فصلنامه اقتصاد و تجارت نوین، شماره‌های ۳۱ و ۳۲، زمستان ۱۳۹۱ و بهار ۱۳۹۲، صفحات ۱۲۳- ۱۴۳

برآورد الگو و پیش‌بینی انتشار تلفن همراه در ایران

محسن نظری *
دانشیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران
منا ولی نتاج بهنمیری **
دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت MBA دانشگاه تهران
تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۲/۲۱

چکیده
تلفن همراه در سال ۱۳۷۳- ۱۳۷۴ برای اولین بار به ایران وارد شده، امروزه یکی از اصلی‌ترین ابزار ارتباطات در کشور به شمار می‌روند. هدف اصلی این مقاله تخمین و ارزیابی روند آینده و تحلیل الگو و نرخ پذیرفتن تلفن همراه در ایران است. در این مقاله از مدل پیشرفت منحنی S شکل برای نشان دادن منحنی انتشار تلفن همراه در ایران استفاده شده است. برای نشان دادن منحنی انتشار تلفن همراه از دو مدل لاجیستیک و گمپرتز استفاده شده و به مقایسهٔ این دو مدل پرداخته است، سپس مدل بهینه استخراج می‌شود. نتایج نشان می‌دهد ضریب نفوذ تلفن همراه در ایران از ۴۷/۹۳ درصد در سال ۱۳۸۸-۱۳۸۹ به ۸۰/۷۱ درصد در سال ۱۳۹۲- ۱۳۹۳ و ۱۱۷/۴۸ درصد در سال ۱۴۰۰- ۱۴۰۱ افزایش خواهد یافت.

واژه‌های کلیدی: الگوی انتشار تلفن همراه، اثرهای خارجی شبکه، ضریب نفوذ تلفن همراه، منحنی S شکل.

طبقه‌بندی JEL: O53, L96.

---

* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: Mohsen.nazari@ut.ac.ir
** پست الکترونیکی: Mona.valinataj@gmail.com

۱. مقدمه

چگونگی انتشار نوآوریها در جامعه همواره مورد توجه اقتصاددانان قرار گرفته است. هر پدیده‌ای اعم از یک فناوری جدید، کالای مصرفی جدید و یا اختراع تازه در ابتدای ظهور خود برای بشر، نو و جدید است، که در نهایت، همه آنها منجر به افزایش رشد اقتصادی شده و به تبع آن بر رفاه و آسایش مردم اثر مثبت می‌گذارند.

صنعت تلفن همراه در ایران از زمان ورود تلفنهای همراه به کشور رشد شگفت انگیزی داشته است. تعداد مشترکان تلفن همراه از مقدار ناچیز ۰/۳۹ میلیون مشترک در سال ۱۳۷۷-۱۳۷۸ به ۳۱ میلیون مشترک در سال ۱۳۸۷- ۱۳۸۸رسیده است. قوانین و مقررات حاکم بر بازار چه از نظر تعداد رقابت کنندگان و چه از نظر وسعت و گسترهٔ خدمات ارائه شده توسط آنها، نقش بسزایی در تحریک تقاضا داشته است.[۱]

مدیریت کارامد خدمات تلفن همراه نیازمند درک درستی از عوامل مؤثر در تکامل بازار است. عواملی نظیر پتانسیل (توانایی) بازار برای پذیرش خدمات جدید، زمان و سرعت پذیرش اهمیت بسیار زیادی برای اپراتورهای مخابراتی به هنگام برنامه‌ریزی ظرفیت دارد. درک و شناخت تکامل بازار تلفن همراه و روندهای احتمالی آن در آینده به همان اندازه برای سیاستگذاران از اهمیت بسیاری برخوردار است. انتشار تلفن همراه در کشورهای توسعه یافته در سطح وسیعی مطالعه و بررسی شده، در حالی که تعداد محدودی از این قبیل مطالعات در خصوص کشورهای در حال توسعه مانند ایران انجام شده است (کومار،[۲] ۲۰۰۸).

گریلیچز[۳] (۱۹۵۷) و مانسفیلد[۴](۱۹۶۱) برای اولین بار به این نتیجه رسیدند که اگر فراوانی تجمعی پذیرنده‌های (یعنی دارندگان بالفعل را در هر زمان) یک فناوری را بر حسب زمان ترسیم کنیم، معمولاً منحنی S شکل پدیدار می‌شود. با دقت در این منحنی می‌توان به دو نکته پی برد: اول، پذیرش فناوری جدید زمان بر است، دوم، در مراحل اولیه، پذیرش به کندی، سپس سریع و بعد از آن با نزدیک شدن به نقطه اشباع دوباره کند می‌شود. در واقع، منحنی Sشکل فرآیند تغییرات ضریب نفوذ را طی زمان نشان می‌دهد که از صفر شروع و به صددرصد منتهی می‌شود. ضریب نفوذ به صورت نسبت پذیرنده‌ها به کل جمعیت جامعه تعریف می‌شود. توجیه عمده در زمینه دلیل S شکل بودن انتشار نوآوریها در جامعه که در این مقاله مدنظر است، به نحوهٔ انتشار اطلاعات مربوط است. فناوری جدید دارای مشخصه‌های فنی است، که آن را از فناوریهای قبلی

---

[1] www.tci.ir
[2] Kumar
[3] Griliches
[4] Mansfield

متفاوت می‌کند و این تفاوتها می‌توانند از طریق تبلیغات و استفاده‌کنندگان قبلی، به اطلاع استفاده‌کنندگان بالقوه برسند. به هر میزانی که جریان انتقال این اطلاعات کند باشد، تکامل منحنی S در زمان طولانی پدیدار می‌شود و به عبارتی ضریب نفوذ به کندی افزایش می‌یابد (عبدلی و قهرمانی، ۱۳۸۷: ۲).

مسئله قابل ذکر دیگر در مورد این منحنی، فرض ناهمگن بودن پذیرنده‌های فناوری جدید است. به بیان دیگر، افراد مختلف نسبت به فناوریهای جدید ارزشهای متفاوتی قایل هستند. همچنین در این توجیه، این گونه فرض می‌شود که توزیع ارزشگذاری افراد به فناوریهای جدید، از توزیع نرمال پیروی می‌کند و هزینهٔ پذیرش فناوری در طول زمان ثابت یا نزولی است. فناوری جدید در صورتی از طرف افراد پذیرفته می‌شود که منافع پذیرش آن از هزینه‌های آن بیشتر باشد. با این رویکرد پذیرش فناوری جدید از روی افراد جامعه امری تدریجی خواهد بود (داویس، ۱۹۷۹؛ ایرلند و استون‌من، ۱۹۸۶).[1]

استون من (۲۰۰۰) توجیه دیگری دربارهٔ منحنی S شکل دارد. او معتقد است که در شرایط نبود اطمینان همواره مزایای ناشی از پذیرش فناوری جدید در آینده روی می‌دهد. عواملی که در پذیرش فناوری جدید اثرگذار است، به درجه ریسک (خطر) پذیری افراد مربوط است. در ابتدا افرادی که خطر پذیرتر هستند و در نهایت افرادی که خطر گریزتر هستند، پذیرای فناوری جدید می‌شوند. به همین دلیل به مرور زمان فرآیند انتشار فناوری جدید در یک جامعه شکل S به خود می‌گیرد (عبدلی و ورهرامی، ۱۳۸۷: ۸۱).

در ادامه این توضیحات، ادامه مقاله به این شرح سازماندهی شده است. ابتدا مبانی نظری و پیشینهٔ تحقیق با معرفی کالاهای شبکه‌ای و پس از آن تقاضای تلفن همراه در ایران طی سالهای ۱۳۷۶ تا ۱۳۹۰ مرور می‌شود. بخش چهارم به مدل انتشار تلفن همراه در کشور اختصاص دارد. تحلیل و برآورد مدل بخش پنجم مقاله را شکل می‌دهد و بخش ششم و هفتم به ترتیب به نتایج و توصیه‌های سیاستی می‌پردازند.

