌باشــد. در مدل معادله انتگرال-دیفرانسـیل اثر و نفوذ افراد دیگر جامعه به وسـیله یک میانگین سـاده محاسبه

می‌شود. همچنین در ادامه معرفی مدل‌ها، مدل جدیدی را به عنوان مدل جایگزین با استفاده از تابع هویساید [1] معرفی خواهیم کرد.

در بخش آخر مدل معادله انتگرال دیفرانسیلی به دست آورده شده را توسیع خواهیم داد. هدف اصلی از این توسیع قرار دادن مدل‌های گسسته در یک چارچوب و قالب پیوسته می‌باشد. این توسیع را با استفاده از کانولوشن دو تابع v و w انجام خواهیم داد. بررسی و آزمایش این مدل پیوسته واقعی‌تر و کاربردی‌تر از مدل گسسته قبلی می‌باشد. با کمک این مدل پیوسته امکان تحلیل عددی بیشتری به ریاضیدانان داده می‌شود تا با نتایج آن نسبت به شرایط واقعی تصمیم‌گیری کنند. لازم به ذکر است که فرض ما در این مقاله بر این است که جواب یکتایی برای معادله انتگرال- دیفرانسیل ارائه شده وجود دارد اما در اینجا اثباتی از وجود آن ارائه نکردیم. خوانندگان محترم می‌توانند برای مطالعه اثبات وجود جواب به منبع فرنچ و همکاران، (۲۰۱۰) مراجعه کنند.

ابزار

مدل‌های الهام گرفته از شبکه‌های گسسته: در این بخش همانطور که گفته شد سه مدل گسسته بسیار ساده ارائه خواهیم کرد.

مدل پایدار مضاعف تک متغیره [2]: فرض کنیم تمام افراد جمعیت از لحاظ تأثیرگذاری و انعطاف‌پذیری و مقدار تابع اعتیاد یکسان باشند (جمعیت همگن باشد) و همچنین این افراد با وزن ارتباطی مساوی با یکدیگر در ارتباط باشند. در این حالت معادله دیفرانسیل (۱) به مسئله مقدار اولیه زیر نسبت به زمان تبدیل خواهد شد.

$$\acute{v} = v(1-v)(v-r) \quad , \quad v(0) = v_0$$

لازم به ذکر است که صفر، یک و r نقاط ثابتی هستند و تابع نرخ $v(1-v)(v-r)$ بیانگر این موضوع است که هرگاه $v_0 < r$ باشد به دلیل کم‌بودن تابع اعتیاد از انعطاف‌پذیری تابع اعتیاد v به سمت صفر میل خواهد کرد (حالت‌پاکی) و هر گاه $v_0 > r$ باشد تابع اعتیاد v به سمت یک میل خواهد کرد (حالت اعتیاد). این نتایج دقیقا با رابطه (۴) سازگار هستند.

1 . Heaviside function

2 . Single variable bitable model

مـدل دوجمعیتی[1]: مدل ســـاده دیگری که درنظر می‌گیریم شـــامل دو جامعه متفاوت از هم می‌باشـند. برای شروع، جامعه مفروض مورد مطالعه را به دو گروه متفاوت تقسیم می‌کنیم. گروه اول شـامل جمعیت بزرگی از افراد معتاد با شـاخصـه اعتیاد متوسط و گروه دوم شامل جمعیت کوچکی از افراد معتاد با شـــاخصـــه اعتیاد بالا که میل و رغبت زیادی به مصـــرف مواد مخدر دارند، اســت. در این حالت، مدل به صـورت یک دسـتگاه معادلات دیفرانسـیل معمولی به فرم زیر خواهد بود:

(۵) $\acute{v}_1 = v_1(1 - v_1)(kv_1 + (1 - k)v_2 - r_1), \qquad 0 \le k \le 1,$

(۶) $\acute{v}_2 = v_2(1 - v_2)(kv_1 + (1 - k)v_2 - r_2)$

که:

(۷) $v_1(0) = v_1^0 \quad , \quad v_2(0) = v_2^0.$

در این مدل در حقیقت با دوجمعیت همگن سروکار خواهیم داشت.

فرض کنیم تابع اعتیاد v_2 مجموعه کوچکی از افرادی هســـتند که میل زیاد به مواد مخدر و مصـــرف آن دارنـد، بـا این فرض v_1 مابقی نفرات جمعیت را معرفی می‌کند. برای اینکه اثر نفوذ مصـــرف‌کنندگان موادمخدر جمعیت مفروض روی نفرات دیگر قابل چشـــم پوشـــی باشد، $k \cong 1$.

لازم به ذکر اســت که شــرایط اولیه زیر در روند کار بســیار تعیین‌کننده هســتند. در واقعیت هم میانگین وضعیت اولیه یک جمعیت در ابتدای کار حائز اهمیت است.

