Journal of Theory & Practice in Curriculum
Vol.2 (3); 2014, 117-140

دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی
سال دوم، شماره ۳، بهار و تابستان ۱۳۹۳، ۱۴۰-۱۱۷

بررسی فرایند طرح مسئله در آموزش ریاضی

Investigating the process of problem posing

مجتبی اسکندری [۱]
ابراهیم ریحانی [۲]

M. Eskandari
E. Reyhani (Ph.D)

چکیده: در بخش اول این مقاله، ابتدا به معرفی اجمالی طرح مسئله پرداخته می‌شود و پس‌ازآن، برخی از چارچوب‌ها و دسته‌بندی‌هایی که در خصوص طرح مسئله طراحی شده‌اند مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دوم مقاله، پژوهشی که در ایران انجام شده، معرفی و تشریح می‌شود. این پژوهش به روش شبه آزمایشی با گروه آزمایش و کنترل انجام شده است و هدف آن، بررسی تأثیر پرورش مهارت طرح مسئله بر توانایی حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی است. یافته‌های بخش اول نشان می‌دهد که مهارت طرح مسئله، با توانایی حل مسئله، خلاقیت و تفکر واگرا در ارتباط است و باعث ارتقای هم می‌شوند. همچنین، از فرایند طرح مسئله می‌توان به‌عنوان ابزاری جهت به دست آوردن آگاهی بیشتر نسبت به آنچه در ذهن دانش‌آموزان می‌گذرد، استفاده نمود. نتایج تحلیل آزمون t در بخش دوم پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از فعالیت‌های طرح مسئله در کلاس درس و پرورش مهارت طرح مسئله در دانش‌آموزان، توانایی حل مسئله آن‌ها را ارتقا می‌بخشد.

کلیدواژگان: طرح مسئله، حل مسئله، آموزش ریاضی، برنامه درسی، تدریس ریاضی.

Abstract: In the first part of this study, first a brief introduction of problem posing was present and then, some frameworks and classifications of problem posing were reviewed. In the second part of the study the research that has been conducted in Iran was introduced. This quasi-experimental study was conducted with experimental and control groups which aimed to investigate the impact of fostering mathematics problem posing skills on 8th grade studentsô ability to solve mathematical problems. The findings of the first part showed that problem posing skills was associated with problem solving ability, creativity and divergent thinking, and they improved each other. Problem posing process also could be used as a tool to gain a greater awareness of what's going on in the minds of students. T-test analysis of the second part of paper showed that doing problem posing activities in the classroom made a significant difference in students' problem solving skills.

Keyword: Problem Solving, Problem Posing, Mathematics Education, Curriculum, mathematics Teaching.

---

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، mojtabae@gmail.com
۲. استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، e_reyhani@yahoo.com
تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۱/۰۴ ؛ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۶/۲۱

مقدمه

حل مسئله ریاضی همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم و چالش‌برانگیز در تحقیقات آموزش ریاضی مطرح بوده است. در حال حاضر، تأکید زیادی در به‌کارگیری رویکرد حل مسئله در فرایند آموزش ریاضی وجود دارد. با پذیرش اهمیت **حل مسئله** و جایگاه آن در آموزش ریاضی، سؤالات جدیدی در پیش رو قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، این‌که منشأ این مسائل کجاست؟ یعنی مسائلی که ما حل می‌کنیم از کجا می‌آیند و چگونه تولید می‌شوند؟ آیا دانش‌آموزان هم می‌توانند مسئله طرح کنند؟ آیا طرح مسئله[1] در آموزش ریاضی، فرایند مهمی به شمار می‌آید؟ و جایگاه طرح مسئله در برنامه درسی و کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای چیست؟ اینشتن و اینسفلد[2] (۱۹۳۸، نقل شده در استویانوا و الرتن[3]، ۱۹۹۶) معتقدند صورت‌بندی یک مسئله اغلب مهم‌تر از حل آن است که ممکن است صرفاً چیزی در حد یک مهارت تجربی یا ریاضی باشد. در این مورد، سیلور[4] (۱۹۹۴) می‌گوید که «اگرچه خود مسائل، مورد مطالعه و بررسی‌های دقیق قرار گرفته‌اند، اما به ایجاد تنوع در منبع مسائلی که دانش‌آموزان در مدرسه حل می‌کنند، توجه کمی شده است». وی در ادامه ابراز می‌دارد که «اغلب از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که مسائل مطرح شده به‌وسیله معلم یا کتاب را حل کنند و به‌ندرت از آن‌ها خواسته می‌شود که خودشان مسئله طرح کنند». ازاین‌رو فرایند طرح مسئله ریاضی[5] نیز مورد توجه و بررسی قرار گرفته است، به‌طوری که کنترویچ، کوایچو، لیکین و برمن[6] (۲۰۱۲) بیان می‌دارند که «فرایند طرح مسئله ریاضی، از جمله موضوعاتی است که توجه تعداد زیادی از اعضای جامعه آموزش ریاضی را بیش از سه دهه، به خود جلب کرده است». توانایی طرح مسئله در آمریکا، حداقل از سال ۱۹۹۸، به عنوان یکی از اهداف ریاضیات مدرسه‌ای در نظر گرفته شده و در چین از سال ۲۰۰۲، به اهداف ریاضیات مدرسه‌ای افزوده شده است (یوان و سریرامن[7]،۲۰۱۱). کیلدیر و سزن[8] (۲۰۱۱) معتقدند «حل مسئله یکی از رویکردهایی است که بارها برای توضیح

1 Problem Posing
2 Einstein & Insfeld
3 Stoyanova & Ellerton
4 Silver
5 Mathematical Problem Posing
6 Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman
7 Yuan & Sriraman
8 Cildir & Sezen

یک موضوع ریاضی یا تعیین موفقیت دانش‌آموزان، به کار رفته است. از سوی دیگر، طرح مسئله یک فرایند جامع است که شامل حل مسئله نیز می‌باشد». در مقابل، کنترویج و همکاران (۲۰۱۲) طرح مسئله را یکی از ابعاد حل مسئله می‌دانند. در هر صورت، اکثر محققان، بر وجود ارتباط بین این دو تأکید دارند.

از این‌ها گذشته، سیلور (۱۹۹۴) به معرفی طرح مسئله پرداخته و به لحاظ نظری، استدلال می‌کند که طرح مسئله، می‌تواند به عنوان موارد زیر در نظر گرفته شود:

- یک ویژگی از فعالیت‌های خلاق یا توانایی ریاضی خاص؛
- یکی از ویژگی‌های آموزش پرسشگری؛
- یک ویژگی برجسته از فعالیت‌های ریاضی؛
- ابزاری برای بهبود توانایی حل مسئله دانش‌آموزان؛
- پنجره‌ای رو به درک ریاضی دانش‌آموزان؛
- ابزاری برای افزایش علاقه‌مندی دانش‌آموزان به ریاضی.

سیلور (۱۹۹۴) از این موارد، ارتباط طرح مسئله و حل مسئله را مهم‌ترین انگیزه برای جلب‌توجه محققان به این موضوع دانسته است. بااین‌وجود، وی معتقد است که هنوز ارتباط بین این دو فرایند آشکار نیست و نیاز به انجام مطالعات بیشتری دارد.

