مروری بر روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

عادل آذر[1*]، علیرضا طغیانی[2]

۱- استاد گروه مدیریت، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه تربیت مدرس، تهران،ایران
۲- دانشجوی دکتری مدیریت، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

دریافت: ۹۱/۱۰/۲٦ پذیرش: ۹۲/۱۰/۱٦

چکیده

این مقاله مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی که در آن‌ها همه پارامترها و متغیرها فازی هستند، مورد بحث قرار می‌دهد. جواب بهینه فازی زمانی واقعی است که در همه محدودیت‌های مدل صدق کند، یک جواب بهینه قطعی نمی‌تواند جواب بهینه مسئله‌ای فازی باشد. روش‌های جدید یافتن جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت‌های مساوی و نامساوی از جمله روش دهقان و همکاران، روش لطفی و همکاران، روش مؤمنی و همکاران و روش کومار و همکاران مطرح، بررسی و مقایسه می‌شوند. همچنین استفاده از متغیرهای کمکی فازی برای معادله کردن محدودیت‌های نامساوی فازی مطرح شده است. از آن جایی که کار با اعداد مثلثی فازی راحت‌تر است، برای مثال‌های عددی از اعداد مثلثی فازی معمول و یا اعداد مثلثی فازی LR استفاده شده است. برای نشان دادن مزایا و معایب روش‌های مطرح شده، مثال‌های عددی مختلفی حل می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی، جواب بهینه فازی، اعداد فازی مثلثی.

۱- مقدمه

بلمن و زاده مفهوم تصمیم‌گیری در محیط فازی را مطرح کردند [۱، صص۱٤۱-۱٦٤] بسیاری از پژوهشگران این مفهوم را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی پذیرفتند. با وجود این در همه کارهای انجام شده مواردی از برنامه‌ریزی خطی فازی مطالعه شده‌اند که در آن‌ها فرض شده است همه قسمت‌های مسئله فازی نیستند؛ یعنی فقط اعداد سمت راست یا ضرایب تابع

* نویسندهٔ مسؤول مقاله: E-mail: azara@modares.ac.ir

هدف فازی بودند در حالی که متغیرها فازی نبودند. مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی که در آن‌ها همه پارامترها به همراه متغیرها با اعداد فازی ارائه شوند، به‌عنوان مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی **FFLP**[1] شناخته می‌شوند. مسائل **FFLP** می‌تواند به دو طبقه تقسیم شوند:

۱- مسائل **FFLP** با محدودیت‌های نامساوی

۲- مسائل **FFLP** با محدودیت‌های مساوی.

بسیاری از نویسندگان روش های متفاوتی را برای حل مسائل **FFLP** مطرح کرده‌اند. در همه این روش‌ها نخست مسئله **FFLP** به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی تبدیل شده و سپس مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی به‌دست آمده برای یافتن جواب بهینه مسئله **FFLP** حل می‌شود. عیب اساسی جواب به‌دست آمده با روش‌های موجود این است که محدودیت‌ها را به‌صورت کامل ارضا نمی‌کند؛ یعنی به‌دست آوردن اعداد فازی سمت راست محدودیت با قراردادن جواب به‌دست آمده در سمت چپ محدودیت غیر ممکن است.

در این مقاله روش‌های پیدا کردن جواب بهینه فازی مسائل **FFLP** مطرح و نتایج و کارایی روش‌ها مقایسه می‌شوند. برای نشان دادن روش‌های مطرح شده، مثال‌های عددی حل شده و نتایج به‌دست آمده مورد بحث قرار می‌گیرند.

۲- مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

برنامه‌ریزی خطی یکی از کاربردی‌ترین روش‌های تحقیق در عملیات م‌باشد. در مدل اولیه، مقدار پارامترهای مدل برنامه‌ریزی خطی باید به‌خوبی تعریف شده و دقیق باشند. با وجود این در محیط دنیای واقعی این فرض با واقعیت منطبق نیست. در مسائل واقعی ممکن است درباره پارامترها عدم اطمینان وجود داشته باشد. در چنین وضعیتی پارامترهای مسائل برنامه‌ریزی خطی ممکن است با عنوان اعداد فازی ارائه شوند. مسائل **FFLP** با m محدودیت و n متغیر فازی می‌تواند به‌صورت زیر فرموله شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ (or\ Minimize)\ (\tilde{C}^T \otimes \tilde{X})\\
&subject\ to:\\
&\tilde{A} \otimes \tilde{X} \leq, =, \geq \tilde{b}\\
&\tilde{X} \text{ is a non - negative fuzzy number}\\
&\tilde{C}^T = [\tilde{c}_j]_{1\times n}, \tilde{X} = [\tilde{x}_j]_{n\times 1}, \tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}, \tilde{b} = [\tilde{b}_i]_{m\times 1}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_j, \tilde{x}_j, \tilde{b}_i \in F(R)
\end{aligned}
$$

۳- جواب بهینه فازی مسئله FFLP [۲]

جواب بهینه فازی مسئله **FFLP** عدد فازی $\tilde{X}$ **خواهد بود، اگر ویژگی‌های زیر را داشته باشد:**

۱) $\tilde{X}$ یک عدد فازی نامنفی باشد.

۲) $\tilde{A} \otimes \tilde{X} \leq, =, \geq \tilde{b}$

۳) اگر هر عدد فازی نامنفی دیگری مانند $\tilde{X}'$ وجود داشته باشد، به طوری که $\tilde{A} \otimes \tilde{X}' \leq, =, \geq \tilde{b}$ بنابراین $R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) > R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}')$ (در مورد مسئله ماکزیمم) و $R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) < R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}')$ (در مورد مسئله مینیمم).

در صورتی که $\tilde{X}$ جواب بهینه فازی مسئله **FFLP** باشد؛ اگر عدد فازی $\tilde{Y}$ وجود داشته باشد، به طوری که:

۱) $\tilde{Y}$ یک عدد فازی نامنفی باشد.

۲) $\tilde{A} \otimes \tilde{Y} \leq, =, \geq \tilde{b}$

۳) $R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) = R(\tilde{C}^T \otimes \tilde{Y})$ باشد، بنابراین گفته می‌شود $\tilde{Y}$ جواب بهینه فازی جایگزین برای مسئله است.

۴- روش تبدیل محدودیت‌های نامساوی به محدودیت‌های مساوی[۳، صص۳۷-۴۱]

اگر برای برخی از iها داشته باشیم $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \leq \tilde{b}_i$ برای تبدیل چنین محدودیت نامساوی به تساوی متغیر نامنفی $\tilde{S}_i$ را به سمت چپ محدودیت اضافه می کنیم؛ یعنی: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \oplus \tilde{S}_i = \tilde{b}_i$. که در آن‌ها $\tilde{S}_i$ یک عدد فازی نامنفی است.

اگر برای برخی از iها داشته باشیم $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \geq \tilde{b}_i$ برای تبدیل چنین محدودیت نامساوی به تساوی متغیر نامنفی $\tilde{S}_i$ را به سمت راست محدودیت اضافه می‌کنیم؛ یعنی: $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j = \tilde{b}_i \oplus \tilde{S}_i$. که در آن‌ها $\tilde{S}_i$ یک عدد فازی نامنفی است.