۲. مبانی نظری و پیشینه

خطوط تلفن ثابت یکی از فناوریهای ارتباطی مهم است که امروزه با ظهور اینترنت، نمابر و سایر وسایل ارتباطی مکمل، اهمیت زیادی در زندگی بشر پیدا کرده‌اند، ولی از طرفی با ظهور تلفن همراه و تلفن بی‌سیم از اهمیت آن کاسته شده است. در مطالعه ضریب نفوذ هر پدیده از جمله کالاهای شبکه‌ای مثل تلفن همراه با جاذبهٔ استفاده از مدلهای انتشار فناوری جدید روبه‌رو

---

[1] Davies and Stoneman

هستیم که در این مدلها عوامل و چگونگی تکامل ضریب نفوذ بررسی می‌شود.

نفوذ کالاهای شبکه‌ای جدید مثل تلفن، اینترنت، تلفن همراه، نمابر و ایمیل مورد مطالعه اقتصاددانان[۱] بوده است[۲] (عراقی و عبدلی، ۱۳۸۷).

مطالعهٔ نفوذ تلفن همراه در ایران به عنوان یک فناوری ارتباطی دارای اثرهای شبکه‌ای، موضوع مقالهٔ حاضر است. در این مقاله، با استفاده از دو مدل اپیدمی که به مدل لاجستیک[۳] و گمپرتز[۴] معروف هستند، منحنی S برآورد می‌شود. جدول ۱ مطالعات قبلی انجام شده در زمینهٔ انتشار تلفن همراه در کشورهای در حال توسعه را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مطالعات انجام شده در زمینه انتشار تلفن همراه در کشورهای در حال توسعه

نویسندگان	نوع مدل	متغیرهای وابسته	کشورهای مورد مطالعه	بازهٔ زمانی
برکی و اسلام[۵] (۲۰۰۰)	مدل لاجیستیک	تعداد کل کاربران تلفن همراه	۲۵ کشور منتخب تصادفی آسیا	۱۹۸۶-۱۹۹۸
گروبر (۲۰۰۱)	مدل لاجیستیک و گمپرتز	تعداد کل کاربران تلفن همراه	کشورهای آسیای شرقی و مرکزی	تا سال ۱۹۹۸
کافمن و تچاتاسانا-سونترن[۸] (۲۰۰۵)	مدل پانل دیتا با اثرهای ثابت،[۶] مدل اتو رگرسیون برداری[۷] برداری[۷]	ضریب نفوذ تلفن همراه	۴۳ نمونه از کشورهای توسعه یافته و در حال توسعه	تا سال ۲۰۰۴
رووینن[۹] (۲۰۰۶)	مدل گمپرتز	اختلاف لگاریتمی کاربران تلفن همراه	۹۰ نمونه از کشورهای در حال توسعه و ۷۵ نمونه از کشورهای توسعه یافته	۱۹۹۳-۲۰۰۰

[1] Gruber (2001), Gruber and Verbooven (2001), Karshenas and Stoneman (1993), Rogiers (1994), Geroski (2000), Scitivski and Meler (2002) and Show- Ling et al. (2005).

[۲] منظور از کالاهای شبکه‌ای، کالاهایی‌اند که مطلوبیت هر دارنده آن، با افزایش تعداد دارندگان آن در جامعه افزایش پیدا می‌کند، یعنی از یک طرف او می‌تواند با افراد بیشتر و از طرفی افراد بیشتری می‌توانند با او ارتباط داشته باشند.

[3] Logistic Model

[4] Gompertz Model

[5] Burki and Aslam (2000)

[6] Fixed Effect Panel Data Model

[7] Vector Auto-Regression Model

[8] Kauffman and Techatassana-Soontorn (2005)

[9] Rouvinen (2006)

این مقاله به منظور اطلاع رسانی به مطالعات بیشتری از مدیریت خدمات مخابراتی و همچنین کمک به ارزیابی تحلیل‌گران نگران تأثیر سیاستهای عمومی در تکامل بخش مخابرات، انتشار تلفن همراه در ایران را مطالعه و بررسی می‌کند.

همان‌طور که از جدول ۱ برمی‌آید، افراد متعددی پژوهشهایی در زمینهٔ انتشار تلفن همراه در کشورهای در حال توسعه انجام داده‌اند. از آن جمله می‌توان به مطالعات برکی و اسلام (۲۰۰۰) اشاره کرد که در مقالهٔ خود از مدل لاجیستیک برای نشان دادن مدل انتشار استفاده کردند. متغیر وابسته در این مطالعه تعداد کل کاربران تلفن همراه و متغیرهای مستقل جمعیت، فناوری، رقابت و تولید ناخالص داخلی[1] بوده است که مطالعات خود را در ۲۵ کشور آسیایی که به طور تصادفی انتخاب شده بودند، انجام دادند. در این مطالعه ظرفیت بازار،[2] ۴۱ درصد به دست آمده است و انتقال زودهنگام به دیجیتال، افزایش ظرفیت و ورود به بازار رقابتی، سرعت انتشار تلفن همراه را افزایش می‌دهد.

در مطالعه‌ای مشابه که در کشورهای اروپای مرکزی و شرقی صورت گرفته، گروبر (۲۰۰۱) از دو مدل لاجیستیک و گمپرتز برای تخمین منحنی S بهره گرفته است. همانند مطالعهٔ قبلی متغیر وابسته تعداد کل کاربران تلفن همراه اما متغیرهای مستقل جمعیت، اثر فناورانه،[3] تولید ناخالص داخلی، تعداد خطوط ارتباطی ثابت، فهرست انتظار برای خط ثابت، سطح شهرنشینی، شدت رقابت، شاخص بازار آزاد و تعداد بنگاهها بوده است. نتایج این پژوهش ظرفیت بازار را ۲۰ درصد گزارش می‌کند و پذیرش نهایی،[4] افزایش تعداد شرکتها، ورود همزمان به بازار و اندازهٔ شبکهٔ مخابراتی تلفن ثابت باعث سرعت بخشیدن به انتشار تلفن همراه می‌شود.

کافمن و تچاتاسانا ـ سونترن (۲۰۰۵) در مطالعهٔ خود که بر روی ۴۳ کشور توسعه یافته و در حال توسعه انجام شده است، از مدل داده‌های تابلویی با اثرهای ثابت و مدل خودرگرسیون برداری استفاده کرده‌اند. متغیر وابسته در این پژوهش ضریب نفوذ تلفن همراه بوده است و متغیرهای مستقل نیز عبارتند از ثروت، زیرساخت مخابراتی، رقابت و هزینهٔ دسترس. نتایج مطالعات ایشان بیانگر این مسئله است که زیرساختهای مخابراتی، رقابت و هزینه‌های دسترس به شبکه را کمتر و سرعت انتشار را افزایش می‌دهد و همچنین تبلیغات منطقه‌ای تا حدودی روی انتشار تلفن همراه مؤثر است.