از نظر براون و والتر[1] (۲۰۰۵)، طرح مسئله به دو شکل زیر، در فعالیت حل مسئله ظاهر می‌شود؛ یکی تغییر صورت مسئله و ساخت یک مسئله ساده‌تر، برای نزدیک شدن به حل مسئله اصلی و دیگری این‌که بعد از حل یک مسئله، اغلب برای این‌که درک درستی از مسئله و آنچه انجام داده‌ایم به دست آوریم، به عقب برمی‌گردیم و با تغییر دادنِ برخی از شرایط مسئله موجود، مسائل جدیدی طرح می‌کنیم تا با بررسی آن‌ها، به درک عمیق‌تری از مسئله و راه‌حل‌های آن دست یابیم. به عقیده مکینتاش و جرت[2] (۲۰۰۰)، «به‌ندرت از دانش‌آموزان خواسته شده است که برای یک مسئله، فرایندی را ابداع کنند یا مسئله‌های خودشان را بر پایه ارزیابی از یک موقعیت یا داده، طرح کنند». در نتیجه، دانش‌آموزان تا حد زیادی از ظرفیت موجود در

1 Brown & Walter
2 McIntosh & Jarrett

فرایندهای مرتبطِ حل مسئله و طرح مسئله، برای تقویت خلاقیت و مهارت‌های تفکر، بی‌بهره خواهند ماند. علاوه بر ارتباط فرایند طرح مسئله با حل مسئله، مزایایی برای به‌کارگیری طرح مسئله در کلاس درس بیان شده است. برای مثال، لوری[1] (۱۹۹۹) بیان می‌کند:

> *وضعیت‌های طرح مسئله[2] به کودکان کمک می‌کنند که بر محتوای برنامه درسی و نوع فعالیت یادگیری ارائه شده تا حدودی کنترل داشته باشند. به‌علاوه، فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان در این زمینه انجام می‌دهند، می‌تواند باعث ایجاد یک بینش در معلمان نسبت به باورها و نگرش دانش‌آموزان به ریاضی شود.*

افزون بر این، کیلدیر و سزن (۲۰۱۱) بر این باورند که طرح مسئله، می‌تواند بدفهمی‌ها، پیش‌داوری‌ها و کاستی‌های[3] مربوط به محتوا را در زمان کوتاه‌تر و با شیوه‌ای بهتر، تجزیه و تحلیل کند. قبلاً هم کیل‌پاتریک[4] (۱۹۸۷) ابراز کرده بود که طرح مسئله، یکی از ملزومات مهمِ حل مسئله است و نباید فقط به عنوان یک هدف دیده شود، بلکه باید به آن، به عنوان ابزاری برای آموزش نیز نگریست. شورای ملی معلمان ریاضی[5] آمریکا (NCTM، ۲۰۰۰، ص ۱۱۷)، طرح مسئله را به عنوان طرح سؤالات جدید در قالب یک مسئله زمینه‌مدار، معرفی می‌نماید و بیان می‌دارد که معلم، باید مهارت طرح مسئله را پرورش و توسعه دهد.

به جهت اهمیت این حوزه، این تحقیق با دو هدف انجام شد که یکی، مروری بر مهم‌ترین تحقیقات انجام شده در خصوص طرح مسئله و دیگری، بررسی تأثیر پرورش مهارت طرح مسئله بر توانایی حل مسئله ریاضیِ دانش‌آموزان است. بخش پژوهش این مقاله به دنبال یافتنِ پاسخ برای سؤال ذیل است.

آیا پرورش مهارت طرح مسئله ریاضی بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان تأثیر دارد؟

---

1 Lowrie
2 Problem posing situation
3 Misconceptions, Prejudices & Deficiencies
4 Kilpatrick
5 The National Council of Teachers of Mathematics: NCTM

طرح مسئله

طی چند دهه اخیر، فرایند طرح مسئله ریاضی توسط برخی از محققان و آموزشگران ریاضی (به عنوان مثال، انگلیش[1]، ۱۹۹۷؛ کای[2]، ۱۹۹۸؛ کای و هوانگ[3]، ۲۰۰۲) مورد مطالعه قرار گرفته و تعاریفی برای آن ارائه شده است. شوکوان[4] (۱۹۹۳، نقل شده در استویانوا و الرتن، ۱۹۹۶) طرح مسئله را صورت‌بندی دسته‌ای از مسائل ریاضی بر مبنای یک موقعیت مفروض می‌داند. درحالی‌که سیلور (۱۹۹۴)، معتقد است طرح مسئله هم به تولید یک مسئله جدید و هم به صورت‌بندی مجدد یک مسئله مفروض دلالت دارد و بنابراین، می‌تواند قبل از حل یک مسئله، طیِ آن و بعد از حل مسئله انجام شود. در این راستا، استویانوا و الرتن (۱۹۹۶)، طرح مسئله را به عنوان فرایندی تعریف می‌کنند که در آن، دانش‌آموزان بر اساس تجارب ریاضی[5]، تعبیرها و تفسیرهای شخصی خود را از موقعیت‌های واقعی می‌سازند و آن‌ها را به‌صورت مسائل ریاضی معنادار، صورت‌بندی می‌کنند. کنترویچ و همکاران (۲۰۱۲) بر اساس تعریف حل مسئله به‌صورت «درگیر شدن در فعالیتی که حل آن از ابتدا مشخص نیست»، طرح مسئله را بعد خاصی از حل مسئله می‌دانند؛ به این صورت که فعالیت خواسته شده، یک تکلیف طرح مسئله است و هدف، طرح مسئله جدید می‌باشد که نیازهای تکلیف را برآورده می‌کند و روش صورت‌بندی مسئله جدید، برای مسئله طرح کن، از ابتدا مشخص نیست.

چارچوب‌های طرح مسئله ریاضی

بر اساس نتایج برخی از پژوهش‌های انجام شده در ارتباط با طرح مسئله، چارچوب‌ها و دسته‌بندی‌هایی برای مطالعه این فرایند ارائه شده است که در این بخش، برخی از مهم‌ترین آن‌ها به‌اختصار، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

1 English
2 Cai
3 Hwang
4 Shukkwan
5 Mathematical experience

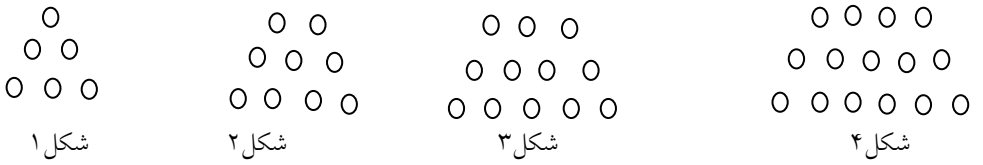
۱. دسته‌بندی سیلور

سیلور (۱۹۹۴) معتقد است که طرح مسئله جدید می‌تواند قبل، طی و بعد از حل یک مسئله اتفاق بیفتد.

طرح مسئله طی حل مسئله؛ یک نوع از طرح مسئله که معمولاً از آن به‌عنوان صورت‌بندی[1] یا صورت‌بندی مجدد[2]، یاد شده است، در طی فرایند حل یک مسئله اتفاق می‌افتد. هنگام حل یک مسئله غیر بدیهی، مسئله حل کن با این شکل از طرح مسئله درگیر می‌شود. به این صورت که سعی می‌کند با خلق مجدد مسئله داده شده، آن را طوری صورت‌بندی کند که امکان بیشتری برای حل آن داشته باشد. صورت‌بندی مسئله یک نوع فرایند طرح مسئله را نشان می‌دهد زیرا مسئله حل کن صورت یک مسئله مفروض را به یک صورت جدید تبدیل می‌کند که تمرکز روی حل آن خواهد بود. توصیه رهیافتی پولیا[3]، «به یک مسئله مناسب قابل‌دسترس فکر کن»، روش دیگری را نشان می‌دهد که در آن صورت‌بندی مسئله نیازمند طرح مسئله است. به عنوان مثال، پولیا (۱۹۴۵) بیان می‌دارد که حل معادله $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$ در ابتدای امر، کاری مشکل به نظر می‌رسد ولی مسئله حل کن با جایگزینی $x^۲ = y$ می‌تواند معادله را به‌صورت $y^۲ - ۱۳y + ۳۶ = ۰$ تبدیل کند که نسبت به معادله اولیه ساده‌تر است و با حل این معادله درجه دوم، به جواب‌های معادله اولیه دست یابد.