۵- یافتن جواب بهینه فازی مسائل FFLP

۵-۱- روش‌های دهقان و همکاران برای یافتن جواب مسئله FFLS[1] [۴، صص ۳۲۸-۳۴۳

دهقان و همکاران از اعداد فازی LR و عملگرهای دوبواس و پراد استفاده و چندین روش حل برای مسئله **FFLS** مطرح کرده‌اند:

سیستم معادله‌های خطی $n \times n$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_1, \\ (\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{22} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

شکل ماتریسی معادله‌های بالا به صورت زیر است:

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b},$$

که در آن $\widetilde{A}$ یک ماتریس فازی $n\times n$ است. این سیستم را سیستم خطی کاملاً فازی می‌نامیم. اگر $\widetilde{A}, \widetilde{X}, \widetilde{b}$ را از نوع اعداد فازی یا ماتریس فازی LR در نظر بگیریم و فرض کنیم:

$$\widetilde{A} = (A, M, N) \geq 0,$$
$$\widetilde{b} = (b, h, g) \geq 0$$
$$\widetilde{x} = (x, y, z) \geq 0.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, h, g).$$

بنابراین $\widetilde{x} = (x, y, z)$ جواب تقریبی فازی یا به‌طور خلاصه جواب فازی مسئله بالاست اگر و فقط اگر :

$$Ax = b, \quad Ay + Mx = g, \quad Az + Nx = h.$$

۵-۲- روش‌های حل

۵-۲-۱-روش مستقیم با استفاده از ماتریس وارون $\widetilde{A}^{-1}$:

فرض کنید که ماتریس A یک ماتریس قطعی غیر منفرد باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$(Ax, Ay + Mx.Az + Nx) = (b, h, g)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ Ay + Mx = h, \\ Az + Nx = g. \end{cases}$$

و به بیان دیگر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ Ay = h - Mx, \\ Az = g - Nx. \end{cases}$$

بنابراین به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b,$$

و با قرار دادن آن در دو معادله دیگر خواهیم داشت:

$$y = A^{-1}h - A^{-1}Mx$$
$$z = A^{-1}g - A^{-1}Nx.$$

در صورتی که $\tilde{A} = (A, M, N)$ و $\tilde{b} = (b, g, h)$ به‌ترتیب ماتریس فازی و بردار فازی نامنفی باشند، به‌دلیل اینکه از نوع LR هستند، باید معادله‌های بالا را برای مرکز و توابع حواشی حل کنیم؛ بنابراین سه دسته معادله باید حل شوند.

مثال عددی:

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \tilde{5}\tilde{x}_1 + \tilde{6}\tilde{x}_2 = \tilde{50} \\ \tilde{7}\tilde{x}_1 + \tilde{4}\tilde{x}_2 = \tilde{48}. \end{cases}$$

که منظور از آن با جزئیات کامل عبارت‌های زیر باشد:

$$\begin{cases} (5,1,1) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (6,1,2) \otimes (x_2, y_2, z_2) = (50,10,17), \\ (7,1,0) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (4,0,1) \otimes (x_2, y_2, z_2) = (48,5,7). \end{cases}$$

بنابراین برای مرکز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 48 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

به طور مشابه برای توابع حواشی راست و چپ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

بنابراین جواب فازی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (4, \frac{1}{11}, 0) \\ (5, \frac{1}{11}, \frac{1}{2}) \end{bmatrix}.$$

۵-۲-۲- قاعده کرامر

در حالت قطعی برای حل معادله **AX=b** با استفاده از قاعده کرامر جواب از تقسیم دو دترمینان به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$x_i = \frac{\det(A^i)}{\det(A)}, i = ۱,۲,...,n,$$

که در آن $A^{(i)}$ با جایگذاری **b** در i امین ستون ماتریس **A** به‌دست می‌آید. بنابراین برای معادله‌های فازی دو کسر دیگر نیز باید محاسبه شود:

$$y_i = \frac{\det(A'^{(i)})}{\det(A)}, i = ۱,۲,...,n,$$

$$z_i = \frac{\det(A''^{(i)})}{\det(A)}, i = ۱,۲,...,n,$$

که در آن‌ها $A'^{(i)}$ و $A''^{(i)}$ از جایگذاری i امین ستون ماتریس **A** با $h - Mx$ و $g - Nx$ به‌دست می‌آیند.

مثال عددی:

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} (٤,٣,٢) & (٥,٢,١) & (٣,٠,٣) \\ (٧,٤,٣) & (١٠,٦,٥) & (٢,١,١) \\ (٦,٢,٢) & (٧,١,٢) & (١٥,٥,٤) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_١ \\ \tilde{x}_٢ \\ \tilde{x}_٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٧١,٥٤,٧٦) \\ (١١٨,١١٥,١٢٩) \\ (١٥٥,٨٩,١٥١) \end{bmatrix}$$

با استفاده از قاعده کرامر خواهیم داشت:

$$\det(A) = ٤٦, \det(A^{(١)}) = ١٨٤, \det(A^{(٢)}) = ٣٦٨, \det(A^{(٣)}) = ٢٣٠$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x_١ = \frac{١٨٤}{٤٦} = ٤, \quad x_٢ = \frac{٣٦٨}{٤٦} = ٨, \quad x_٣ = \frac{٢٣٠}{٤٦} = ٥.$$

سپس خواهیم داشت:

$$h - Mx = \begin{bmatrix} ٢٦ \\ ٤٦ \\ ٤٨ \end{bmatrix}, \quad g - Nx = \begin{bmatrix} ٤٥ \\ ٧٢ \\ ١٠٧ \end{bmatrix}.$$

بنابراین می‌توان این‌گونه نوشت:

$$A'^{(١)} = \begin{bmatrix} ٢٦ & ٥ & ٣ \\ ٤٦ & ١٠ & ٢ \\ ٤٨ & ٧ & ١٥ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A'^{(١)}) = ٩٢ \Rightarrow y_١ = \frac{٩٢}{٤٦} = ٢.$$

به طور مشابه به‌دست می‌آید:

$$\det(A'^{(٢)}) = ١٣٨, \quad \det(A'^{(٣)}) = ٤٦, \quad (\det(A''^{(١)}) = ٩٢, \quad \det(A''^{(٢)}) = ٢٣٠, \quad \det(A''^{(٣)}) = ١٨٤.$$

بنابراین جواب این مسئله به‌صورت زیر است:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (٤,٢,٢) \\ (٨,٣,٥) \\ (٥,١,٤) \end{bmatrix}.$$

۵-۲-۳-روش تجزیه فازی LU

در این روش ماتریس $\tilde{A}$ را به دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی فازی $\tilde{L},\tilde{U}$ تجزیه می‌کنیم به صورت زیر:

$$\tilde{A} = \tilde{L} \otimes \tilde{U}$$

و یا با جزئیات کامل‌تر، یعنی:

$$(A, M, N) = (L_١, L_٢, L_٣) \otimes (U_١, U_٢, U_٣).$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= L_١U_١, \\ M &= L_١U_٢ + L_٢U_١, \\ N &= L_١U_٣ + L_٣U_١. \end{aligned}$$

به طور مثال برای $A = L_١U_١,$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

به طور مثال ماتریس فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (6,1,4) & (5,2,2) & (3,2,1) \\ (12,8,20) & (14,12,15) & (8,8,10) \\ (24,10,34) & (32,30,30) & (20,19,24) \end{bmatrix}$$

با استفاده از تجزیه خواهیم داشت:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