$v_1(0) = v_1^0 \qquad , \qquad v_2(0) = v_2^0$

به‌طوری‌که اگر اکثریت جمعیت با توجه به شـرایط اولیه از ابتدا وابسـتگی زیادی به مصرف مواد مخدر داشـــته باشـــند $(v_1^0 \to 1)$ آنگاه کل جمعیت با گذشـــت زمان میل به مصـــرف بیشـتر موادمخدر پیدا می‌کنند. در غیر این صـورت یعنی اگر شـرایط اولیه اکثریت جمعیت از ابتدا مقدار کمی باشـد $(v_1^0 \to 0)$ آنگاه کل جمعیت با گذشـت زمان میل به پاک شـدن و سلامتی پیدا می‌کنند و از میزان آمادگی و رغبتشان به مواد کاسته می‌شود.

1. Two patch model

مدل میانگین اثر نفوذ افراد بر روی افراد دیگر جامعه[1]: در این جا فرض می کنیم تعداد J نفر وجود دارند که با وزن‌های $w_i = \frac{1}{J}$ $(i = 1, \dots, J)$ به یکدیگر متصل هستند و دارای انعطاف‌پذیری یکسان و ثابت r می‌باشند. در این صورت مدل معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i(1 - v_i)(n_i - r), \qquad n_i = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} v_j, \qquad i = 1, \dots, J. \tag{8}$$

با فرض $v_i = v(x_i, t)$ و با تعریف $x_i = \frac{i}{J}$ در حالت حدی، معادله انتگرال- دیفرانسیل زیر را روی بازه $[0,1]$ در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v(1 - v)(n - r) \tag{9}$$

که در آن

$$n(t) = \int_0^1 v\,(x,t)dx \tag{10}$$

معادله بالا را می توان به عنوان یک تقریب از معادله (۸) در نظر گرفت. بلافاصله می توانیم روابط زیر را که از مزایای این تقریب ساده در فضای پیوسته می‌باشد نتیجه بگیریم:

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = \begin{cases} 1 & , \quad \int_0^1 v_0 dx > r, \\ 0 & , \quad \int_0^1 v_0 dx < r, \end{cases} \tag{11}$$

باز هم با کمی‌دقت مشاهده می کنیم که روابط بالا مشابه روابط (۴) می‌باشند.

اکنون با توجه به نحوه تعریف تابع $n(\mathrm{t})$ (به عنوان یک تابع معلوم) و با درنظرگرفتن تابع اعتیاد v در نقطه مشخص $\bar{x}$ می توانیم معادله انتگرال دیفرانسیلی بالا را به صورت تفکیک شده به دست‌آوریم:

$$\int_{v_0(\bar{x})}^{v(\bar{x},t)} \frac{du}{u(1-u)} = N(t) \tag{12}$$

که در آن

$$N(t) = \int_0^t (n(s) - r)ds \tag{13}$$

و بلافاصله با حل آن بدست می‌آوریم:

$$v(\bar{x}, t) = \left(1 + \frac{1 - v_0(\bar{x})}{v_0(\bar{x})} \mathrm{e}^{-\mathrm{N(t)}}\right)^{-1} \tag{14}$$

1. Average peer influence model

اگر در رابطه (۱۰) برای هر $\bar{x} \in [0\,,1]$ فرض کنیم $0 < v_0(\bar{x}) < 1$ باشد آنگاه خواهیم داشت $0 \leq v \leq 1$.

لازم به ذکر است که با انتگرال گیری از معادله (۹) نسبت به x یک معادله دیفرانسیل معمولی برای تابع n به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 v\ dx\right] = \left[\int_0^1 v(1-v)\,dx\right]\,(n-r) \tag{۱۵}$$

و یا فرض

$$\beta(t) = \int_0^1 v(1-v)\,dx. \tag{۱۶}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(n-r) = \beta(n-r) \tag{۱۷}$$

به‌طوری که $\beta(t) \geq 0$ می‌باشد.

فرض کنیم β نامنفی و مفروض باشد، آنگاه می توانیم معادله دیفرانسیل خطی (۱۷) را برای $n-r$ برحسب β حل کنیم و خواهیم داشت:

$$n(t) - r = (n(0) - r)e^{\int_0^t \beta(s)\,ds} \tag{۱۸}$$

اکنون دو نتیجه می توانیم بگیریم:

الف: اگر فرض کنیم $n(0) > \mathrm{r}$ و لذا $n(t) - r \geq n(0) - r$،

آنگاه وقتی که $t \to +\infty$ داریم:

$$e^{-N(t)} = e^{-\int_0^t (n(s)-r)\,ds} \\ \leq e^{-(n(0)-r)t} \to 0$$

بنابراین از (۱۰) نتیجه می گیریم که هرگاه $t \to +\infty$ آنگاه $v(\bar{x},t) \to 1$.