طرح مسئله قبل از حل مسئله؛ طرح مسئله می‌تواند زمانی اتفاق افتد که هدف، حل مسئله داده شده نیست، بلکه تولید یک مسئله جدید از یک موقعیت یا تجربه است. چنین طرح مسئله‌ای می‌تواند قبل از هر حل کردنی اتفاق بیفتد. همچنین، اگر طرح مسئله بر اساس یک موقعیت واقعی یا طراحی شده[4] باشد، در این دسته جای دارد. مثال: برای الگوی شکلی زیر، یک مسئله مناسب طرح کنید.

1 Formulation
2 Re-formulation
3 Polya
4 Contrived



شکل ۱: الگوی شکلی به عنوان موقعیتی برای طرح مسئله (کای، ۱۹۹۸، ص ۴۰)

طرح مسئله بعد از حل مسئله؛ طرح مسئله می‌تواند بعد از حل یک مسئله هم انجام شود، زمانی که فرد ممکن است برای خلق مسائل مرتبط، به بررسی شرایط مسئله اصلی بپردازد. این نوع از طرح مسئله با مرحله «بازگشت به عقب» پولیا مرتبط است.

به عنوان مثال، مسئله «۴ کارگر می‌توانند یک ساختمان را طی ۱۸ روز رنگ بزنند. اگر بخواهیم ساختمان را در ۱۲ روز رنگ بزنیم، به چند کارگر نیاز داریم؟» را در نظر بگیرید. با ایجاد تغییرات مناسب- این تغییرات می‌تواند در کمیت‌ها، متغیرها و زمینه مسئله انجام گیرد- در این مسئله، تعداد زیادی مسئله جدید می‌توان طرح کرد. به عنوان نمونه، «۴ کارگر می‌توانند یک ساختمان را طی ۱۸ روز رنگ بزنند. اگر بعد از گذشت ۳ روز ۲ کارگر اضافه کنیم، درمجموع، تمام کار چند روز به طول خواهد انجامید؟».

۲. چارچوب استویانوا و الرتن:

استویانوا و الرتن (۱۹۹۶)، موقعیت‌های طرح مسئله را به سه دسته آزاد، نیمه ساختاریافته و ساختاریافته[1] تقسیم کرده‌اند.

موقعیت طرح مسئله آزاد؛ موقعیتی است که در آن، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود برای یک وضعیت واقعی یا زمینه‌مدار، مسئله طرح کنند. استویانوا و الرتن (۱۹۹۶) به‌منظور تشویق دانش‌آموزان برای بازتاب بر تجارب قبلیِ خاص خود، این نوع از تکالیف را مورد استفاده قرار داده‌اند. نمونه‌هایی از موقعیت‌های طرح مسئله آزاد به قرار زیر می‌باشد:

- یک مسئله برای المپیاد ریاضی مدرسه خود طرح کنید؛
- یک مسئله که آن را دوست دارید طرح کنید؛

1 Free, Semi-Structured & Structured

- یک مسئله برای دوستتان طرح کنید تا او مسئله شما را حل کند.

موقعیت طرح مسئله نیمه ساختاریافته؛ تکالیفی که در آن، به دانش‌آموزان یک موقعیت باز داده می‌شود و از آن‌ها خواسته می‌شود تا ساختار موقعیت را بررسی نموده و با به‌کارگیری دانش، مهارت‌ها، مفاهیم و ارتباط با تجارب ریاضی گذشته خود، آن‌ها را تکمیل کنند. در مطالعه استویانوا و الرتن (۱۹۹۶) موقعیت طرح مسئله نیمه ساختاریافته به‌منظور تولید تعدادی مسئله مرتبط بر مبنای موقعیت‌هایی که دارای ساختارهای ناتمام هستند، مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌هایی از این نوع تکالیف از این قرار است:

- یک تصویر به دانش‌آموزان ارائه دهیم و از آن‌ها بخواهیم بر مبنای آن، مسئله طرح کنند؛
- یک معادله یا محاسبه به دانش‌آموزان ارائه دهیم و از آن‌ها بخواهیم بر مبنای آن، مسئله طرح کنند.

موقعیت طرح مسئله ساختاریافته؛ یک موقعیت طرح مسئله هنگامی ساختاریافته تلقی می‌شود که فعالیت‌های طرح مسئله بر اساس یک مسئله مشخص باشد. هدف از چنین موقعیت‌هایی، کمک به دانش‌آموزان در درک مسائل خاص، ساختارهای حل و بررسی احتمال ارتباط بین صورت مسئله و ایده‌های حل است. به‌عنوان مثال، می‌توان مسئله «دایره‌ای درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع a محاط شده است. شعاع دایره را برحسب a به دست آورید» را به دانش‌آموزان داد و از آن‌ها خواست هر تعداد مسئله جدید که می‌توانند، بر اساس آن طرح کنند.

۳. چارچوب انگلیش

انگلیش (۱۹۹۷) در راستای ارتقای توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان پایه پنجم در استرالیا، یک برنامه یک‌ساله طرح مسئله را طراحی و اجرا کرد. به این منظور، چارچوبی شامل سه مؤلفه زیر را که معتقد بود در فرایند طرح مسئله دانش‌آموزان، نقش مهمی ایفا می‌کنند، در نظر گرفت.

درک دانش‌آموزان از یک مسئله؛ که به توانایی کودکان برای درک زیرساخت‌های مسئله و شناسایی ساختارهای مشابه در مسائل مرتبط اشاره دارد. انگلیش (۱۹۹۷) در مورد انتخاب این

مؤلفه بیان می‌دارد: «دانش‌آموز برای طرح مسئله جدید در وهله اول باید بداند مسئله چیست و اگر برای طرح مسائل جدید بخواهد مسائل موجود را به کار ببرد، باید ساختار ریاضی این مسائل را بشناسد». مثلاً، دانش‌آموز بتواند مسائل معمولی[1] را از مسائل غیرمعمولی تشخیص دهد.

شناسایی مسائلی که دانش‌آموزان ترجیح می‌دهند؛ شامل درک کودکان از مسائل مختلف برای اینکه مشخص شود چه مسائلی را دوست دارند و چه مسائلی را دوست ندارند. وی درباره این بعد از چارچوب معتقد است اگر دانش‌آموزان به بیان درک خود از مسائل ریاضی تشویق شوند، معلم می‌تواند یک بصیرت عمیق از دانسته‌های ریاضی آن‌ها به دست آورد و این بصیرت می‌تواند راهنمای او برای آموزش‌های بعدی باشد.