بنابراین تجزیه ماتریس فازی بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{A} = \tilde{L} \otimes \tilde{U} = \begin{bmatrix} (1,0,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (2,1,2) & (1,0,0) & (0,0,0) \\ (4,1,3) & (3,2,1) & (1,0,0) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (6,1,4) & (5,2,2) & (3,2,1) \\ (0,0,0) & (4,3,1) & (2,1,2) \\ (0,0,0) & (0,0,0) & (2,1,3) \end{bmatrix}.$$

حل مسئله FFLS با استفاده از تجزیه فازی LU:

جواب مسئله $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ طی فرایند حل دو مرحله‌ای مثلثی به‌دست می‌آید:

$$\tilde{L} \otimes \tilde{x}' = \tilde{b}, \quad \tilde{U} \otimes \tilde{x} = \tilde{x}', \Rightarrow \quad \tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{L} \otimes \tilde{U} \otimes \tilde{x} = \tilde{L} \otimes \tilde{x}' = \tilde{b}.$$

مثال عددی:

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} (٦,١,٤) & (٥,٢,٢) & (٣,٢,١) \\ (١٢,٨,٢٠) & (١٤,١٢,١٥) & (٨,٨,١٠) \\ (٢٤,١٠,٣٤) & (٣٢,٣٠,٣٠) & (٢٠,١٩,٢٤) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٥٨,٣٠,٦٠) \\ (١٤٢,١٣٩,٢٥٧) \\ (٣١٦,٢٩٧,٥١٤) \end{bmatrix}.$$

بنابراین در مرحله اول خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} (١,٠,٠) & (٠,٠,٠) & (٠,٠,٠) \\ (٢,١,٢) & (١,٠,٠) & (٠,٠,٠) \\ (٤,١,٣) & (٣,٢,١) & (١,٠,٠) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ \tilde{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٥٨,٣٠,٦٠) \\ (١٤٢,١٣٩,٢٥٧) \\ (٣١٦,٢٩٧,٥١٤) \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{x}' = \begin{bmatrix} (٥٨,٣٠,٦٠) \\ (٢٦,٢١,٢١) \\ (٦,٤,١١) \end{bmatrix}.$$

و در مرحله دوم جواب به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} (٦,١,٤) & (٥,٢,٢) & (٣,٢,١) \\ (٠,٠,٠) & (٤,٣,١) & (٢,١,٢) \\ (٠,٠,٠) & (٠,٠,٠) & (٢,١,٣) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٥٨,٣٠,٦٠) \\ (٢٦,٢١,٢١) \\ (٦,٤,١١) \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (٤,١,٣) \\ (٥,٠.٥,٢) \\ (٣,٠.٥,١) \end{bmatrix}$$

۵-۲-۴-روش برنامه‌ریزی خطی

برای حل $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ Ay + Mx = g, \\ Az + Nx = h. \end{cases}$$

برای اینکه جواب مثبتی برای مسئله به‌دست آوریم، باید محدودیت $x - y \geq 0$ را در نظر گرفته و مسئله را با استفاده از روش دو مرحله‌ای یا روش M بزرگ با بردارهای مصنوعی x', y', z' حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x' + y' + z' \\
s.t. \quad & Ax + x' = b, \\
& Mx + Ay + y' = g, \\
& Nx + Az + z' = h, \\
& x - y \geq 0, \\
& x', y', z', x, y, z \geq 0.
\end{aligned}
$$

اگر روش M بزرگ را به‌کار می‌بردیم، تابع هدف به این صورت جایگزین می‌شد:

$$\min \quad M_1 x' + M_2 y' + M_3 z',$$

مثال عددی:

با به‌کارگیری روش مذکور برای ماتریس فازی غیر مربع زیر، جواب مثبت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix}
(2,0.2,0.2) & (1,0.4,0.3) & (3,0.3,0.4) & (4,0.2,0.1) & (5,0.5,0.2) & (6,0.4,0.3) & (7,0.3,0.5) & (5,0.2,0.8) & (9,1.0,0.9) \\
(2,0.3,0.1) & (3,0.4,0.2) & (2,0.2,0.3) & (1,0.1,0.3) & (2,0.9,0.2) & (3,0.8,0.3) & (4,0.7,0.3) & (2,0.6,0.3) & (3,0.5,0.2) \\
(1,0.3,0.2) & (1,0.5,0.2) & (2,0.3,0.1) & (3,0.2,0.3) & (1,0.2,0.5) & (9,0.2,0.3) & (5,0.2,0.6) & (4,0.2,0.3) & (6,0.2,0.2) \\
(2,0.4,0.5) & (4,0.5,0.2) & (2,0.6,1.2) & (3,0.3,0.3) & (2,0.1,0.6) & (6,0.2,0.3) & (8,0.3,0.3) & (7,0.4,0.9) & (6,0.5,0.2)
\end{bmatrix}
$$

و

$$
\tilde{b} = \begin{bmatrix}
(109.9,13.9,14.1) \\
(48,12.5,7.9) \\
(84.9,7.5,8.3) \\
(103,10.5,13.5)
\end{bmatrix}
$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1, y_1, z_1) \\ (x_2, y_2, z_2) \\ (x_3, y_3, z_3) \\ (x_4, y_4, z_4) \\ (x_5, y_5, z_5) \\ (x_6, y_6, z_6) \\ (x_7, y_7, z_7) \\ (x_8, y_8, z_8) \\ (x_9, y_9, z_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.8989, & 0.0446, & 0.1035) \\ (1.0567, & 0.0181, & 0.4705) \\ (0.7106, & 0.0938, & 0.0808) \\ (2.5653, & 0.0971, & 0.0829) \\ (1.4501, & 0.4855, & 0.2447) \\ (2.1195, & 0.1517, & 0.0239) \\ (2.0906, & 0.0153, & 0.0457) \\ (4.2225, & 0.0195, & 0.0908) \\ (4.3265, & 0.0979, & 0.0475) \end{bmatrix},$$

در صورتی که در این روش مقدار بهینه تابع هدف غیر صفر به دست آید، مسئله فاقد جواب مثبت خواهد بود و جواب بهینه با مقادیر تلورانس به‌دست خواهد آمد که می‌توان آن را جواب تقریبی مثبت در نظر گرفت.

۶- روش لطفی و همکاران [۵، صص ۱۳۵۱-۱۳۵۶]

در این روش از مفهوم اعداد فازی مثلثی متقارن استفاده شده و جواب تقریبی فازی حاصل می‌شود که به تشریح آن می‌پردازیم:

فرض کنید $\tilde{u}$ یک عدد فازی باشد و در شکل پارامتری $\left(\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right)$ باشد. برای یافتن نزدیک‌ترین عدد فازی مثلثی متقارن به $\tilde{u}$ باید عبارت زیر را با توجه به x_0, δ حداقل کنیم:

$$D^2\left(\tilde{u}, S[x_0, \delta]\right) = \int_0^1 \left(\underline{u}(r) - \underline{S[x_0, \delta]}(r)\right)^2 dr + \int_0^1 \left(\overline{u}(r) - \overline{S[x_0, \delta]}(r)\right)^2 dr$$

برای حداقل کردن $D\left(\tilde{u}, S[x_0, \delta]\right)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial D\left(\tilde{u}, S[x_0, \delta]\right)}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial D\left(\tilde{u}, S[x_0, \delta]\right)}{\partial x_0} = 0$$

راه‌حل به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\overline{u}(r) - \underline{u}(r)\right)(1-r)\,dr$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\overline{u}(r) + \underline{u}(r)\right)dr$$

یعنی نزدیک‌ترین عدد مثلثی متقارن غیرفازی شده $\tilde{u}$ به مرکز x_0 و حاشیه فازی δ به دست می‌آید.