---

[1] Gross Domestic Product (GDP)
[2] Market Capacity
[3] Technological Effect
[4] Late Adoption

رووینن (۲۰۰۶) در مطالعهٔ خود از مدل گمپرتز بهره گرفته و انتشار تلفن همراه را در ۹۰ کشور در حال توسعه و ۷۵ کشور توسعه یافته بررسی کرده است. متغیر وابسته در این مطالعه اختلاف لگاریتمی کاربران تلفن همراه است و متغیرهای مستقل عبارتند از جمعیت کشور و جمعیت بزرگترین شهر کشور، تولید ناخالص داخلی، ارزش افزوده در کشاورزی، نرخ بی‌سوادی، منابع مالی در اختیار بخش خصوصی، مجموع صادرات و واردات، آزادی سیاسی، تعداد تلفنهای ثابت، هزینهٔ ماهانه تلفن ثابت و تلفن همراه، تعداد تلفنهای همراه آنالوگ و دیجیتال، استانداردهای شبکه، رقابت و سطح قیمت سرمایه‌گذاری. نتایج مطالعات رووینن نشان می‌دهد که سرعت انتشار در کشورهای در حال توسعه و توسعه یافته یکسان است و رقابت بازار، ظرفیت بالای کاربران، اثرهای شبکه‌ای، آزاد بودن، سطح فناوری و نوآوریها باعث افزایش سرعت انتشار می‌شود و نیز رقابت در استانداردهای شبکه باعث کندی روند انتشار می‌شود.

۳. تقاضای تلفن همراه در ایران

استقبال بیش از حد تصور مردم از تلفن همراه طی سالیان اخیر در کنار قابلیتها و کارایی این وسیلهٔ ارتباطی و روند رشد و توسعهٔ آن در جهان، لزوم یک رویکرد نوین در جریان توسعهٔ شبکه را ایجاب می‌کند. نمودار ۱ اطلاعاتی از تاریخچهٔ تقاضای تلفن همراه در ایران را نشان می‌دهد. تلفنهای همراه که در ۱۳۷۳- ۱۳۷۴ برای اولین بار وارد کشور شده‌اند، یکی از مهمترین ابزار ارتباطات در ایران محسوب می‌شوند. در پایان سال ۱۳۸۷- ۱۳۸۸، ۳۱ میلیون مشترک تلفن همراه در مقایسه با ۲۴ میلیون مشترک تلفن ثابت در ایران وجود داشت. افزایش ۹ برابری در تعداد مشترکان تلفن همراه تنها در طول ۵ سال از سال ۱۳۸۲-۱۳۸۳ تا سال ۱۳۸۷- ۱۳۸۸ وجود داشته است. همچنین ضریب نفوذ تلفن همراه در کشور بیشتر از ۸ برابر رشد پیدا کرده و از ۵/۱۹ در۱۳۸۲-۱۳۸۳ به ۲/۴۳ در ۱۳۸۷- ۱۳۸۸ رسیده است.

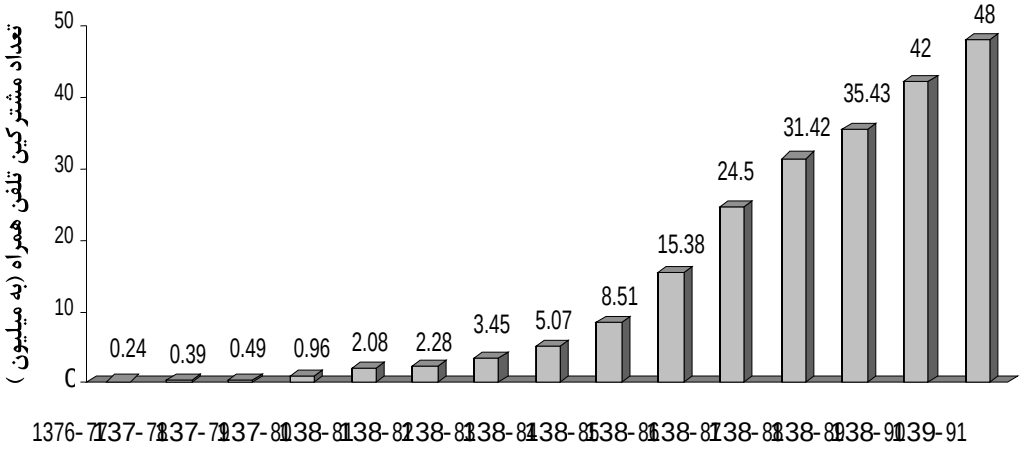
بازار تلفن همراه ایران از نظر رقابتی به ۳ بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول که تا سال ۱۳۸۲ ادامه یافته است، بازار دارای انحصار کامل بوده که با ورود تالیا به عنوان پیمانکار شرکت مخابرات برای واگذاری سیم کارت اعتباری این دوره به پایان رسیده است. بخش دوم از سال ۱۳۸۴شروع می‌شود که ایرانسل به عنوان اپراتور دوم تلفن همراه آغاز به کار کرد و رقابت در بازار تلفن همراه شکل گرفت. بخش سوم نیز از ابتدای سال ۱۳۸۹ و با خصوصی سازی شرکت مخابرات ایران و ورود اپراتور سوم، فعالیت اپراتورهای وایمکس[1] شروع شد که در این بخش شرایط رقابت در بازار کامل خواهد شد، که تا سال ۱۳۹۰ اپراتور دولتی همراه اول با ۷۵ درصد

---

[1] Wimax

سهم بازار و ایرانسل با ۲۱ درصد سهم بازار و تالیا با ۴/۵ درصد سهم بازار مشغول فعالیت هستند و در کنار این ۳ اپراتور، اسپادان (استان اصفهان) و کیش همراه (جزیره کیش) نیز خدمات تلفن همراه به مردم ارائه می‌دهند. البته به استناد پیش‌بینی عملکرد ۵ سال آتی شرکت مخابرات ایران انتظار می‌رود در آینده سهم بازار شرکت مخابرات ایران در زمینه خدمات تلفن همراه کاهش یابد چرا که نرخ رشد مشترکان ایرانسل بیشتر از نرخ رشد شرکت مخابرات ایران است. شایان ذکر است که رقابت بین اپراتورها منجر به افزایش در تعرفه‌ها شده است.

نمودار ۱. افزایش در تعداد مشترکان تلفن همراه در ایران



۴. مدل انتشار

هر نوآوری در زمان معرفی خود به جامعه، جدید است و بتدریج در جامعه اشاعه پیدا می کند و در نهایت در کل جامعه انتشار می‌یابد. روند انتشار فناوری جدید در جامعه، از زمان معرفی تا نفوذ و اشاعهٔ کامل، شکل S دارد یعنی اگر کل پذیرنده‌های آن فناوری (دارندگان بالفعل در هر زمان) را در محور عمودی و زمان را در محور افقی نشان دهیم و از زمان معرفی فناوری جدید تا نفوذ کامل آن را در این منحنی رسم کنیم، منحنی S شکل پدید می‌آید. استفاده از یک مدل انتشارS شکل اولین قدم در جهت تجزیه انتشار تلفن همراه است.

در ادامه این توضیحات، فرض می‌شود که افزایش تراکم تلفن همراه در طول زمان در ایران از یک منحنی S شکل پیروی کند. برای یکسری زمانی مانند تراکم تلفن همراه، این مسئله امکان‌پذیر است که سری زمانی با گذشت زمان به یک مقدار حداکثر مشخص همگرا می‌شود. تعداد بسیار زیادی مدل تابعی متفاوت وجود دارد که با کمک آنها می‌توان منحنی S شکل را

توصیف کرد. برای مثال تابع لاجیستیک،[۱] تابع گمپرتز،[۲] تابع لگاریتمی لاجیستیک،[۳] تابع لگاریتمی معکوس،[۴] تابع نمایی ساده اصلاح شده[۵] و توابع تجمعی نرمال.[۶] از میان این توابع، توابع لاجیستیک و گمپرتز از پرکاربردترین توابع محسوب می‌شوند (کومار،[۷] ۲۰۰۸). به این دلیل تصمیم بر آن شد که از این دو تابع برای مدل کردن و پیش بینی پیشرفت تراکم تلفن همراه در ایران استفاده شود. مدل لاجیستیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Md_t = \frac{\alpha}{1+\gamma e^{-\beta(time)_t}} + \varepsilon_t \qquad (۱)$$