توانایی دانش‌آموزان در درک موقعیت‌های ریاضی، به طرق مختلف؛ به‌طور مثال بتوانند نمادهای رسمی (+، −، × و ÷) را به شیوه‌های مختلف تفسیر و توصیف کنند. انگلیش (۱۹۹۷) در توضیح انتخاب این مؤلفه از چارچوب خود می‌گوید: «توانایی دانش‌آموز برای تفسیر یک موقعیت ریاضی به طرق مختلف، در درک وی از موقعیت‌های واقعی ریاضی و نیز طرح مسائلِ ریاضی، حائز اهمیت است».

۴. مدل کریستو و همکاران

کریستو، مسولیدس، پیتالیس، پنتازی[2] و سریرامن (۲۰۰۵) به ساخت، توصیف و آزمایش یک مدل نظری از طرح مسئله پرداختند و به‌منظور تولید این مدل، فرایندهایی را که به دفعات زیاد، در ادبیات پژوهشی مربوط به فرایند طرح مسئله استفاده شده بودند، عملیاتی کردند. در این مدل، این فرایندها ویرایش اطلاعات کمّی، انتخاب اطلاعات کمّی، درک و سازمان‌دهی اطلاعات کمّی و ترجمه[3] اطلاعات کمّی نام‌گذاری شده‌اند. آنان دراین‌باره، توضیح می‌دهند:

منظور از **ویرایش اطلاعات کمّی**، تکالیفی است که نیازمند طرح مسئله دانش‌آموزان، بدون محدودیت به سبب اطلاعات، داستان‌ها یا شخصیت‌های ارائه شده در مسئله است. آن‌ها به‌طور

1 Routine
2 Christou, Mousoulides, Pittalis & Pantazi
3 Editing, Selecting, Comprehending and Organizing & Translating

مثال، به داستان زیر اشاره کرده و از دانش‌آموزان خواستند که بر اساس آن، یک مسئله طرح کنند.

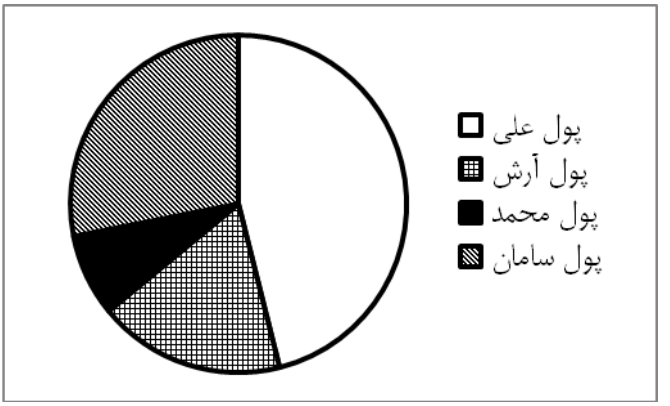
> *در سال ۱۴۹۲ میلادی، «کلمب» سفر طولانی خود را به هند آغاز کرد. در کشتی اول خود «سانتاماریا»، او ۲۵۰ کیلوگرم گوشت، ۶۰۰ کیلوگرم آرد و ۱۲۰۰ کیلوگرم سیب‌زمینی داشت. متأسفانه، به دلیل یک حادثه، ۲۴۵ کیلوگرم سیب‌زمینی خراب شد. در کشتی دوم خود، «پینتا»، ۳۰۰ کیلوگرم گوشت بیشتر از سانتاماریا داشت. کلمب بزرگترین کشف در تاریخ را انجام داد، وی امریکا را کشف کرد! (کریستو و همکاران ۲۰۰، ص ۱۵۲).*

انتخاب اطلاعات کمّی با تکالیفی در ارتباط است که نیازمند طرح مسائل یا پرسش‌هایی توسط دانش‌آموزان است که برای پاسخ‌های خاصِ داده شده، مناسب هستند. به عنوان مثال، یک مسئله در مورد داستان زیر بنویسید که پاسخ آن، ۱۰۰ مداد باشد. "علی ۱۲۰ مداد دارد، در حالی که محمد ۳۰ مداد کمتر از علی دارد."

درک اطلاعات کمّی به تکالیفی مرتبط است که در آن، دانش‌آموزان مسائل را بر مبنای معادلات داده شده ریاضی و یا محاسبات طرح می‌کنند. به‌طور مثال، یک مسئله مناسب برای معادله زیر بنویسید.

$$۴x + ۳۰۰ = ۲۰۰۰$$

ترجمه اطلاعات کمّی به طرح مسائل یا پرسش‌های مناسب به‌وسیله دانش‌آموزان، مبتنی بر نمودار یا جدول، نیاز دارد. به عنوان مثال، یک مسئله بر اساس شکل ۲ بنویسید که برای حل آن، نیاز به یک عمل جمع و یک عمل تفریق باشد.



شکل ۲: ارائه یک نمودار دایره‌ای به عنوان مبنای طرح مسئله با استفاده از فرایند ترجمه اطلاعات کمّی

کریستو و همکاران (۲۰۰۵)، پس از تحلیل نتایج با استفاده از آزمون‌های آماری، اعتبار مدل خود را تأیید کردند و بدین نتیجه دست یافتند که چهار فرآیند ویرایش، انتخاب، درک و ترجمه، در توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان نقش محوری دارند. نتایج تحقیق کریستو و همکاران (۲۰۰۵) نشان داد که دانش‌آموزان در طرح مسائلی که به ترتیب به درک، ترجمه، ویرایش و انتخاب بپردازند، موفق‌تر هستند.

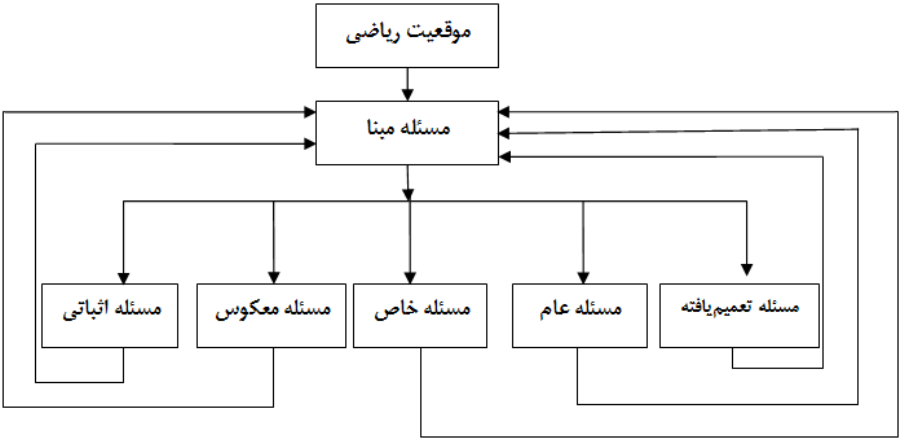
۵. چارچوب کانتررس[1]

کانتررس (۲۰۰۷) بر اساس استراتژی **اگر نباشد، چه می‌شود؟**[2] که توسط براون و والتر (۱۹۹۳) معرفی شده، یک چارچوب برای طرح مسائل جدید از روی یک مسئله **مبنا**[3] ارائه داده است. چارچوب وی در شکل ۳ ارائه شده است. منظور از **مسئله مبنا**، هر مسئله‌ای است که بتوان آن را برای تولید مسائل مرتبط تغییر داد. کانتررس (۲۰۰۷) در مقاله خود، مسئله «میانه‌های متناظر وارد بر دو ساق در مثلث متساوی‌الساقین، چه ویژگی‌هایی دارند؟» را به عنوان مسئله مبنا معرفی کرد. وی در چارچوب خود، مؤلفه‌های زیر را در نظر گرفت:

1 Contreras
2 What If Not?
3 Base

اثبات مستقیم و معکوس به عنوان مسئله[1]؛ خیلی از مسائل را می‌توان به‌راحتی با استفاده از عبارت «اگر ممکن است ثابت کنید...»، به‌صورت یک مسئله اثباتی تبدیل کرد. در مثال ذکر شده، مسئله می‌تواند به‌صورت «ثابت کنید میانه‌های وارد بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین، با هم مساوی‌اند» بیان گردد. هم‌چنین، می‌توان جای معلوم‌ها و مجهول‌های یک مسئله را به‌منظور طرح یک مسئله جدید عوض کرد. مسئله مستقیم، اجازه بررسی شرایط لازم[2] را برای حل یک مسئله ریاضی می‌دهد، در حالی که عکس آن مسئله، فرصت بررسی شرایط یا ویژگی‌های کافی[3] را ایجاد می‌کند. البته گاهی عکس یک مسئله اثباتی نادرست است و برای برقراری آن، باید شرایط یا محدودیت‌هایی اعمال کرد. مثلاً در ارتباط با مثال مذکور، مسئله را می‌توان به‌صورت «ثابت کنید مثلثی با دو میانه مساوی، متساوی‌الساقین است»، طرح کرد.

طرح مسئله خاص[4]؛ در این حالت، محدودیت‌های بیشتری روی یک یا بیش از یک ویژگی مسئله اعمال می‌شود، به‌طوری که مسئله جدید، نوعی از مسئله مبنا باشد. به عنوان مثال، مسئله «ثابت کنید میانه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مساوی‌اند»، حالتی خاص از مسئله مبنا است.



شکل ۳: چارچوب طرح مسئله کانتررس (۲۰۰۷، ص. ۱۶)

1 Proof and Converse Problems
2 Necessary Conditions
3 Sufficient conditions or properties
4 Special Problems

طرح مسئله عام[1]؛ از دیگر منابع بالقوه برای طرح مسئله ریاضی، **تعمیم** است. به این صورت که یک ویژگی مسئله مبنا با ویژگی دیگری جایگزین شود به‌طوری که مسئله مبنا، نوع خاصی از مسئله جدید باشد. به عنوان مثال، «آیا رابطه‌ای بین میانه‌های یک مثلث وجود دارد؟».

طرح مسئله تعمیم‌یافته[2]؛ در این حالت، یک یا چند ویژگی از مسئله مبنا تغییر می‌یابد، ولی در این حالت، مسئله مبنا و مسئله جدید، هیچ‌یک حالت خاصی از دیگری نیستند. برای مثال، «ثابت کنید میانه‌های مثلث قائم‌الزاویه، بزرگ‌تر یا مساویِ نصف طول وتر هستند»، نوعی مسئله توسعه‌یافته، برای مسئله مبنا به شمار می‌آید.

تاکنون به بررسی تعدادی از چارچوب‌ها و دسته‌بندی‌هایی که برای مطالعه فرایند طرح مسئله ارائه شده‌اند، پرداخته شده است. در قسمت بعد یک استراتژی و یک روش برای طرح مسئله در موقعیت‌های طرح مسئله ساختاریافته و نیمه ساختاریافته معرفی می‌شود.

استراتژی براون و والتر و روش ویسترو- یو[3] برای طرح مسئله

براون و والتر در کتاب «هنر طرح مسئله[4]» (۲۰۰۵)، یک طرح‌واره برای طرح مسائل جدید با استفاده از یک مسئله داده شده معرفی کردند که دارای پنج سطح است. سطح دوم این طرح‌واره به عنوان یک استراتژی طرح مسئله در تحقیقات زیادی (ازجمله لی‌وی و برشادسکی[5]، ۲۰۰۳؛ کانتررس، ۲۰۰۷؛ سانگ، یم، شاین و لی[6]، ۲۰۰۷) مورد استفاده قرار گرفته است و به عنوان استراتژی «اگر نباشد، چه می‌شود؟» معروف است. این طرح‌واره به‌صورت خلاصه، در جدول (۱) ارائه شده است.

1 General Problems
2 Extended Problems
3 Vistro-Yu
4The art of problem posing
5 Lavy & Bershadsky
6 Song, Yim, Shin & Lee

جدول (۱): طرح‌واره طرح مسئله براون و والتر (۲۰۰۵)

سطح	فعالیت	مثال
صفر	انتخاب یک نقطه شروع	آیا میانه‌های وارد بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین، مساوی‌اند؟
اول	فهرست کردن متغیرهای مسئله داده شده	«میانه‌ها»، «مثلث» و «متساوی‌الساقین»
دوم	پرسیدن سؤال «اگر نباشد، چه می‌شود؟» برای هر متغیر	«اگر میانه نباشد، چه؟»
سوم	طرح مسئله یا پرسیدنِ سؤال جدید	آیا ارتفاع‌های وارد بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین، مساوی‌اند؟
چهار	تحلیل و بررسی مسئله جدید	این مسئله، با مسئله اولیه متفاوت و کاملاً صحیح است. برای حل این مسئله، به روش جدیدی نیاز است و...

براون و والتر (۲۰۰۵) متذکر شده‌اند که این طرح‌واره خطی نیست، یعنی برای رفتن به هر سطح لزوماً به گذشتن از سطوح قبلی نیاز نیست و تقریباً هر سطح، می‌تواند بر سطح‌های دیگر اثر بگذارد. این استراتژی، یک روش کارآمد برای طرح مسائل جدید برمبنای یک مسئله مشخص می‌باشد، به‌طوری که کانتررس (۲۰۰۷) چارچوب خود را بر اساس این استراتژی طراحی کرده است.

ویسترو-یو (۲۰۰۹) با ایده گرفتن از یک روش در ادبیات، به نام «نوآوری در یک داستان»، روشی برای نوآوری در طرح مسئله معرفی کرده است. هر دو روش (نوآوری در داستان و نوآوری در طرح مسئله) در جدول (۲) معرفی و مقایسه شده‌اند.

جدول (۲): مقایسه روش‌های نوآوری بین داستان‌گویی و تولید مسئله ریاضی (ویسترو- یو، ۲۰۰۹، ص ۱۸۹)

نوآوری در داستان‌ها	نوآوری در مسائل ریاضی	ویژگی مسئله
جانشانی[1]- بازگویی همان داستان اما با ایجاد چند تغییر ساده مانند نام‌ها، اشیاء، مکان‌ها.	**جایگزینی**[2] – طرح مسئله مشابه به‌وسیله تغییر کمیت‌ها، مقادیر، واحدها، شکل‌ها و غیره.	حل این مسئله یک تمرین خواهد بود. چراکه با این نوع تغییر ساختار راه‌حل مسئله عوض نخواهد شد.
افزایش[3]- بازگویی همان داستان اما با اضافه کردن توصیف، گفتگوها و یا حوادث بیشتر.	**افزایش**- طرح مسئله مشابه، از طریق اضافه کردن داده یا محدودیتی جدید و یا افزودن یک مانع.	مسئله توسعه می‌یابد و می‌تواند پیچیده‌تر شود.
تغییر[4] – انجام تغییراتی که دارای بازتاب[5] هستند. به عنوان مثال، تغییرات در شخصیت‌پردازی، نو کردن فضای داستان، تغییر دادن پایان داستان.	**جرح‌وتعدیل**[6] – استفاده از همان داده‌ها، اما با اصلاح مسئله.	مسئله می‌تواند کاملاً جدید باشد، اما ممکن است برای حل، نیاز باشد از مسئله اصلی به عنوان یک نقطه آغاز استفاده شود.
انتقال[7]- بازگویی داستان در یک ژانر (نوع) متفاوت.	**زمینه مدار کردن مسئله**[8] برای اینکه آن را بیشتر به دانش‌آموزان مرتبط سازد.	مسئله مرتبط‌تر می‌شود اما اساساً مشابه همان مسئله اصلی است.