فرض کنید مسئله کاملاً فازی زیر را داریم:

$$Max\left(C_{\tilde{C}}, w^L_{\tilde{C}}, w^R_{\tilde{C}}\right)\left(C_{\tilde{X}}, w^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}}\right)$$

$$s.t.\left(C_{\tilde{A}}, w^L_{\tilde{A}}, w^R_{\tilde{A}}\right)\left(C_{\tilde{X}}, w^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}}\right) = \left(C_{\tilde{b}}, w^L_{\tilde{b}}, w^R_{\tilde{b}}\right)$$

$$C_{\tilde{X}} - w^L_{\tilde{X}} \geq 0$$

$$\left(C_{\tilde{X}}, w^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}}\right) \in N.S.T^n \,(\textit{Nearest}\ \text{Symmetric Triangular})$$

که در آن

$$\tilde{X} = \left(C_{\tilde{X}}, w^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}}\right), \tilde{b} = \left(C_{\tilde{b}}, w^L_{\tilde{b}}, w^R_{\tilde{b}}\right), \tilde{A} = \left(C_{\tilde{A}}, w^L_{\tilde{A}}, w^R_{\tilde{A}}\right), \tilde{C} = \left(C_{\tilde{C}}, w^L_{\tilde{C}}, w^R_{\tilde{C}}\right),$$

$$C_{\tilde{X}} = Core\left(\tilde{X}\right), C_{\tilde{b}} = Core\left(\tilde{b}\right), C_{\tilde{A}} = Core\left(\tilde{A}\right), C_{\tilde{C}} = Core\left(\tilde{C}\right)$$

هستند که هر کدام می‌توانند $\tilde{X}, \tilde{b}, \tilde{A}, \tilde{C}$ به‌ترتیب حاشیه‌های $w_{\tilde{X}}, w_{\tilde{b}}, w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{C}}$ و ماتریس فازی و یا بردار اعداد فازی باشند. با دو رابطه اصلی

$$\delta = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(\overline{u}(r) - \underline{u}(r)\right)(1-r)\,dr$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\overline{u}(r) + \underline{u}(r)\right)dr$$

را که نزدیک‌ترین اعداد فازی مثلثی متقارن به $\left(x_{0_{\tilde{C}\tilde{X}}}, \delta_{\tilde{C}\tilde{X}}\right), \left(x_{0_{\tilde{A}\tilde{X}}}, \delta_{\tilde{A}\tilde{X}}\right), \left(x_{0_{\tilde{b}}}, \delta_{\tilde{b}}\right)$ مقادیر $\tilde{C}\tilde{X}, \tilde{A}\tilde{X}, \tilde{b}$ هستند، به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma_{\tilde{C}\tilde{X}} = ۳/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^R(۱-r) + W_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}}(۱-r) + W_{\tilde{C}}^R W_{\tilde{X}}^R(۱-r)^۲)(۱-r)dr - ۳/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^L(r-۱)$$
$$+W_{\tilde{C}}^L C_{\tilde{X}}(r-۱) + W_{\tilde{C}}^L W_{\tilde{X}}^L(r-۱)^۲)(۱-r)dr$$
$$= ۱/۲C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^R + ۱/۲W_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}} + ۳/۸W_{\tilde{C}}^R W_{\tilde{X}}^R + ۱/۲C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^L + ۱/۲W_{\tilde{C}}^L C_{\tilde{X}} - ۳/۸W_{\tilde{C}}^L W_{\tilde{X}}^L,$$

$$x_{۰\tilde{C}\tilde{X}} = ۱/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^R(۱-r) + W_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}}(۱-r) + W_{\tilde{C}}^R W_{\tilde{X}}^R(۱-r)^۲)dr + ۱/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^L(r-۱)$$
$$+W_{\tilde{C}}^L C_{\tilde{X}}(r-۱) + W_{\tilde{C}}^L W_{\tilde{X}}^L(r-۱)^۲)dr$$
$$= C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + ۱/۴C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^R + ۱/۴W_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}} + ۱/۶W_{\tilde{C}}^R W_{\tilde{X}}^R - ۱/۴C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^L - ۱/۴W_{\tilde{C}}^L C_{\tilde{X}} + ۱/۶W_{\tilde{C}}^L W_{\tilde{X}}^L$$

و برای محدودیت‌ها داریم:

$$\sigma_{\tilde{A}\tilde{X}} = ۳/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^R(۱-r) + W_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}}(۱-r) + W_{\tilde{A}}^R W_{\tilde{X}}^R(۱-r)^۲)(۱-r)dr - ۳/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^L(r-۱)$$
$$+W_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}}(r-۱) + W_{\tilde{A}}^L W_{\tilde{X}}^L(r-۱)^۲(۱-r)dr$$
$$= ۱/۲C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^R + ۱/۲W_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}} + ۳/۸W_{\tilde{A}}^R W_{\tilde{X}}^R + ۱/۲C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^L + ۱/۲W_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}} - ۳/۸W_{\tilde{A}}^L W_{\tilde{X}}^L,$$

$$X_{۰\tilde{A}\tilde{X}} = ۱/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^R(۱-r) + W_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}}(۱-r) + W_{\tilde{A}}^R W_{\tilde{X}}^R(۱-r)^۲)dr + ۱/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^L(r-۱)$$
$$+W_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}}(r-۱) + W_{\tilde{A}}^L W_{\tilde{X}}^L(r-۱)^۲ dr$$
$$= C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + ۱/۴C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^R + ۱/۴W_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}} + ۱/۶W_{\tilde{A}}^R W_{\tilde{X}}^R - ۱/۴W_{\tilde{X}}^L - ۱/۴W_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}} + ۱/۶W_{\tilde{A}}^L W_{\tilde{X}}^L,$$

و برای اعداد سمت راست محدودیت‌ها خواهیم داشت:

$$\sigma_b = ۳/۲\int_۰^۱ (C_{\tilde{b}} + W_{\tilde{b}}^R - W_{\tilde{b}}^R r)(۱-r)dr - ۳/۲\int_۰^۱ C_{\tilde{b}} - W_{\tilde{b}}^L + W_{\tilde{b}}^L r)(۱-r)dr = ۱/۲W_{\tilde{b}}^R + ۱/۲W_{\tilde{b}}^L,$$

$$x_{۰b} = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ ((C_{\tilde{b}} + W_{\tilde{b}}^R - W_{\tilde{b}}^R r) + (C_{\tilde{b}} - W_{\tilde{b}}^L + W_{\tilde{b}}^L r))dr = C_{\tilde{b}} + ۱/۴W_{\tilde{b}}^R - ۱/۴W_{\tilde{b}}^L,$$