Md_t ضریب نفوذ تلفن همراه (بیانگر تعداد دارندگان تلفن همراه به ازای هر ۱۰۰ نفر) در بازهٔ زمانی t، $(time)_t$ مقداری است که به زمان در بازهٔ زمانی t اختصاص داده می‌شود، α سطح اشباع و ε_t عبارت خطا در بازهٔ زمانی t است. پارامترهای γ و β به ترتیب عرض از مبدأ و شیب منحنی را مشخص می‌کنند. تمام متغیرهای α ، β و γ مقادیر مثبت اختیار می‌کنند. هنگامی که زمان بین ∞- و ∞+ تغییر می‌کند تابع لاجیستیک بین دو مقدار صفر (به صورت خط مجانب صفر) و α متغیر است. هنگامی که $Md_t = \frac{\alpha}{2}$ می‌شود، منحنی لاجیستیک به نرخ رشد حداکثر خود $\frac{\alpha\beta}{4}$ می‌رسد که این حالت در نیمه سطح اشباع تراکم تلفن همراه رخ می‌دهد. بنابراین، منحنی لاجیستیک در نقطهٔ عطف خود (نقطه‌ای که حداکثر نرخ انتشار به وقوع می‌پیوندد) به صورت چرخشی متقارن است که نحوهٔ محاسبهٔ مقادیر در پیوست به اختصار آورده شده است. به طور مشابه مدل گمپرتز به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$Md_t = \alpha e^{-\gamma e^{-\beta(time)_t}} + \eta_t \qquad (۲)$$

که در آن تمامی پارامترها و متغیرها همان مفهومی را که در معادلهٔ ۱ داشتند، دارا هستند و η_t عبارت خطا در بازهٔ زمانی t است. همانند مدل لاجیستیک تمامی پارامترهای α، β و γ مقادیر مثبت را اختیار می‌کنند. مشابه تابع لاجیستیک، با تغییر و نوسان زمان از ∞- تا∞+ تابع گمپرتز نیز از کمترین مقدار خود (به صورت خط مجانب صفر) تا بیشترین مقدار خود α تغییر

---

[1] Logistic Function
[2] Gompertz Function
[3] Logarithmic Logistic Function
[4] Log Reciprocal Function
[5] Simple Modified Exponential Function
[6] Cumulative Normal Function
[7] S.Kumar Singh

می‌کند. در این حالت، نرخ رشد زمانی به بیشترین مقدار خود یعنی $\frac{\alpha\beta}{e}$ دست می‌یابد که $Md_t = \frac{\alpha}{e}$ باشد و این در حالتی است که تراکم تلفن همراه تقریباً به ۳۷ درصد از سطح اشباع خود می‌رسد، که نحوهٔ محاسبهٔ مقادیر در پیوست به اختصار آورده شده است. هر دو مدل را می‌توان به آسانی توسط روش کمترین مربعات غیرخطی تخمین زد.

سطح اشباع ضریب نفوذ تلفن همراه برای یک کشور احتمالاً به این بستگی دارد که آن کشور پذیرندهٔ اولیه (کشور توسعه یافته) یا پذیرندهٔ اخیر (کشور در حال توسعه) تلفن همراه باشد. تحلیل سهم تلفن همراه در کشورهای در حال توسعه و کشورهای توسعه یافته نشان می‌دهد که سطح اشباع سهم تلفن همراه در کشورهای توسعه یافته می‌تواند هر مقداری بین ۵۰ درصد و ۷۰ درصد را اختیار کند، در حالی که سطح اشباع سهم تلفن همراه در کشورهای در حال توسعه می‌تواند مقادیری بین ۸۰ درصد و ۹۰ درصد را به خود اختصاص دهد. تحلیل در زمینهٔ سطح و رشد ضریب نفوذ در کشورهای توسعه یافته آشکار می‌سازد که سطح اشباع ضریب نفوذ برای کشورهای توسعه یافته می‌تواند هر مقدار بین ۱۲۰ و ۱۵۰ تلفن به ازای هر ۱۰۰ نفر، به خود اختصاص دهد. بنابراین، کشورهای در حال توسعه که پذیرنده‌های ثانویه تلفن هستند، احتمالاً سطح اشباع ضریب نفوذ تلفن همراه بین ۱۰۰ و ۱۲۰ تلفن همراه به ازای هر ۱۰۰ نفر را اختیار می‌کند. از آنجایی که ایران یک پذیرنده ثانویه تلفن همراه است، سطح اشباع تلفن همراه آن احتمالاً مقداری بین ۱۰۰ و ۱۲۰ تلفن همراه به ازای هر۱۰۰ نفر خواهد بود (کومار، ۲۰۰۸).

به منظور نشان دادن مسیرهای احتمالی متفاوت از ضریب نفوذ تلفن همراه و نیز رسیدن به سطح اشباع احتمالی، این دو مدل می‌توانند برای سطوح اشباع مختلفی برآورد شوند (برای مثال ۶۰،۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۰، ۱۲۰ تلفن همراه به ازای هر ۱۰۰ نفر). همچنین میانگین درصد خطای مطلق[1] برای مشاهده‌های اخیر می‌تواند به منظور شناسایی بهترین مدل و سطح اشباع مطلوب به کار رود.

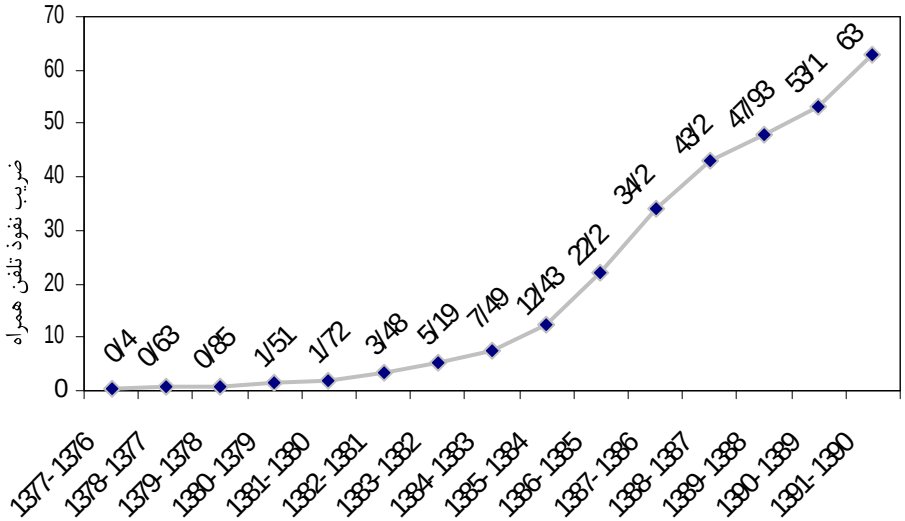
۵. تحلیل و برآورد مدل

هر دو مدل لاجیستیک و گمپرتز با کمک نرم افزار Eviews برآورد شده‌اند. این مدلها برای ۷ سطح اشباع مختلف (۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۰ و۱۲۰ تلفن همراه به ازای هر۱۰۰ نفر)، البته بدون در نظر گرفتن محدودیتی برای سطح اشباع، برآورد شده‌اند. لازم است یادآوری شود

[1] Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

که از اطلاعات سالانه ضریب نفوذ تلفن همراه مربوط به سال ۱۳۷۶-۱۳۷۷ تا ۱۳۹۰-۱۳۹۱ برای برآورد مدل‌ها استفاده شده است[۱] (نمودار ۲).