ب: اگر $n(0) < r$ ، مانند روند بالا نتیجه خواهیم گرفت که هرگاه $t \to +\infty$ آنگاه $v(\bar{x},t) \to 0$. در نتیجه رابطه (۱۱) ثابت می‌شود.

مدل جایگزین[1] جدید: حال مدلی را پیشنهاد می کنیم که شامل یک جایگزینی با تابع هویساید وابسته به علامت تابع $n_i - r_i$ می‌باشد. این مدل دینامیک و رفتار زمانی بلند مدت مشابه با دستگاه پایدار مضاعف (۳) را دارد. در این حالت داریم:

(۱۹) $$\frac{dv_i}{dt} = -H(r_i - n_i)v_i - H(n_i - r_i)(v_i - 1)$$

که:

(۲۰) $$n_i(t) = \sum_j w_{ij} v_j(t)$$

و $H = H(s)$ تابع هویساید است.

$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{و} \quad s > 0 \\ 0 & \text{و} \quad s \leq 0 \end{cases}$$

لازم به ذکر است اگر $n_i < \mathrm{r_i}$ باشد آنگاه $\frac{dv_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} = -v_\mathrm{i}$ بنابراین $v_\mathrm{i} \to 0$ (پاکی). و اگر $n_i > \mathrm{r_i}$ باشد، آنگاه $\frac{dv_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} = -(v_\mathrm{i} - 1)$ و $v_\mathrm{i} \to 1$ (اعتیاد). در هر صورت v_i نمی تواند بزرگتر از یک و یا کوچکتر از صفر باشد که مشابه موارد گفته‌شده در مدل پایدار مضاعف می‌باشد.

در نهایت چون $H(r_i - n_i) + H(n_i - r_i) = 1$ می‌در یابیم که:

(۲۱) $$\frac{dv_i}{dt} = -v_i + H(n_i - r_i).$$

یافته‌ها

مدل معادله انتگرال- دیفرانسیل: در این بخش یک مدل معادله انتگرال- دیفرانسیل را با استفاده از مطالب بخش گذشته معرفی می کنیم. در واقع هدف از ارائه این مدل تعمیم مدل شبکه‌ای گسسته به‌صورت یک مدل پیوسته است. برای شروع با الهام از مدل شبکه‌ای گسسته بخش قبل مدل انتگرال- دیفرانسیل زیر را پیشنهادمی کنیم.

(۲۲) $$\frac{\partial v}{\partial t} = v(1 - v)(n - r).$$

دراین مدل $v = v(x, t)$ میزان پاکی افراد را در موقعیت x و زمان t نشان می‌دهد. مشابه آنچه که قبلا بیان شده، اگر $v \cong 0$ باشد فرد موردنظر پاک می‌باشد و همچنین افراد معتاد

1 . Switch

بـا توجه به میزان اعتیادشـــان به مواد مخدر تابع اعتیادشـــان مقداری را بین صـــفر و ۱ اختیار می کنـد. واضـــح اســـت کـه نفرات معتـاد بـا میزان وابســـتگی بالا به مواد مخدر، تابع اعتیاد نزدیک به ۱ دارند ($v \cong 1$).

تـابع $n = n(x,t)$ هم میزان تـأثیر و نفوذ دیگر افراد در ارتبـاط بـا افراد را در موقعیـت x و زمان t نشان می‌دهد که برابر با کانولوشن دو تابع w و v می‌باشد.

$$n(x,t) = (w * v)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)v(y,t)dy. \quad (۲۳)$$

بـه‌طوری‌کـه $w > 0$ تابع وزن یا ردپا[1] ($\int_R \mathrm{wds} = 1$) اســـت. این تابع $w = w(s)$ یک انعطـاف‌نـاپذیری انتقالی[2] را به مدل تحمیل می کند که در حالت گســـســـته وجود نداشـــت. همچنین فرض می کنیم کـه میزان انعطـاف‌پذیری افراد نیز ثابت باشـــد ($0 \leq r \leq 1$). برای کامل کردن مدل، نیاز به شرط اولیه $v(.,0) = v_0$. داریم.