$C_{\tilde{C}\tilde{X}} = F_۰(\tilde{X})$ و $w_{\tilde{C}\tilde{X}} = F_۱(\tilde{X})$ در نظر گرفته می‌شود و در محدودیت‌ها خواهیم داشت: $C_{\tilde{A}\tilde{X}} = C_{\tilde{b}}, w_{\tilde{A}\tilde{X}} = w_{\tilde{b}}$. براساس رتبه‌بندی اعداد فازی می‌دانیم که برای حداکثرسازی تابع هدف مسئله باید یک مسئله حداکثرسازی برای مرکز (Core) و یک مسئله حداقل‌سازی برای حاشیه حل کنیم. همچنین می‌دانیم که ترجیح مرکز جواب نسبت به حاشیه‌ها از نوع ordinal است؛ بنابراین مسائل زیر را برای مرکز و حاشیه ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Max \quad F_۰(\tilde{X}) \\ s.t. \quad \tilde{X} \in S \end{cases}$$

$$\begin{cases} Min \quad F_۱(\tilde{x}) \\ s.t. \quad s = \left\{ \tilde{X} \middle| \tilde{A}\tilde{X} =^* \tilde{b}, C_{\tilde{X}} - W_{\tilde{X}}^L \geq ۰, \tilde{X} \in N.S.\hat{T}^n \right\} \\ C_{\tilde{C}\tilde{X}} \quad = a^* \end{cases}$$

که در آن a^* مقدار بهینه مسئله اول است

که به صورت تفصیلی به شرح زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} Max \quad C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + ١/٤C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٤W_{\tilde{C}}^{R}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{C}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} - ١/٤C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^{L} - ١/٤W_{\tilde{C}}^{L}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{C}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ s.t. \quad C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + ١/٤C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٤W_{\tilde{A}}^{R}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{A}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} - ١/٤C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{L} - ١/٤W_{\tilde{A}}^{L}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{A}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ \quad = C_{\tilde{b}} + ١/٤W_{\tilde{b}}^{R} - ١/٤W_{\tilde{b}}^{L}, \\ \quad ١/٢C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٢W_{\tilde{A}}^{R}C_{\tilde{X}} + ٣/٨W_{\tilde{A}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٢C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{L} + ١/٢W_{\tilde{A}}^{L}C_{\tilde{X}} - ٣/٨W_{\tilde{A}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ \quad = ١/٢W_{\tilde{b}}^{R} + ١/٢W_{\tilde{b}}^{L} \\ \quad C_{\tilde{x}} - W_{\tilde{X}}^{L} \geq ٠ \\ \quad W_{\tilde{X}}^{L} \geq ٠, W_{\tilde{X}}^{R} \geq ٠ \end{cases}$$

$$\begin{cases} Min \quad ١/٢C_{\tilde{c}}w_{\tilde{X}}^{R} + ١/٢W_{\tilde{C}}^{R}C_{\tilde{X}} + ٣/٨W_{\tilde{C}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٢C_{\tilde{C}}W_{\tilde{X}}^{L} + ١/٢W_{\tilde{C}}^{L}C_{\tilde{X}} - ٣/٨W_{\tilde{C}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ s.t. \quad C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + ١/٤C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٤W_{\tilde{A}}^{R}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{A}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} - ١/٤C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{L} - ١/٤W_{\tilde{A}}^{L}C_{\tilde{X}} + ١/٦W_{\tilde{A}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ \quad = C_{\tilde{b}} + ١/٤W_{\tilde{b}}^{R} - ١/٤W_{\tilde{b}}^{L}, \\ \quad ١/٢C_{\tilde{A}}W_{\tilde{b}}^{R} + ١/٢W_{\tilde{A}}^{R}C_{\tilde{X}} + ٣/٨W_{\tilde{A}}^{R}W_{\tilde{X}}^{R} + ١/٢C_{\tilde{A}}W_{\tilde{X}}^{L} + ١/٢W_{\tilde{A}}^{L}C_{\tilde{X}} - ٣/٨WL_{\tilde{A}}^{L}W_{\tilde{X}}^{L} \\ \quad = ١/٢W_{\tilde{b}}^{R} + ١/٢W_{\tilde{b}}^{L} \\ \quad C_{\tilde{X}} - W_{\tilde{X}}^{L} \geq ٠ \\ \quad W_{\tilde{X}}^{L} \geq ٠, W_{\tilde{X}}^{R} \geq ٠ \\ \quad C_{\tilde{C}\tilde{X}} = a* \end{cases}$$

$\tilde{X}^{*} = (C_{\tilde{X}^{*}}, W_{\tilde{X}^{*}}^{L}, W_{\tilde{X}^{*}}^{R})$ جواب بهینه مسئله اصلی خواهد بود، در صورتی که جواب بهینه دو مسئله اخیر باشد.

مثال عددی:

مسئله ***FFLP*** زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (١٥,٥,٢) \\ (١٦,٦,٤) \\ (١٤,٤,٣) \\ (١٢,٢,٢) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} (١٠,٢,٣) & (١١,١,٢) & (١٢,٣,١) & (١٥,٤,٢) \\ (١٤,٢,٢) & (١٨,٤,١) & (١٧,٣,٣) & (١٤,١,٤) \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} (٤١١.٧٥, & ١٤٠, & ١٦٢ \\ ٥٣٩.٥, & ١٥٤, & ٢٢٠ \end{bmatrix}$$

مسئله اول مربوط به مرکز جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad a = 14.25x_1 + 15.5x_2 + 11.75x_3 + 12x_4 - 2.92x_1' - 3x_2' - 2.83x_3' - 2.7x_4' + 4.1x_1'' + 4.7x_2'' + 4x_3'' + 3.3x''4 \\
&s.t. \quad 10.25x_1 + 11.25x_2 + 11.5x_3 + 14.5x_4 - 2.17x_1' - 2.58x_2' - 2.5x_3' - 3.08x_4' + 3x_1'' + 3.08x_2'' \\
&\quad + 3.17x_3'' + 4.08x_4'' = 411.25 \\
&\quad 14x_1 + 17.25x_2 + 17x_3 + 14.75x_4 - 3.16x_1' - 3.83x_2' - 3.75x_3' - 3.3x_4' + 3.83x_1'' + 4.66x_2'' \\
&\quad + 4.75x_3'' + 4.16x_4'' = 556 \\
&\quad 2.5x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4.25x_1' - 5.125x_2' - 4.875x_3' - 7x_4' + 6.125x_1'' + 1.25x_2'' + 6.375x_3'' + 8.25x_4'' = 151 \\
&\quad 2x_1 + 2.5x_2 + 3x_3 + 2.5x_4 - 6.25x_1' - 7.5x_2' - 7.375x_3' - 6.625x_4' + 7.75x_1'' + 9.375x_2'' + 9.625x_3'' + 8.5x_4'' = 187 \\
&\quad x_1 - x_1' \geq 0 \\
&\quad x_2 - x_2' \geq 0 \\
&\quad x_3 - x_3' \geq 0 \\
&\quad x_4 - x_4' \geq 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_1', x_2', x_3', x_4', x_1'', x_2'', x_3'', x_4'' \geq 0
\end{aligned}
$$

پس از حل این مسئله خواهیم داشت:

$$
a^* = 560, y = 0 \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} (38.14, & 10.25, & 0) \\ (0, & 0, & 3.3091) \\ (0, & 0, & 0) \\ (2.65, & 0, & 0) \end{bmatrix}
$$