نمودار ۲ . ضریب نفوذ تلفن همراه در ایران



زمان متغیر است و برای سال ۱۳۷۶- ۱۳۷۷ ،۱ و برای سال ۱۳۷۸- ۱۳۷۹ ،۲ و برای سال ۱۳۷۹- ۱۳۸۰ ،۳ و برای سال ۱۳۹۰-۱۳۹۱، ۱۵ در نظر گرفته شده است. به منظور برآورد ضرایب β و γ در مرحلهٔ اول لازم است که مدلها به صورت زیر خطی شوند، مدل لاجیستیک را می‌توان به صورت زیر به خطی تبدیل کرد:

$$\frac{\alpha}{Md_t}-1=\gamma e^{-\beta(time)_t} \Rightarrow \frac{\alpha-Md_t}{Md_t}=\gamma e^{-\beta(time)_t} \qquad (۳)$$

اگر از طرفین معادله ۳ لگاریتم گرفته شود، به مدل خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\log(\frac{\alpha-Md_t}{Md_t})=\log\gamma-\beta(time)_t\log(e)\Rightarrow$$
$$\log(\frac{\alpha-Md_t}{Md_t})=\log\gamma-0.4343\beta(time)_t \qquad (۴)$$

---

[۱] اطلاعات مربوط به تعداد مشترکان و ضریب نفوذ تلفن همراه از شرکت مخابرات ایران از وب‌گاه www.tci.ir استخراج شده است.

و نیز در مورد مدل گمپرتز:

$$\log Md_t = \log\alpha + \log(e^{-\gamma e^{-\beta(time)_t}}) \Rightarrow \log(\frac{\alpha}{Md_t}) = \gamma e^{-\beta(time)_t}\log(e) \qquad (۵)$$

$$\log(\frac{\alpha}{Md_t}) = 0.4343\gamma e^{-\beta(time)_t} \Rightarrow \frac{\log(\frac{\alpha}{Md_t})}{0.4343} = \gamma e^{-\beta(time)_t} \qquad (۶)$$

اگر از طرفین معادله ۶ لگاریتم بگیریم، به مدل خطی زیر می‌رسیم:

$$\log(\frac{\log(\frac{\alpha}{Md_t})}{0.4343}) = \log\gamma - \beta(time)_t\log(e) \Rightarrow$$
$$\log(\frac{\log(\frac{\alpha}{Md_t})}{0.4343}) = \log\gamma - 0.4343\beta(time)_t \qquad (۷)$$

همان‌طور که ذکر شد در این معادله به منظور تخمین ضرایب γ و β دو ورودی وجود دارد، یکی Md_t که همان ضریب نفوذ تلفن همراه طی سالهای ۱۳۷۶ تا ۱۳۹۰ است و دیگری $(time)_t$ که در واقع مقادیری است که به زمان در بازه زمانی معین، اختصاص داده می‌شود و برای سال ۱۳۷۶-۱۳۷۷، ۱، برای سال۱۳۷۸- ۱۳۷۹، ۲ و به همین ترتیب برای سال ۱۳۹۰-۱۳۹۱، ۱۵ در نظر گرفته می‌شود. هرکدام از برآوردها را به طور جداگانه برای سطوح اشباع ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۰ و ۱۲۰ انجام داده و نتایج زیر حاصل شده است:

جدول ۲. برآورد پارامترها در مدل‌های لاجیستیک و گمپرتز(با مقادیر t-statistic در پرانتز)

مدل	برآورد
α =۶۰ Logistic	β=۱/۲۳۵(-۲۷/۹), γ=۷۳۲۸۹۰/۳۵(۳۸/۲), R^2=۰/۹۸۶۶, $\bar{R}^2$ =۰/۹۸۵۴, MAPE=۸/۵۸
Gompertz	β=۰/۶(-۱۱/۲), γ=۱۵۷۳/۷۷(۱۶), R^2=۰/۹۱۲۸, $\bar{R}^2$ =۰/۹۰۵۵, MAPE=۷/۸۷

ادامهٔ جدول ۲. برآورد پارامترها در مدل‌های لاجیستیک و گمپرتز(با مقادیر t-statistic در پرانتز)

مدل	برآورد
α =۷۰ Logistic Gompertz	β=۱/۱۵۴(-۳۳/۲۲), γ=۷۴۴۵۶۸/۳(۴۵/۷), R^2=۰/۹۸۹۲, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۸۳, MAPE=۷/۱۷ β=۰/۵۱۶(-۱۲/۹۶), γ=۱۱۸۰/۴۷(۲۰/۸), R^2=۰/۹۳۳۳, $\overline{R}^2$ =۰/۹۲۷۷, MAPE= ۸/۲
α =۸۰ Logistic Gompertz	β=۱/۱۰۹(-۳۳/۸۵), γ=۸۴۵۵۱۵/۲۴(۴۸/۸۸), R^2=۰/۹۸۹۶, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۸۷, MAPE=۶/۷۷ β=۰/۴۶۴(-۱۴/۲), γ=۱۰۲۹/۴۴(۲۴/۹۲), R^2=۰/۹۴۳۸, $\overline{R}^2$ =۰/۹۳۹۲, MAPE=۶
α =۹۰ Logistic Gompertz	β=۱/۱۳۴(-۳۳/۶۱), γ=۹۸۸۵۶۴/۸(۵۰/۴۱), R^2=۰/۹۸۹۴, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۸۶, MAPE=۶/۶۴ β=۰/۴۳(-۱۵/۲), γ=۹۵۲/۶۸(۲۸/۴۹), R^2=۰/۹۵۰۴, $\overline{R}^2$ =۰/۹۴۶۳, MAPE=۵/۸۴
α =۱۰۰ Logistic Gompertz	β=۱/۰۶(-۳۳/۱۵), γ=۱۱۶۲۶۵۲/۳۸(۵۱/۲۶), R^2=۰/۹۸۹۱, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۸۲, MAPE=۶/۶۲ β=۰/۴۰۳(-۱۵/۹۷), γ=۹۰۸/۳۹۳(۳۱/۷۱), R^2=۰/۹۵۵, $\overline{R}^2$=۰/۹۵۱۳, MAPE=۵/۲۱
α =۱۱۰ Logistic Gompertz	β=۱/۰۴۵(-۳۲/۶۵), γ=۱۳۶۴۰۸۰/۴۵ (۵۱/۸۳), R^2=۰/۹۸۸۸, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۷۹, MAPE=۶/۶۱ β=۰/۳۸۲(-۱۶/۶۴), γ=۸۸۱/۰۷(۳۴/۶۵), R^2=۰/۹۵۸۴, $\overline{R}^2$=۰/۹۵۵, MAPE=۴/۷۴
α =۱۲۰ Logistic Gompertz	β=۱/۰۳(-۳۲/۲), γ=۱۵۹۱۴۶۴/۴۷(۵۲/۲۵), R^2=۰/۹۸۸۵, $\overline{R}^2$ =۰/۹۸۷۶, MAPE=۶/۶۳ β=۰/۳۶۶(-۱۷/۲), γ=۱۸۶۳/۶۴(۳۷/۳۵), R^2=۰/۹۶۱۱, $\overline{R}^2$ =۰/۹۵۷۸, MAPE=۴/۴

توجه: کمیت‌های داخل پرانتز tها هستند.