1 Substitution
2 Replacement
3 Addition
4 Alteration
5 Repercussion
6 Modification
7 Transformation
8 Contextualizing

تغییر دیدگاه[1] – بازگویی داستان از دید یک شخصیت متفاوت.	**برگرداندن یا معکوس کردن مسئله**[2]– طرح مسئله اصلی ولی با در نظر گرفتن هدف نهایی به عنوان داده و داده به عنوان هدف نهایی.	مسئله جالب‌تر و چالش‌برانگیزتر و کاملاً متفاوت می‌شود.
بازسازی طرح اصلی[3] – استفاده مجدد تنها از الگوی زیرساختی مسئله اصلی.	**صورت بندی مجدد**[4] – طرح مسئله اصلی در یک نوع متفاوت (به عنوان مثال، بیان یک مسئله اثبات کردنی به‌صورت یک مسئله موقعیتی[5]). موقعیتی[5]).	مسئله‌ی جدید متفاوت با مسئله اصلی است، اما برای فهم و حل آن، به دانش، مفهوم یا مهارتی که در مسئله اصلی لازم بود، نیاز است.

به عنوان نمونه، اگر مسئله«دو شیر آب، هریک به‌تنهایی به ترتیب در ۶ و ۱۲ دقیقه یک مخزن آب را پر می‌کنند. اگر این دو شیر با هم باز باشند، مخزن در چند دقیقه پر از آب می‌شود؟» به عنوان مسئله اصلی در نظر گرفته شود، با استفاده از شش راهبرد بیان شده در جدول (۲) می‌توان اقدام به طرح مسائل جدید کرد. این مسائل در جدول (۳) ارائه شده‌اند.

1 Change of viewpoint
2 Turning the problem around or reversing
3 Recycling the plot
4 Change of viewpoint
5 Situational

جدول (۳): طرح مسئله جدید با استفاده از شش ایده نوآوری

روش	مسئله جدید
جایگزینی	دو شیر آب، هریک به‌تنهایی به ترتیب در ۴ و ۶ ساعت یک مخزن آب را پر می‌کنند. اگر این دو شیر باهم باز باشند، مخزن در چند ساعت پر از آب می‌شود؟
افزایش	سه شیر آب برای پر کردن یک مخزن استفاده می‌شود. هر یک از شیرها به ترتیب در ۶ و ۱۲ و ۴ دقیقه مخزن را پر از آب می‌کنند. هر سه شیر با هم در چند دقیقه مخزن را پر از آب می‌کنند؟
جرح‌وتعدیل	دو شیر آب، هریک به‌تنهایی به ترتیب در ۶ و ۱۲ دقیقه یک مخزن آب را پر می‌کنند. اگر این دو شیر با هم باز باشند و هم‌زمان با آن‌ها یک شیر تخلیه که می‌تواند در ۳۶ دقیقه مخزن را به‌طور کامل خالی کند، باز باشد. چند دقیقه طول می‌کشد تا مخزن پر از آب شود؟
زمینه‌مدار کردن	برای پر کردن آب یک استخر از دو شیر آب استفاده می‌شود. امید از یکی از مسئولان استخر در خصوص حجم آب خروجی از شیرها سؤال کرد. وی پاسخ داد «از حجم دقیق آب خروجیِ شیرها آگاهی ندارم ولی می‌دانم که شیر اول به‌تنهایی در ۳۰ دقیقه و شیر دوم به‌تنهایی در ۴۰ دقیقه استخر را پر از آب می‌کنند». حساب کنید که اگر هر دو شیر آب با هم باز باشند، استخر در چند دقیقه پر از آب می‌شود؟
معکوس کردن	دو شیر آب، یک مخزن را در ۶ دقیقه پر از آب می‌کنند. سرعت شیر اول دو برابرِ شیر دوم است. شیر دوم به‌تنهایی مخزن را در چند دقیقه پر از آب می‌کند؟
صورت‌بندی مجدد	دو شیر آب، هریک به‌تنهایی به ترتیب در m و n دقیقه یک مخزن آب را پر می‌کنند. اگر این دو شیر باهم باز باشند، مخزن در چند دقیقه پر از آب می‌شود؟

دریکی از معدود مطالعات انجام شده در زمینه طرح مسئله در کشور، غیبی (۱۳۹۱) به بررسی مهارت طرح مسئله دانش‌آموزان سال پنجم ابتدایی در شهر تهران پرداخت. وی با ارائه چند موقعیت طرح مسئله نیمه ساختاریافته، از آن‌ها خواست مسئله طرح کنند. غیبی (۱۳۹۱) مسائل

طرح شده توسط دانش آموزان را از سه جنبه بررسی و کدگذاری کرده است. در مرحله اول مسائل را ازنظر صحت کلام مورد بحث قرار داده است. در مرحله دوم، مسائل را از جنبه درست بودن به دو دسته «درست، غلط» تقسیم کرده و در مرحله سوم مسائل درست را از جهت تطابق با دنیای واقعی مورد بحث و بررسی قرار داده است.

معرفی پژوهش

در پژوهش که به معرفی آن پرداخته می‌شود، ارتباط بین طرح مسئله و توانایی حل مسئله دانش‌آموزان مورد بررسی قرار گرفت.

روش تحقیق

نویسنده دوم مقاله در مدرسه‌ای که در آن مشغول به تدریس بود، دو کلاس از سه کلاس پایه سوم راهنمایی خود را در سال تحصیلی ۱۳۹۲-۱۳۹۱، به عنوان نمونه در دسترس انتخاب کرد. دانش‌آموزان این دو کلاس، ازنظر معدل‌های سال قبلشان، به هم نزدیک بودند و در دو کلاس، دانش‌آموزان قوی، متوسط و ضعیف، به‌طور نسبتاً همگن توزیع شده بودند. با توجه به محدودیت محقق برای انتساب تصادفی آزمودنی‌ها، طرح تحقیق شبه آزمایشی از نوع گروه ناهمسان با پیش‌آزمون و پس‌آزمون مورد استفاده قرار گرفت. در پیش آزمون ۳۳ نفر از گروه آزمایش و ۳۴ نفر از گروه کنترل شرکت داشتند. همچنین، در پس‌آزمون ۳۱ نفر از گروه آزمایش و ۳۲ نفر از گروه کنترل شرکت کردند. با توجه به طرح و هدف تحقیق، جهت تجزیه و تحلیل داده‌ها و بررسی معناداری تفاوت بین میانگین نمرات دانش‌آموزان دو گروه در آزمون‌ها، آزمون تی مستقل مورد استفاده قرار گرفت.