بنابراین مسئله دوم به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 3.5x_1 + 5x_2 + 3.5x_3 + 2x_4 + 0.625x_1' + 0.75x_2' + 0.583x_3' + 0.25x_4' + 8.25x_1'' + 9.5x_2'' + 8.125x_3'' + 6.75x_4'' \\
&s.t. \quad 10.25x_1 + 11.25x_2 + 11.5x_3 + 14.5x_4 - 2.17x_1' - 2.58x_2' - 2.5x_3' - 3.08x_4' + 3x_1'' + 3.08x_2'' \\
&\quad + 3.17x_3'' + 4.08x_4'' = 411.25 \\
&\quad 14x_1 + 17.25x_2 + 17x_3 + 14.75x_4 - 3.16x_1' - 3.83x_2' - 3.75x_3' - 3.3x_4' + 3.83x_1'' + 4.66x_2'' \\
&\quad + 4.75x_3'' + 4.16x_4'' = 556 \\
&\quad 2.5x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4.25x_1' - 5.125x_2' - 4.875x_3' - 7x_4' + 6.125x_1'' + 1.25x_2'' + 6.375x_3'' + 8.25x_4'' = 151 \\
&\quad 2x_1 + 2.5x_2 + 3x_3 + 2.5x_4 - 6.25x_1' - 7.5x_2' - 7.375x_3' - 6.625x_4' + 7.75x_1'' + 9.375x_2'' + 9.625x_3'' + 8.5x_4'' = 187 \\
&\quad 14.25x_1 + 15.5x_2 + 11.75x_3 + 12x_4 - 2.92x_1' - 3x_2' - -2.83x_3' - 2.7x_4' + 4.1x_1'' + 4.7x_2'' + 4x_3'' + 3.3x_4'' = 560 \\
&\quad x_1 - x_1' \geq 0 \\
&\quad x_2 - x_2' \geq 0 \\
&\quad x_3 - x_3' \geq 0 \\
&\quad x_4 - x_4' \geq 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_1', x_2', x_3', x_4', x_1'', x_2'', x_3'', x_4'' \geq 0
\end{aligned}
$$

جواب به صورت $\tilde{X}^* = \begin{bmatrix} (۳۷.۴۷, & ۸.۳۳, & ۰) \\ (۰, & ۰ & ۳.۸۲) \\ (۰, & ۰, & ۰) \\ (۲.۹۷, & ۱.۱۸, & ۰) \end{bmatrix}$ خواهد بود و مقدار مسئله دوم ۲۲۶.۳۷۳۲ به‌دست می‌آید. بنابراین مقدار بهینه تابع هدف مسئله اصلی عددی فازی است و به شکل فازی (۵۶۰,۲۲۶.۳,۲۲۶.۳) خواهد بود.

۷- روش کومار و همکاران[۶، ص۸۱۷-۸۲۳]

مرحله ۱: با استفاده از روش مطرح شده در بخش قبل همه محدودیت‌های نامساوی را تبدیل به محدودیت مساوی کنید.

مرحله ۲: مسئله

$$\begin{aligned} & Maximize\,(or\ Minimize)\,(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) \\ & subject\ to: \\ & A\tilde{X} \le, =, \ge \tilde{b} \\ & \tilde{X} \text{ is a non - negative triangular fuzzy number} \end{aligned}$$

را تبدیل به

$$\begin{aligned} & Maximize\,(or\ Minimize)\,(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) \\ & subject\ to: \\ & A\tilde{X} = \tilde{b} \\ & \tilde{X} \text{ is a non - negative triangular fuzzy number} \\ & \tilde{C}^T = [\tilde{c}_j]_{۱\times n}, \tilde{X} = [\tilde{x}_j]_{n\times ۱}, A = [a_{ij}]_{m\times n}, \tilde{b} = [\tilde{b}_i] \end{aligned}$$

کنید.

مرحله ۳: $\tilde{C}^T = [\tilde{c}_j]_{۱\times n}, \tilde{X} = [\tilde{x}_j]_{n\times ۱}, \tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}, \tilde{b} = [\tilde{b}_i]$ را در مسئله **FFLP** جایگزین کنید، بنابراین مسئله **FFLP** می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & Maximize\,(or\ Minimize)\,(\sum_{j=۱}^{n} \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j) \\ & subject\ to: \\ & \sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j = \tilde{b}, \forall i = ۱,۲,\ldots,m \\ & \tilde{X} \text{ is a non - negative triangular fuzzy number} \end{aligned}$$

مرحله ٤: در صورتی که همه پارامترهای $\tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_j, \tilde{x}_j, \tilde{b}_i$ به‌ترتیب با اعداد مثلثی فازی $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (p_j, q_j, r_j), (x_j, y_j, z_j), (b_i, g_i, h_i)$ ارائه شوند، بنابراین مسئله **FFLP** به‌دست آمده در مرحله ۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
& Maximize\,(or\ Minimize) \sum_{j=1}^{n} (p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j) \\
& subject\ to: \\
& \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (b_i, g_i, h_i), \forall i = 1,2,\ldots,m \\
& (x_j, y_j, z_j) \text{ is a non-negative triangular fuzzy number}
\end{aligned}
$$

مرحله ۵ : فرض کنید $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij})$ بنابراین مسئله به‌دست آمده در مرحله ٤ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
& Maximize\,(or\ Minimize) R\left(\sum_{j=1}^{n} (p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j) \right) \\
& subject\ to: \\
& \sum_{j=1}^{n} (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij}) = (b_i, g_i, h_i), \forall i = 1,2,\ldots,m \\
& (x_j, y_j, z_j) \text{ is a non-negative triangular fuzzy number}
\end{aligned}
$$

مرحله ٦: با استفاده از عملگرهای ریاضی مسئله را می‌توان به صورت مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر نمایش داد:

$$Maximize\ (or\ Minimize)R\left(\sum_{j=۱}^{n}\left(p_j,q_j,r_j\right)\otimes\left(x_j,y_j,z_j\right)\right)$$

$$subject\ to:$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\left(m_{ij}\right)=\left(b_i\right),\forall i=۱,۲,...,m$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\left(n_{ij}\right)=\left(g_i\right),\forall i=۱,۲,...,m$$

$$\sum_{j=۱}^{n}\left(o_{ij}\right)=\left(h_i\right),\forall i=۱,۲,...,m$$

$$y_j-x_j\geq ۰,z_j-y_j\geq ۰,\forall j=۱,۲,...,n$$

مرحله ۷: جواب بهینه $\left(x_j,y_j,z_j\right)$ را با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی به‌دست آمده در مرحله ٦ بیابید.

مرحله ۸: جواب بهینه فازی را با قراردادن $\left(x_j,y_j,z_j\right)$ در $\tilde{x}_j=\left(x_j,y_j,z_j\right)$ به‌دست آورید.

مرحله ۹: مقدار بهینه فازی تابع هدف را با قرار دادن $\tilde{x}_j$ در $\sum_{j=۱}^{n}\tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j$ به‌دست آورید.