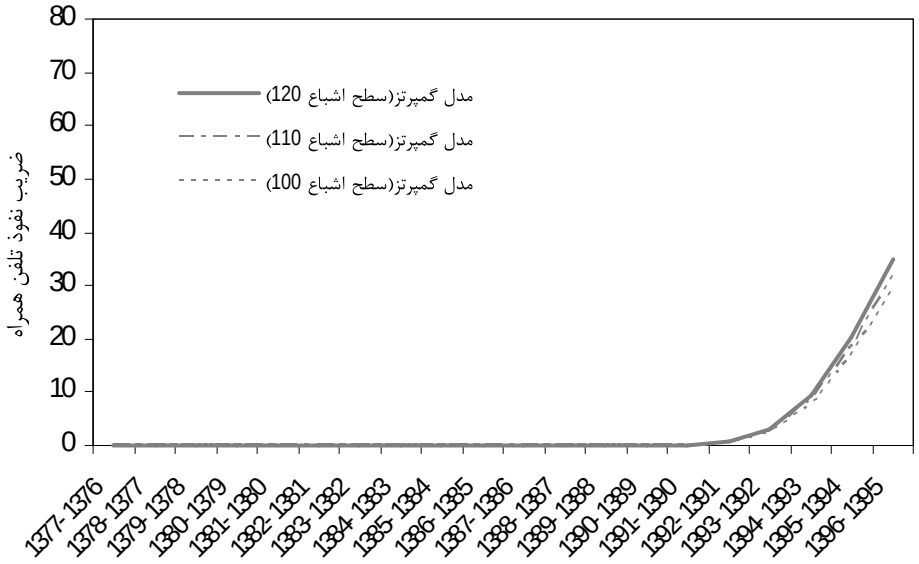
جدول ۲ نتایج برآورد را برای هر دو مدل لاجیستیک و گمپرتز نشان می‌دهد. طبق مقادیر R^2 و $\overline{R}^2$ مدلها به خوبی با اطلاعات تطابق دارند. تمامی پارامترهای برآورد شده علامت مورد انتظار را دارند زیرا همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد، مقادیر α، β و γ باید مقادیر مثبت را اختیار کنند که همان‌طور که از مشاهدات می‌بینیم، به نتایج مربوط رسیدیم و نیز تمامی پارامترها معنادار هستند.

به منظور انتخاب بهترین مدل و سطح اشباع، از مقایسهٔ مقادیر میانگین درصد خطای مطلق (MAPE) برای αهای مختلف استفاده کرده‌ایم، به طور طبیعی آن مدلی بهترین مدل برای توصیف انتشار تلفن همراه در ایران مورد استفاده قرار می‌گیرد که دارای کمترین میانگین درصد خطای مطلق باشد. میانگین درصد خطای مطلق برای مشاهدات سالهای ۱۳۷۶-۱۳۷۷ تا ۱۳۹۰-۱۳۹۱ که در جدول ۲ گزارش شده است، برای مدل لاجیستیک در بازه ۶/۶۱ تا ۸/۵۸ و برای مدل گمپرتز در بازه ۴/۴۴ تا ۷/۸۷ است. بر اساس مقادیر MAPE مدل گمپرتز با اطلاعات

توافق و سازگاری بیشتری نسبت به مدل لاجیستیک دارد. در میان مدلهای گمپرتز آن موردی که مرتبط با سطح اشباع ۱۲۰ است، کمترین MAPE را داراست. بنابراین، مدل گمپرتز با سطح اشباع ۱۲۰ باید به منظور توصیف انتشار تلفن همراه در ایران مورد استفاده قرار گیرد.

نمودار ۳ روند ضریب نفوذ تلفن همراه ایران را در چند سال آینده تا سال ۱۳۹۵-۱۳۹۶ با استفاده از مدل گمپرتز برای سطوح اشباع ۱۰۰، ۱۱۰ و ۱۲۰ را نشان می‌دهد. تحلیلهای بیشتر در این تحقیق بر مبنای مدل گمپرتز برآورد شده در سطح اشباع ۱۲۰ انجام شده است.

نمودار ۳. پیش بینی روند افزایش ضریب نفوذ تلفن همراه ایران در آینده

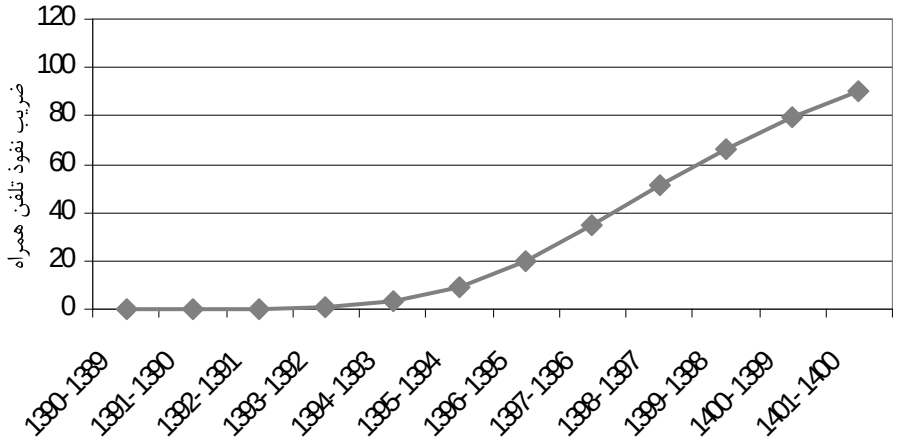


بنابراین، معادلهٔ نهایی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$Md_t = 120e^{-1863/64e^{-0.366(time)_t}} \qquad (۸)$$

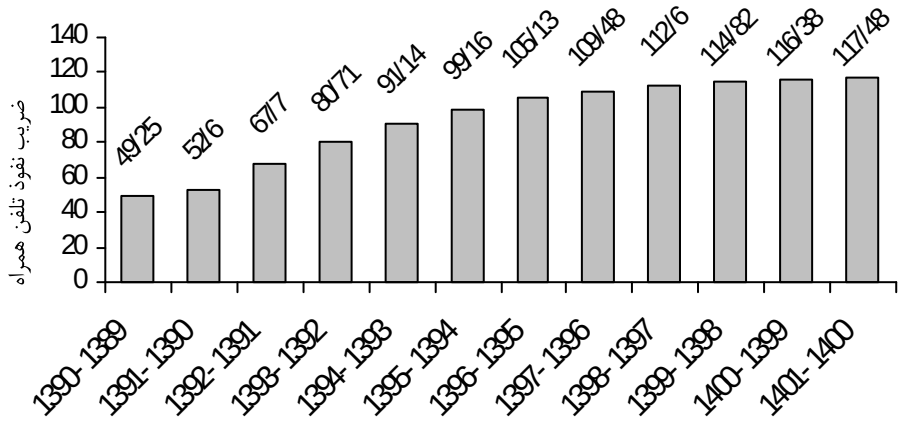
$(time)_t$، ۱ برای ۱۳۷۸- ۱۳۷۶، ۲ برای ۱۳۷۸- ۱۳۷۷، ۳ برای ۱۳۷۹-۱۳۷۸ و ۲۰ برای ۱۳۹۵-۱۳۹۶ است. بر مبنای مدل گمپرتز برآورد شده برای سطح اشباع ۱۲۰، مسیر طراحی شده ضریب نفوذ تلفن همراه در ایران در نمودار ۳ نشان داده شده است.

نمودار ۴. مسیر پیش بینی شده برای ضریب نفوذ تلفن همراه در آینده



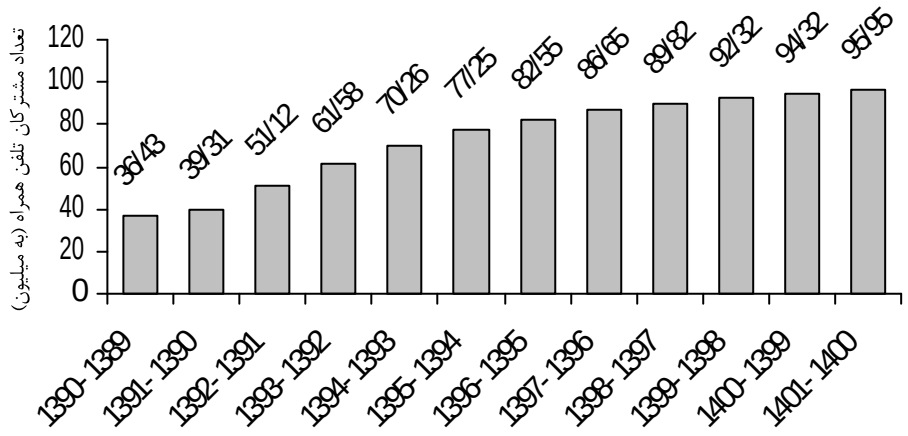
تحلیلها نشان می‌دهد که نقطهٔ انحنای منحنی در ۱۳۹۴- ۱۳۹۵ اتفاق خواهد افتاد. این مطلب بر این مسئله دلالت دارد که نرخ رشد ضریب نفوذ تلفن همراه تا ۱۳۹۴- ۱۳۹۵ افزایش می‌یابد و پس از آن شروع به کاهش می‌کند یا به عبارت دیگر، ضریب نفوذ تلفن همراه تا ۱۳۹۴- ۱۳۹۵ به صورت فزاینده‌ای افزایش می‌یابد و پس از آن به صورت کاهنده به رشد خود ادامه می‌دهد. روند افزایش ضریب نفوذ تلفن همراه در ایران نشان می‌دهد که در طول سال ۱۳۹۴- ۱۳۹۵، در حدود ۹۹ تلفن همراه به ازای هر ۱۰۰ نفر وجود خواهد داشت (نمودار ۴).