ابزار گردآوری داده‌ها

به‌منظور گردآوری داده‌ها، دو آزمون شامل شش مسئله با ساختار مشابه به‌عنوان پیش‌آزمون و پس‌آزمون تهیه شد. محققین بجای طرح مسائل جدید برای ساخت آزمون‌های حل مسئله، پنج مسئله پیش‌آزمون و شش مسئله پس‌آزمون را از مسائل منتشر شده مطالعات ریاضی تیمز[1]، پایه

1 Trend International Mathematices and Science Study (TIMSS)

هشتم اقتباس کردند. چراکه مطالعات تیمز شامل آزمون‌هایی دقیق و استاندارد، مطابق با برنامه درسی بیش از ۴۰ کشور دنیا ازجمله ایران است. بااین‌وجود، از آنجا که مسائل از یک مجموعه کامل استخراج شده و بعضاً تغییراتِ مختصری در آن‌ها انجام شد، روایی محتوایی آزمون‌ها، توسط سه استاد آموزش ریاضی، دو استاد ریاضی و نیز چهار دبیر ریاضیِ مقطع راهنمایی مورد بررسی و بعد از انجام برخی اصلاحات، مورد تأیید قرار گرفت. پایایی پیش‌آزمون، با روش بازآزمایی بررسی شد. به این صورت که پس از آماده شدن آزمون، در یک کلاس پایه سوم راهنماییِ ۲۶ نفر و با فاصله زمانی دو هفته، دو بار برگزار شد و همبستگی بین نمرات دانش‌آموزان این کلاس در دو آزمون مورد آزمون قرار گرفت و ضریب پایایی ۰/۶۹ به دست آمد که مقدار قابل قبولی را نشان می‌دهد. از آنجایی که تمام مسائل آزمون حل مسئله در پس‌آزمون از مسائل منتشر شده آزمون تیمز ۲۰۱۱ در پایه هشتم انتخاب شده بود، پایایی آن مورد بررسی قرار نگرفت.

روند اجرای طرح

پس از برگزاری پیش‌آزمون در اواخر آبان ماه، در گروه کنترل به شیوه متداول تدریس شد؛ اما در گروه آزمایش در کنار فعالیت‌های متداول، فعالیت‌های طرح مسئله نیز مورد استفاده قرار گرفت. موقعیت‌های طرح مسئله‌ای که به دانش‌آموزان ارائه می‌شد، متفاوت بود. به این صورت که اگر مبحث تدریس شده در یک جلسه شرایط لازم را برای طرح مسئله داشت، معلم (نویسنده دوم مقاله) از دانش‌آموزان می‌خواست مسئله‌ای در ارتباط با همان مبحث طرح کنند. در غیر این صورت، یک موقعیت طرح مسئله‌ی از پیش طراحی شده به آن‌ها ارائه می‌شد. این جلسات در مجموع، ۲۶ جلسه ادامه داشت که دو جلسه اول به زمینه‌سازی در مورد لزوم وجود فعالیت‌های حل مسئله و طرح مسئله پرداخته شد. لازم به ذکر است به دلیل کمبود وقت، اکثر فعالیت‌های طرح مسئله به‌صورت تکالیف منزل به دانش‌آموزان عرضه می‌شد و تقریباً همه مسائل طرح شده توسط آن‌ها خارج از ساعات مدرسه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گرفت.

طی این جلسات، ۱۵ موقعیت طرح مسئله به دانش‌آموزان ارائه و از آن‌ها خواسته شد برای آن مسئله طرح کنند. ده موقعیت، از نوع نیمه ساختاریافته شامل محاسبه، معادله، شکل، نمودار و

جدول بود. چهار موقعیت ساختاریافته و یک موقعیت آزاد هم به آن‌ها عرضه شد. سه جلسه از کل جلسات این دوره، هرکدام حدود ۱۵ دقیقه، به آموزش استراتژی طرح مسئله «اگر نباشد، چه می‌شود؟» و شش روش نوآورانه ویسترو- یو (۲۰۰۹)، در موقعیت‌های ساختاریافته و نیمه ساختاریافته اختصاص یافت.

یافته‌های پژوهش

برای آگاهی از تأثیر دوره آموزشی شامل انجام تکالیف طرح مسئله بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان گروه آزمایش، ابتدا توانایی حل مسئله دو گروه در پیش‌آزمون به‌وسیله آزمون t مستقل با فرضیه زیر مورد بررسی قرار گرفت.

H_0: بین نمره حل مسئله گروه آزمایش و گروه کنترل در پیش‌آزمون تفاوت وجود ندارد.

H_1: بین نمره حل مسئله گروه آزمایش و گروه کنترل در پیش‌آزمون تفاوت وجود دارد.

نتایج این آزمون، در جدول (۴) ارائه شده است.

جدول (۴): آزمون t برای مقایسه میانگین نمرات حل مسئله دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون

	آزمون لوین برای تساوی واریانس‌ها		آزمون t برای تساوی میانگین‌ها						
								فاصله اطمینان ۹۵ درصد تفاوت	
	F	معنی‌داری	t	درجه آزادی	معنی‌داری (۲- دامنه)	تفاوت میانگین‌ها	تفاوت خطا	پایینی	بالایی
فرض تساوی واریانس‌ها نمرات حل مسئله در پیش‌آزمون	۰/۴۵۹	۰/۵۰۱	-۰/۱۳۶	۶۵	۰/۸۹۲	-۰/۰۸	۰/۵۹۱	-۱/۲۶۱	۱/۱۰۰
فرض عدم‌تساوی واریانس‌ها			-۰/۱۳۵	۶۳/۱۰	۰/۸۹۳	-۰/۰۸	۰/۵۹۲	-۱/۲۶۴	۱/۱۰۴

با توجه به جدول (۴) مشخص می‌شود که مقدار معنی‌داری آزمون لوین از فرض خطای $\alpha = ۰/۰۵$ بیشتر است، لذا فرض برابری واریانس‌ها پذیرفته می‌شود؛ بنابراین، سطر اول آزمون t ملاک بررسی‌های بعدی قرار می‌گیرد. نتایج آزمون t مستقل نشان می‌دهد که سطح معنی‌داری آن (۰/۸۹۲) از فرض خطای ۰/۰۵ بیشتر است. ازاین‌رو، فرض صفر تأیید می‌شود. درواقع، بین توانایی حل مسئله گروه آزمایش و کنترل، در پیش‌آزمون، تفاوت معنی‌داری وجود نداشته است؛ بنابراین، فرض یکسان بودن دو گروه پیش از شروع پژوهش پذیرفته شد. لذا، امکان استفاده از آزمون t مستقل برای مقایسه عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان دو گروه در پس‌آزمون نیز فراهم بود. آزمون t مستقل برای پس‌آزمون با فرضیه زیر به کار رفت.

H_0: بین نمره حل مسئله گروه آزمایش و کنترل در پس‌آزمون تفاوت وجود ندارد.

$H_۱$: بین نمره حل مسئله گروه آزمایش و کنترل در پس‌آزمون تفاوت وجود دارد.

نتایج این آزمون در جدول (۵) ارائه شده است.