مثال عددی:

مسئله تمام فازی زیر را در نظر می‌گیریم و با روش مطرح شده حل خواهیم کرد:

$$Maximize\left(\left(۱,۲,۳\right)\otimes\tilde{x}_۱\oplus\left(۲,۳,٤\right)\otimes\tilde{x}_۲\right)$$

$$subject\ to:$$

$$\left(۰,۱,۲\right)\otimes\tilde{x}_۱\oplus\left(۱,۲,۳\right)\otimes\tilde{x}_۲\leq\left(۱,۱۰,۲۷\right)$$

$$\left(۱,۲,۳\right)\otimes\tilde{x}_۱\oplus\left(۰,۱,۲\right)\otimes\tilde{x}_۲\leq\left(۲,۱۱,۲۸\right)$$

$\tilde{x}_۱,\tilde{x}_۲$ are non - negative triangular fuzzy numbers

حل: با استفاده از مرحله ۱ مسئله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Maximize\ \left((1,2,3)\otimes \tilde{x}_1 \oplus (2,3,4)\otimes \tilde{x}_2\right)$$
$$subject\ to:$$
$$(0,1,2)\otimes \tilde{x}_1 \oplus (1,2,3)\otimes \tilde{x}_2 \oplus (1,1,1)\otimes \tilde{s}_1 = (1,10,27)$$
$$(1,2,3)\otimes \tilde{x}_1 \oplus (0,1,2)\otimes \tilde{x}_2 \oplus (1,1,1)\otimes \tilde{s}_2 = (2,11,28)$$
$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \text{ are non - negative triangular fuzzy numbers}$$

اجازه دهید $\tilde{x}_1 = (x_1, y_1, z_1), \tilde{x}_2 = (x_2, y_2, z_2), \tilde{s}_1 = (s_1, t_1, u_1), \tilde{s}_2 = (s_2, t_2, u_2)$ باشد،

بنابراین مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Maximize\ \left((1,2,3)\otimes (x_1, y_1, z_1)\oplus (2,3,4)\otimes (x_2, y_2, z_2)\right)$$
$$subject\ to:$$
$$(0,1,2)\otimes (x_1, y_1, z_1)\oplus (1,2,3)\otimes (x_2, y_2, z_2)\oplus (1,1,1)\otimes (s_1, t_1, u_1) = (1,10,27)$$
$$(1,2,3)\otimes (x_1, y_1, z_1)\oplus (0,1,2)\otimes (x_2, y_2, z_2)\oplus (1,1,1)\otimes (s_2, t_2, u_2) = (2,11,28)$$
$$(x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2),(s_1, t_1, u_1),(s_2, t_2, u_2) \text{ are non - negative triangular fuzzy numbers}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Maximize\ \mathrm{R}(x_1 + 2x_2, 2y_1 + 3y_2, 3z_1 + 4z_2)$$
$$subject\ to:$$
$$(0x_1 + x_2 + s_1, y_1 + 2y_2 + t_1, 2z_1 + 3z_2 + u_1) = (1,10,27)$$
$$(x_1 + 0x_2 + s_2, 2y_1 + y_2 + t_2, 3z_1 + 2z_2 + u_2) = (2,11,28)$$
$$(x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2),(s_1, t_1, u_1),(s_2, t_2, u_2) \text{ are non - negative triangular fuzzy numbers}$$

با استفاده از مرحله ٦ روش مطرح شده مسئله برنامه‌ریزی کاملاً فازی به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$Maximize\left(\frac{۱}{۴}\left(x_۱+۲x_۲+۴y_۱+۶y_۲+۳z_۱+۴z_۲\right)\right)$$

$$subject\ to:$$

$$۰x_۱+x_۲+s_۱=۱$$

$$x_۱+۰x_۲+s_۲=۲$$

$$y_۱+۲y_۲+t_۱=۱۰$$

$$۲y_۱+y_۲+t_۲=۱۱$$

$$۲z_۱+۳z_۲+u_۱=۲۷$$

$$۳z_۱+۲z_۲+u_۲=۲۸$$

$$y_۱-x_۱\geq ۰, z_۱-y_۱\geq ۰, y_۲-x_۲\geq ۰, z_۲-y_۲\geq ۰$$

$$,t_۱-s_۱\geq ۰, u_۱-t_۱\geq ۰, t_۲-s_۲\geq ۰, u_۲-t_۲\geq ۰$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی بالا به صورت زیر است:

$$x_۱=۲, y_۱=۴, z_۱=۶, x_۲=۱, y_۲=۳, z_۲=۵$$

با استفاده از مرحله ۶، جواب بهینه فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{x}_۱=(۲,۴,۶), \tilde{x}_۲=(۱,۳,۵)$$

از این رو با استفاده از مرحله ۷ مقدار بهینه فازی تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به صورت $(۴,۱۷,۳۸)$ به‌دست خواهد آمد.

۸- روش مؤمنی و حسین‌زاده [۷، صص ۱۷۱-۱۸۸]

مؤمنی و حسین‌زاده با این فرض که روش کومار و همکاران فقط در حالتی که مسئله دارای محدودیت‌های تساوی باشد،کاربرد دارد؛ روش پیشنهادی خود را مطرح داشته‌اند، این در حالی است که کومار و همکاران در مقاله سال ۲۰۱۰ روش حل مسائل دارای محدودیت‌های نامساوی را مطرح ساخته‌اند.

در این بخش روش مطرح شده توسط آنان را بررسی و در بخش‌های بعدی مقایسه‌ای بین آن‌ها انجام خواهیم داد. روش مطرح شده در صورتی کاربرد دارد که تمامی متغیرها و پارامترهای مدل از توزیع امکان مثلثی برخوردار باشند. در این روش استدلال می‌شود که برای تابع هدف حداکثرسازی باید تا آن جایی که ممکن است حد وسط z را بزرگ کنیم و عرض باند آن را کوچک سازیم.

بنابراین هر تابع هدف فازی به صورت دو تابع هدف قطعی حداکثرسازی و حداقل‌سازی تبدیل خواهد شد. بنابراین با یک مسئله برنامه‌ریزی دو هدفه قطعی روبه‌رو خواهیم بود. همچنین به ازای هر محدودیت فازی، دو محدودیت قطعی مربوط به حد وسط‌ها و عرض باندها اضافه می‌شود. بنابراین مسئله برنامه‌ریزی تمام فازی با یک تابع هدف فازی، n متغیر تصمیم و m محدودیت به یک مسئله برنامه‌ریزی دو هدفه قطعی با $3n$ متغیر تصمیم و $2m$ محدودیت تبدیل می‌شود. برای حل این مسئله دو هدفه می‌توان از هریک از روش‌های حل مسائل چند هدفه استفاده کرد. آن‌ها با توجه به اولویت تابع هدف مربوط به حداکثر کردن حد وسط‌ها نسبت به تابع هدف تعریف شده برای حداقل کردن عرض باندها، روش برنامه‌ریزی آرمانی با در نظر گرفتن اولویت اول برای تابع هدف اول و اولویت دوم برای تابع هدف دوم را پیشنهاد کرده‌اند.

۹- نتیجه‌گیری

روش مطرح شده توسط دهقان و همکاران برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی فقط در صورتی کاربرد دارد که عناصر ماتریس ضرایب اعداد فازی غیر منفی باشند، به عنوان نمونه مسئله زیر به دلیل وجود اعداد فازی منفی با استفاده از روش مطرح شده قابل حل نخواهد بود:

$$(2,3,4)\otimes\tilde{x}_1 \oplus (1,2,3)\otimes\tilde{x}_2 = (5,21,43)$$
$$(-1,1,2)\otimes\tilde{x}_1 \oplus (1,3,4)\otimes\tilde{x}_2 = (-6,14,34)$$

روش لطفی و همکاران زمانی کاربرد دارد که عناصر ماتریس ضرایب اعداد فازی متقارن باشند. برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی- که عناصر ماتریس ضرایب آن اعداد فازی مثلثی متقارن نیستند- در این روش نخست باید عدد فازی غیر متقارن را با نزدیک‌ترین