نمودار ۵. ضریب نفوذ تلفن همراه ایران در آینده



به منظور پیش‌بینی و برنامه‌ریزی تقاضای تلفن همراه در ایران در طول ۱۰ سال آینده، ضروری است فرض منطقی در مورد رشد جمعیت تا سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ در نظر گرفته شود. بر مبنای برآوردها و بخش جمعیت سازمان ملل[1] مشخص شده که جمعیت ایران با نرخ ۱/۰۴ درصد به طور سالانه از سال ۱۳۸۹-۱۳۹۰ تا ۱۳۹۴-۱۳۹۵ و ۰/۷۹ درصد به طور سالانه از ۱۳۹۴-۱۳۹۵ تا ۱۴۰۰-۱۴۰۱ افزایش می‌یابد. تقاضای تلفن همراه بر مبنای برآوردهای ضریب نفوذ تلفن همراه و جمعیت کشور از ۱۳۸۹-۱۳۹۰ تا ۱۴۰۰- ۱۴۰۱پیش‌بینی شده است (نمودار ۵).

نمودار ۶. تعداد مشترکان تلفن همراه ایران در آینده



می‌توان برآورد کرد که در حدود ۴۰ میلیون مشترک جدید تلفن همراه بین ۱۳۸۹-۱۳۹۰ و ۱۳۹۴- ۱۳۹۵ اضافه می‌شود. انتظار می‌رود در پایان سال ۱۴۰۰-۱۴۰۱ در حدود ۹۵ میلیون مشترک تلفن همراه در کشور وجود داشته باشد. رشد سریع پیش بینی شده در مشترکان تلفن همراه در ایران تأثیرات بسزایی روی درآمدهای کسب شده از اپراتورهای تلفن همراه و نیز درآمد کسب شده از دولت، خواهد داشت. درآمد اپراتورهای تلفن همراه به تعداد مشترکان تلفن همراه و متوسط درآمد هر کاربر تلفن همراه[2] بستگی دارد.

---

[1] World Population Prospects: The 2010 Revision Database
[2] Average Revenue Per User (ARPU)

۶. نتایج

مطالعهٔ انتشار و نفوذ نوآوریها در جامعه مورد علاقه اقتصاددانان قرار گرفته است، فرآیند انتشار نوآوریها در جامعه طی زمان منحنی S شکل دارد. زیرا پذیرندهها بالقوه محدود هستند و پس از مدت زمانی اشباع کامل حاصل می‌شود. در مراحل اولیه معرفی پدیدهٔ نو در جامعه، به دلیل محدودیت عرضه و همچنین تعداد کم پذیرندهها، رشد پذیرندهها فزاینده است و پس از آن دوباره رشد پذیرندهها کند می‌شود، زیرا در آن مرحله بیشتر پذیرندههای بالقوه آن را پذیرفته‌اند.

نفوذ تلفن همراه نیز فرآیند مذکور را داشته که در این پروژه رشد و پیشرفت ضریب نفوذ تلفن همراه در ایران با استفاده از مدلهای منحنی رشد S شکل تجزیه و تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهند که مدل گمپرتز به درستی مسیر انتشار تلفن همراه را در ایران، توصیف می‌کند. تحلیلها نشان می‌دهند که رشد بالای انتشار تلفنهای همراه برای ۳ سال آینده تا سال ۱۳۹۴-۱۳۹۵ ادامه پیدا خواهد کرد. برآورد شده است که در حدود ۹۹ تلفن همراه به ازای هر ۱۰۰ مشترک در ایران در پایان سال ۱۳۹۴-۱۳۹۵ وجود خواهد داشت. تعداد تلفنهای همراه از تعداد مردم در کشور در سال ۱۳۹۵-۱۳۹۶ پیشی خواهد گرفت. پیش بینی می‌شود که تقاضای کل تلفن همراه از ۳۶ میلیون در ۱۳۸۹- ۱۳۹۰ به ۷۷ میلیون در ۱۳۹۴- ۱۳۹۵ و تقریباً ۹۵ میلیون در ۱۴۰۰-۱۴۰۱ افزایش خواهد یافت.

احتمال زیادی وجود دارد که گسترش سریع خدمات تلفن همراه چالشهای راهبردی، اقتصادی برای اپراتورها ایجاد کند. از آنجایی که اپراتورها در حال توسعه پوشش به مناطق شهری، نیمه شهری و روستایی هستند، آنها با وظایف خطیری نظیر گسترش زیرساخت سراسری و بهبود بخشیدن و نیز نگه‌داری کیفیت خدمات روبه‌رو خواهند بود. رشد سریع پیش بینی شده در تعداد مشترکان تلفن همراه در ایران پیامدهای مهمی را برای برنامه‌ریزیهای آینده اپراتورها، ارائه دهندگان زیرساخت، تولیدکنندگان و فروشندگان گوشیهای تلفن همراه خواهد داشت. اپراتورهای تلفن همراه باید با برنامه‌های احتمالی به منظور استقرار زیرساخت نظیر حفظ مشتری برای رویارویی و پاسخگویی به چنین طرحهایی آماده باشند. کارکرد تلفن همراه طی سالهای گذشته روند رو به رشد و مطلوبی داشته است. در حال حاضر استفاده از تلفن همراه در کشور به وضعیت نسبتاً مطلوبی رسیده؛ یعنی اگر روند فناوری اطلاعات در ایران بررسی شود، مشاهده می‌شود که هرچه جلوتر می‌رویم کاربردهای این وسیله ارتباطی محسوس‌تر می‌شود؛ البته هنوز تا رسیدن به نقطهٔ مطلوب فاصله وجود دارد. این به دو دلیل عمده است؛ یکی اینکه از نظر فنی و امکاناتی که در اختیار مردم قرار داده شده هنوز به آن حد مطلوب نرسیده است و

دوم اینکه، در حوزهٔ فرهنگ سازی و بسترسازی برای استفاده از امکانات به اندازهٔ کافی کار نشده است.

۷. توصیه‌های سیاستی

همان‌طور که تحلیلهای این مقاله نشان می‌دهد، نقطهٔ انحنای منحنی ضریب نفوذ تلفن همراه در آینده در سال ۱۳۹۴-۱۳۹۵ اتفاق خواهد افتاد. این مسئله بیانگر این است که نرخ رشد ضریب نفوذ تلفن همراه تا سال ۱۳۹۴ افزایش می‌یابد یا به عبارت دیگر، ضریب نفوذ تلفن همراه تا سال ۱۳۹۴ به صورت فزاینده‌ای افزایش می‌یابد و پس از آن به صورت کاهنده به رشد خود ادامه می‌دهد. با توجه به این امر، توصیه می‌شود سرمایه‌گذاران در بازار تلفن همراه، تا زمانی که این بازار به حد اشباع نرسیده و نیز ضریب نفوذ تلفن همراه با نرخ فزاینده‌ای رشد می‌کند، باید به توسعه کمی در مورد تلفن همراه و جذب مشتریان جدید توجه کرده و پس از آنکه ضریب نفوذ تلفن همراه با نرخ کاهنده‌ای رشد می‌کند و به حد اشباع می‌رسد، به دلیل افزایش رقابت در این بازار، لازم است به توسعهٔ کیفی توجه بیشتری شود و سرمایه‌گذاران به افزایش سهم بازار از طریق حفظ مشتریان و عرضهٔ خدمات جدید و کسب مزیت رقابتی و همچنین ارتقای خدمات ارزش افزوده بپردازند.