اکنون جـامعـه ای از نفرات را درنظرمی گیریم کـه بـه‌طور منظم برروی خط اعـداد حقیقی مرتب شـــده‌اند، به‌طوری‌که فرد در موقعیت مکانی $x_i = i\Delta x$ ($0 < \Delta x \ll 1$) قرار دارد. همانطور که اشـاره شـد فرض بر این اسـت که ارتباط‌ها بین نفرات جامعه با تابع ردپا w مدل بنـدی شـــود. بـا قرار دادن $w_{ij} = \Delta x\, w(x_i - x_j)$ آنگـاه می توان تابع $n_i(t)$ را در معادله (۱) به‌وسیله یک انتگرال تقریب کرد.

$$n_i = \sum_j w_{ij} v_j = \sum_j \Delta x\, w\left(x_i - x_j\right) v\left(x_j,.\right) \cong \int w(x_i - y) v(y,.)\, dy = n(x_i,.). \quad (۲۴)$$

شـــایان ذکر اســـت که این مدل همانند مدل‌های (۱) و (۳) دارای این ویژگی می‌باشـــد که هرگاه نفرات جهت‌گیری خود را در هر دو مســـیر پاکی و اعتیاد داشـــته باشـــند آنگاه کمتر مستعد پذیرش تأثیر از افراد دیگر جامعه (تحت تأثیر پارامتر $v(1-v)$) می‌باشند.

بحث و نتیجه‌گیری

براســـاس مدل ارائه شـــده تحلیل، برنامه‌ریزی، کنترل و ســـاماندهی پدیده شـــیوع مصـــرف موادمخدر قابل مدل‌سـازی ریاضـی می‌باشـد. براسـاس رفتار جامعه مفروض از مدل ریاضـی

1 . footprint

2 . translation invariance

طراحی شده پس از اعتبار سنجی جهت پیش‌بینی و تغییرات رفتار جامعه براساس تغییرات پارامترها استفاده می‌شود، همچنین با یک الگوی درمانی جامع و صحیح می‌توانیم افرادی را که دارای شاخصه اعتیاد بالا هستند در میان یک جمعیت پاک و سالم قرارداده و با گذشت زمان شاهد این هستیم که نفرات پاک آن جمعیت مفروض با اثر مثبت خود بر روی نفرات معتاد توانسته‌اند میزان میل و دلبستگی آن‌ها به مصرف مواد مخدر را کاهش دهند. همچنین با استفاده از مدل ارائه شده می‌توان سرعت شیوع در میان افراد یک جامعه را تخمین زد. این موضوع با ابزارهای ریاضی پیشرفته مانند تقریب بوسیله معادلات‌دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل تحلیل عددی بیشتری است. همچنین لازم به ذکر است که مدل انتگرال-دیفرانسیل ارائه‌شده در این مقاله می‌تواند شروع خوبی برای علاقه‌مندان به مباحث ریاضی برای تحلیل‌های بیشتر باشد. تحلیل عددی مدل (۲۴) با روش‌های جدید و دقیق‌تر به‌عنوان کارهای تحقیقاتی جدید پیشنهاد می‌شود تا بتوان تحلیل‌های دقیق‌تری ارائه کرد.

منابع

Braun, R. J., Wilson, R. A., Pelesko, J. A., Buchanan, J. R., Gleeson, J. P. (2006). Applications of small word network theory in alcohol epidemiology. *Journal of Studies on Alcohol and Drugs, 67(4)*, 591-599. DOI: 10.15288/jsa.2006.67.591.

Braun. M, (1992). *Differential equation and their applications*: *An Introduction to Applied Mathematics (Texts in Applied Mathematics) (v. 11)*, Fourth Edition, Springer, 67-80.

French, D. A., Teymuroglu, Z., Lewis, T. J., Braun, R. J. (2010). An integro-differential equation model for the spread of alcohol abuse. *Journal of Integral Equations and Applications, 22(3)*, 443-464.

Funk, S., Salathe, M., Jansen, V. A. A. (2010). Modeling the influence of human behavior on the spread of infectious diseases: A review. *Journal of the Royal Society, Interface, 7(50)*, 1247-1256. DOI: 10.1098/rsif.2010.0142.

Hethcote, H. W. (2002). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review, 42(4)*, 599-653.

Medlock, J., & Kot, M. (2003). Spreading disease: Integro-differential equations old and new, *Mathematical biosciences, 184(2)*, 201-222.

Van den Driessche, P., Zou, X. (2007). Modeling relapse in infectious diseases. *Mathematical Biosciences, 207(1)*, 89-103.

Wang, J., Pang, J., Liu, X. (2014). Modeling diseases with relapse nonlinear incidence of infection: a multi-group epidemic model, *Journal of Biological dynamics, 8(1)*, 99-116. DOI: 10.1080/17513758.2014.912682.

Wilson, R. A., Buchanan, J. R., Gleeson, J. P., Braun, R. J. (2004). A network model of alcoholism and alcohol policy, *Proc. Mathematics Problems in Industry Workshop*.

سال دهم، شماره ۴۰، زمستان ۱۳۹۵
Vol.10, No. 40, Winter 2017