جدول (۵): آزمون t برای مقایسه میانگین نمرات حل مسئله دو گروه آزمایش و کنترل در پس‌آزمون

	آزمون لوین برای تساوی واریانس‌ها		آزمون t برای تساوی میانگین‌ها						
								فاصله اطمینان ۹۵ درصد تفاوت	
	F	معنی‌داری	t	درجه آزادی	معنی‌داری (۲-دامنه)	تفاوت میانگین‌ها	تفاوت خطا	پایینی	بالایی
فرض تساوی واریانس‌ها نمرات حل مسئله در پس‌آزمون	۱۱/۷۴۱	۰/۰۰۱	۶/۱۶۴	۶۱	۰/۰۰۰	۴/۰۰۶	۰/۶۵۰	۲/۷۰۶	۵/۳۰۶
فرض عدم‌تساوی واریانس‌ها			۶/۱۲۴	۵۱/۵۶	۰/۰۰۰	۴/۰۰۶	۰/۶۵۴	۲/۶۹۳	۵/۳۱۹

بنابر آنچه در جدول (۵) ملاحظه می‌شود، با توجه به اینکه مقدار معنی‌داری آزمون لوین از فرض خطای $\alpha = ۰/۰۵$ کمتر است، فرض برابری واریانس‌ها رد می‌شود؛ بنابراین، سطر دوم آزمون t ملاک بررسی‌های بعدی قرار می‌گیرد. نتایج آزمون t مستقل نشان می‌دهد که سطح معنی‌داری آن (۰/۰۰۰) از فرض خطای ۰/۰۵ کمتر است؛ بنابراین، فرض صفر رد می‌شود؛ یعنی بین مهارت حل مسئله گروه آزمایش و گواه، در پس‌آزمون، تفاوت معنی‌داری وجود دارد. درواقع، اجرای دوره آموزش ریاضی شامل فعالیت‌های طرح مسئله بر پرورش توانایی حل مسئله دانش‌آموزان گروه آزمایش تأثیر مثبت داشته است.

پاسخ به سؤال پژوهش

آیا پرورش مهارت طرح مسئله ریاضی بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان تأثیر دارد؟

یافته‌های تحقیق حاکی از عملکرد مشابه دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون بود. درواقع تفاوت معناداری بین توانایی حل مسئله دو گروه مشاهده نشد؛ اما پس از اجرای دوره آموزشی شامل معرفی و انجام فعالیت‌های طرح مسئله در کلاس درس، میانگین نمرات گروه آزمایش در پس‌آزمون (۶/۱۹) بیش از میانگین نمرات گروه کنترل در پس‌آزمون (۲/۱۹) بود. نتایج حاصل از آزمون t مستقل، بر معنادار بودن این تفاوت صحه می‌گذارد. بدین معنی که اجرای فعالیت‌های طرح مسئله، در کنار فعالیت‌های معمول در گروه آزمایش باعث ارتقای توانایی حل مسئله دانش‌آموزان این گروه شده است.

بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به بخش اول این مقاله، که به بررسی و تحلیل چند چارچوب و دسته‌بندی مرتبط با فرآیند طرح مسئله اختصاص داشت، به‌نظر می‌رسد فرایند طرح مسئله به‌مرور، توجه بیشتری از محققان آموزش ریاضی را به خود جلب کرده است. نتایج بررسی مطالعات صورت گرفته حاکی از وجود ارتباط نزدیک بین مهارت طرح مسئله و توانایی حل مسئله می‌باشد. از طرح مسئله می‌توان به عنوان ابزاری برای آموزش معنادار ریاضی و نیز جهت به‌دست آوردن آگاهی نسبت به آنچه در ذهن دانش‌آموزان می‌گذرد استفاده کرد. هدف بخش دوم پژوهش که با استفاده از یک طرح شبه آزمایشی انجام شد، بررسی تأثیر پرورش مهارت طرح مسئله بر توانایی حل

مسئله ریاضی دانش‌آموزان سوم راهنمایی بود. نتایج تجزیه و تحلیل داده‌ها در این بخش نشان داد که استفاده از فعالیت‌های طرح مسئله در کلاس درس و درواقع پرورش مهارت طرح مسئله در دانش‌آموزان، می‌تواند توانایی حل مسئله آن‌ها را افزایش دهد.

موضوع حل مسئله در آموزش ریاضی یکی از مباحث اساسی به شمار می‌آید و در حال حاضر در کتب ریاضی مدرسه‌ای، بر وجود آن تأکید شده است. با توجه به نقش و جایگاه معلم در اجرای رویکردهای نوین آموزشی در کلاس‌های ریاضی، آشنایی آن‌ها با طرح مسئله و حل مسئله ضروری است. در این راستا، انجام تحقیقات در حوزه طرح مسئله و به‌طور خاص آموزش معلمان ریاضی یک اولویت پژوهشی است. در این مقاله، با معرفی فرایند طرح مسئله و ارتباط آن با حل مسئله ریاضی، سعی شده زمینه‌ای برای آشنایی علاقه‌مندان به حل مسئله و طرح مسئله به وجود آید. ازجمله این موضوعات، می‌توان به ارزیابی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان و بررسی برنامه درسی و کتاب‌های درسی ریاضی ازنظر به‌کارگیری ایده طرح مسئله، اشاره نمود.

منابع

پولیا، جورج (۱۳۸۵). *چگونه مسئله را حل کنیم*. ترجمه احمد آرام. (چاپ هفتم). تهران: کیهان (نشر اثر اصلی، ۱۹۴۵).

غیبی، تاییس (۱۳۹۱). *بررسی فرایند طرح مسئله ریاضی دانش آموزان ابتدایی*. پایان‌نامه منتشرنشده کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی دانشکده علوم پایه.

مکینتاش، رابرت؛ جرت، دنیس (۲۰۰۰). *آموزش حل مسئله ریاضی: تحقق یک چشم‌انداز، مروری بر ادبیات تحقیق*. ترجمه زهرا گیلک و زهرا گویا. رشد آموزش ریاضی؛ شماره ۸۶، ص ۴-۲۱.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. London, Lawrence Erlbaum Associates, Ink.

Cai, J. (1998). *An investigation of U.S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving*. Mathematics Education Research Journal, 10(1), 37-50.

Cai, J. Hwang, S. (2002). *Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving*. Journal of Mathematical Behavior, 21(4), 401-421.

Christou, C. Mousoulides, N. Pittalis, M. Pitta-Pantazi, D. & Sriraman, B. (2005). *An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education), 37(3), 1-10.

Cildir, s & sezen, n (2011). *A study on the evaluation of problem posing skills in terms of academic success*. Procedia Social and Behavioral Sciences 15, 2494ï 2499.

Contreras, José (2007). *Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework With Prospective Mathematics Teachers*. The Mathematics Educator, 17(2), 15ï23.

English, L. D. (1997). *The development of fifth-grade children's problem posing abilities*. Educational Studies in Mathematics, 34(3), 183-217.

Kilpatrick, J. (1987). *Problem formulating: Where do good problems come from?* In: A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kontorovich, I. Koichu, B. Leikin, R. & Berman, A. (2012): *An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups*. Journal of Mathematical Behavior 31(1), 149ï 161.

Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem Posing via "What if not?" strategy in Solid Geometry - A Case Study. The Journal of Mathematical Behavior, 22(4), 369-387.

Lowrie, T. (1999). *Free problem posing: Year 3,4 students constructing problems for friends to solve*. J. Truran & K.Truran (Eds.), Making a difference. Panorama (pp. 328-335). South Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Silver, E. A. (1994). *On mathematical problem posing*. For the Learning of Mathematics, 14(1), 19ï28.

Song, S. H. Yim, J. H. Shin,E. J & Lee,H. H. (2007). *Posing problems with use the 'what if not?'*. In Woo, J. H. Lew, H. C. Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 193-200). Seoul: PME.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). *A framework for research into problem posing*. P. Clarkson (Ed.), Technology in Mathematics Education, (pp.518ï525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Vistro-Yu, C. (2009). *Using Innovation Techniques to Generate New Problems*. In: In B. Kaur, Y. B. Har, M. Kapur (Eds.), MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING (pp.185-207). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Yuan, X. & Sriraman, B. (2011). *An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical—Comparing Chinese and U.S students*. In B.Sriraman, K. Lee (Eds.),The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics (pp. 5-28). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.