مآخذ

Abdoli, G., & Khalili Araghi, M. (2008). Estimation of the network externality coefficient of land phone in Iran. *Journal of Tahghighat-E-Eghtesadi*, 2(84), 49-70 (in Persian).

Abdoli, G., & Varharami, V. (2009). Modeling economic determinants of adoption and penetration of TV, radio, and laundary in Iran. *Journal of the Faculty of Humanities and Social Sciences*, 8(32) 79-98 (in Persian).

Burki, A. A., & Aslam, S. (2000). The role of digital technology and regulations in the diffusion of mobile phones in Asia. *Pakistan development review*, 39(4), 741–748.

Davies, S. (1979). The diffusion of process innovation. *Cambridge University Press*, London.

Geroski, P. A. (2000). Model of technology diffusion. *Research Policy*, 29, 603-625.

Griliches, Z. (1957). Hybrid corn: An exploration in the economics of technological change. *Econometrica*, 48, 501-522.

Gruber, H. (2001). Competition and innovation: The diffusion of mobile telecommunications in Central and Eastern Europe. *Information economics and policy*, 13, 19–34.

Gruber, H., & Verbooven, F. (2001). The diffusion of mobile telecommunications services in the European Union. *European economic review*, 45(3), 577-588.

Ireland, N., & Stoneman, p. (1986). Technological diffusion, expectations and welfare. *Oxford Economics Papers*, 38(2), 283-304.

Karshenas, M., & Stoneman, P. (1993). Rank, stock, order, and epidemic effects in the diffusion of new process technologic: An empirical model. *The Rand Journal of Economics*, 24, 503-527.

Kauffman, R. J., & Techatassanasoontorn, A. A. (2005). Is there a global digital divide for digital wireless phone technologies? *Journal of the Association for Information Systems*, 6(12), 338–382.

Mansfield, E. (1961). Technical change and the rate of imitation. *Economctrica*, 29, 741-766.

Rogiers, E. (1995). *Diffusion of innovations*. The Free Press, New York.

Rouvinen, P. (2006). Diffusion of digital mobile telephony: Are developing countries different? *Telecommunications Policy*, 30(1), 46–63.

Sanjay Kumar, S. (2008). The diffusion of mobile phones in India. *Telecommunications Policy*, 32, 642-651.

Scitovski, R. , & Meler, M. (2002). Solving parameter estimation problem in new product diffusion models. *Applied Machination and Computation*, 127, 45-63.

Show- Ling, J., & Shau-chi, D., & Simona, S. (2005). The pattern and externality effect of diffusion of Mobil. *Information Economic and policy*, 19, 133-147.

Stoneman, P. (2000). The economics of technological diffusion. *Blackwell Publishers*, 149-171.

پیوست

مدل لاجیستیک

مدل لاجیستیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Md_t = \frac{\alpha}{1+\gamma e^{-\beta(time)_t}} + \varepsilon_t \quad (۱)$$

نقطهٔ عطف Md_t مکانی است که حداکثر نرخ انتشار به وقوع می‌پیوندد. برای رسیدن به نقطه عطف منحنی لازم است که از Md_t دو بار مشتق گرفته و عبارت مشتق دوم را برابر با صفر قرار داده تا به زمان عطف دست یابیم.

$$\frac{\partial Md_t}{\partial t} = \frac{\alpha\beta\gamma e^{-\beta t}}{(1+\gamma e^{-\beta t})^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 Md_t}{\partial t^2} = \frac{\alpha\gamma\beta^2 e^{-\beta t}(\gamma e^{-\beta t}-1)}{(1+\gamma e^{-\beta t})^3} \quad (۳)$$

اگر معادلهٔ ۳ را مساوی صفر قرار دهیم به زمان نقطهٔ عطف می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 Md_t}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \gamma e^{-\beta t} = 1 \Rightarrow e^{-\beta t} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow t = \frac{\ln\gamma}{\beta} \quad (۴)$$

اگر زمان به دست آمده در معادلهٔ ۴ را در معادلهٔ ۱ جایگزین کنیم، به اندازهٔ ضریب نفوذ تلفن همراه در نقطهٔ عطف می‌رسیم:

$$Md_t = \frac{\alpha}{1+\gamma e^{-\beta\frac{\ln\gamma}{\beta}}} = \frac{\alpha}{1+1} = \frac{\alpha}{2} \quad (۵)$$

و اگر زمان به دست آمده در معادلهٔ ۴ را در معادلهٔ ۲ جایگزین کنیم، به حداکثر نرخ رشد ضریب نفوذ تلفن همراه در نقطهٔ عطف می‌رسیم:

$$\frac{\partial Md_t}{\partial t} = \frac{\alpha\beta\gamma e^{-\ln\gamma}}{(1+\gamma e^{-\ln\gamma})^2} = \frac{\alpha\beta}{4} \quad (۶)$$

مدل گمپرتز

به طور مشابه مدل گمپرتز به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$Md_t = \alpha e^{-\gamma e^{-\beta(time)_t}} + \eta_t \quad (۷)$$

برای رسیدن به نقطهٔ عطف منحنی لازم است که از Md_t دو بار مشتق گرفته و عبارت مشتق دوم را برابر با صفر قرار داده تا به زمان عطف دست یابیم.

$$\frac{\partial Md_t}{\partial t} = \alpha\beta\gamma e^{-(\beta t+\gamma e^{-\beta t})} \quad (۸)$$

$$\frac{\partial^2 Md_t}{\partial t^2} = \frac{-\alpha\beta^2\gamma(1-\gamma e^{-\beta t})}{e^{\beta t}+\gamma e^{-\beta t}} \quad (۹)$$

اگر معادلهٔ ۹ را مساوی صفر قرار دهیم به زمان نقطهٔ عطف می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 Md_t}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow 1-\gamma e^{-\beta t} = 0 \Rightarrow \gamma e^{-\beta t} = 1 \Rightarrow t = \frac{\ln\gamma}{\beta} \quad (۱۰)$$

اگر زمان به دست آمده در معادلهٔ ۱۰ را در معادلهٔ ۷ جایگزین کنیم، به اندازهٔ ضریب نفوذ تلفن همراه در نقطهٔ عطف می‌رسیم :

$$Md_t = \alpha e^{-\gamma e^{-\beta\frac{\ln\gamma}{\beta}}} = \alpha e^{-\gamma e^{-\ln\gamma}} = \frac{\alpha}{e} = 0.36788\alpha \cong 37\%\alpha \quad (۱۱)$$

حال اگر زمان به دست آمده در معادلهٔ ۱۰ را در معادلهٔ ۸ جایگزین کنیم، به حداکثر نرخ رشد ضریب نفوذ تلفن همراه در نقطهٔ عطف می‌رسیم:

$$\frac{\partial Md_t}{\partial t} = \alpha\beta\gamma e^{-(\beta\frac{\ln\gamma}{\beta}+\gamma e^{-\beta\frac{\ln\gamma}{\beta}})} = \frac{\alpha\beta\gamma}{e^{\ln\gamma+1}} = \frac{\alpha\beta}{e} \quad (۱۲)$$