عدد فازی متقارن تخمین زد. با این تبدیل جواب به‌دست آمده واقعی نیست. از طرفی در این دو روش میزان محاسبه‌های ریاضی و نوع آن نسبت به روش کومار و همکاران مشکل‌تر و از کارایی کمتری برخوردار است؛ مثال با اعداد فازی منفی بالا را بار دیگر در نظر گرفته و با روش مطرح شده توسط کومار حل می‌کنیم:

$$(2x_1 + x_2, 3y_1 + 2y_2, 4z_1 + 3z_2) = (5,21,43),$$
$$(-z_1 + x_2, y_1 + 3y_2, 2z_1 + 4z_2) = (-6,14,34),$$

مسئله بالا به مسئله قطعی زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 = 5,\\
&-z_1 + x_2 = -6,\\
&3y_1 + 2y_2 = 21,\\
&y_1 + 3y_2 = 14,\\
&4z_1 + 3z_2 = 43,\\
&2z_1 + 4z_2 = 34.
\end{aligned}$$

که به روش دو مرحله‌ای قابل حل خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad (r_1 + r_2 + r_1' + r_2' + r_1'' + r_2''),\\
&\textit{subject to} \quad 2x_1 + x_2 + r_1 = 5,\\
&\qquad -z_1 + x_2 + r_2 = -6,\\
&\qquad 3y_1 + 2y_2 + r_1' = 21,\\
&\qquad y_1 + 3y_2 + r_2' = 14,\\
&\qquad 4z_1 + 3z_2 + r_1'' = 43,\\
&\qquad 2z_1 + 4z_2 + r_2'' = 34,\\
&y_1 - x_1 \geq 0, \quad z_1 - y_1 \geq 0, \quad y_2 - x_2 \geq 0, \quad z_2 - y_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

$r_1, r_2, r_1', r_2', r_1'', r_2'' \geq 0$ متغیرهای مصنوعی هستند. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی قطعی بالا به این صورت خواهد بود: $x_1 = 2, \quad y_1 = 5, \quad z_1 = 7, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 3, \quad z_2 = 5.$ و جواب فازی به این ترتیب به‌دست می‌آید: $\tilde{x}_1 = (2,5,7), \quad \tilde{x}_2 = (1,3,5).$

مزیت روش مطرح شده توسط کومار و همکاران این است که هیچ محدودیتی در مورد ماتریس ضرایب ندارد و نتایج به‌دست آمده از آن به‌طور واقعی همه محدودیت‌ها را ارضا

می‌کند. همچنین در مقایسه با روش‌های دیگر مطرح شده به آسانی در موقعیت‌های واقعی برای حل مسائل **FFLP** قابل کاربرد است.

۹-۱- مقایسه روش کومار و همکاران با روش مؤمنی و حسین‌زاده

از بین روش‌های مطرح شده تنها دو روش کومار و مؤمنی و حسین‌زاده قابلیت کاربرد در حالت‌های مختلف را دارند؛ برای مقایسه بین این دو روش مثال عددی با محدودیت‌های تساوی در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده را در نظر می‌گیریم:

$$MaxZ = (2,1,1) \otimes (x_{1m}, w_1, w_1') \oplus (3,1,1) \otimes (x_{2m}, w_2, w_2')$$
$$s.t: (1,1,1) \otimes (x_{1m}, w_1, w_1') \oplus (2,1,1) \otimes (x_{2m}, w_2, w_2') = (10,8,14)$$
$$(2,1,1) \otimes (x_{1m}, w_1, w_1') \oplus (1,1,1) \otimes (x_{2m}, w_2, w_2') = (8,7,13)$$

که براساس روش پیشنهادی مؤمنی و حسین‌زاده به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$Max\, 2x_{1m} + 3x_{2m}$$
$$\min 2x_{1m} + 2x_{2m} + 2w_1 + 2w_1' + 3w_2 + 3w_2'$$
$$subject.to:$$
$$x_{1m} + 2x_{2m} = 10$$
$$x_{1m} + x_{2m} + 1w_1 + 2w_2 = 8$$
$$x_{1m} + x_{2m} + 1w_1' + 2w_2' = 14$$
$$2x_{1m} + x_{2m} = 8$$
$$x_{1m} + x_{2m} + 2w_1 + w_2 = 7$$
$$x_{1m} + x_{2m} + 2w_1' + w_2' = 13$$
$$x_{1m} - w_1 \geq 0, x_{2m} - w_2 \geq 0$$

جواب ارائه شده در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده به روش پیشنهادی به طور ناصحیح ارائه شده است، زیرا جواب $(x_{1m}, w_1, w_1') = (2,0,0), (x_{2m}, w_2, w_2') = (4,1,0)$ در محدودیت‌های سوم و ششم صدق نمی‌کند. جواب صحیح با روش مؤمنی و حسین‌زاده به صورت $(x_{1m}, w_1, w_1') = (2,0,2), (x_{2m}, w_2, w_2') = (4,1,3)$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه مقدار $\tilde{z}^*$ با استفاده از ضرب اعداد مثلثی LR $z = (16,9,19)$ به‌دست می‌آید. با مقایسه جواب به دست آمده با جواب روش کومار و همکاران، یعنی مقادیر

$(x_{۱m}, w_۱, w'_۱) = (۲,۱,۱), (x_{۲m}, w_۲, w'_۲) = (٤,۲,۲)$ و مقدار $z = (۱٦,۱٤,۱٤)$ که به اشتباه در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده $z = (۱٦,۱۲,۱۷)$ عنوان شده ملاحظه می‌شود که به لحاظ دقت مربوط به کاهش عرض باندها، تفاوت چندانی بین دو روش وجود ندارد.

حال مثال دارای محدودیت‌های نامساوی مطرح شده در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده را به روش کومار و همکاران حل خواهیم کرد تا نتایج را با هم مقایسه کنیم. از آن جایی که در روش کومار و همکاران از اعداد فازی مثلثی معمولی استفاده شده ولی در روش مؤمنی و حسین‌زاده از اعداد فازی مثلثی LR استفاده شده است، بنابراین نخست پارامترها و متغیرهای مثال ارائه شده را تبدیل به حالت مثلثی معمولی می‌کنیم که مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$Max z = (۱,٦,۹) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۲,۳,۸) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲)$$
$$s.t: (۲,۳,٤) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۱,۲,۳) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲) \precsim (٦,۱٦,۳۰)$$
$$(-۱,۱,۲) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۱,۳,٤) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲) \precsim (۱,۱۷,۳۰)$$

با استفاده از متغیرهای کمکی فازی به روش کومار خواهیم داشت:

$$Max z = (۱,٦,۹) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۲,۳,۸) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲)$$
$$s.t: (۲,۳,٤) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۱,۲,۳) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲) \oplus (۱,۱,۱) \otimes (s_۱, t_۱, u_۱) = (٦,۱٦,۳۰)$$
$$(-۱,۱,۲) \otimes (x_۱, y_۱, z_۱) \oplus (۱,۳,٤) \otimes (x_۲, y_۲, z_۲) \oplus (۱,۱,۱) \otimes (s_۲, t_۲, u_۲) = (۱,۱۷,۳۰)$$

درنتیجه با انجام اعمال ضرب و جمع اعداد فازی و با استفاده از تابع رتبه‌بندی برای تابع هدف خواهیم داشت:

$$\max R(x_۱ + ۲x_۲, ٦y_۱ + ۳y_۲, ۹z_۱ + ۸z_۲)$$
$$s.t: (۲x_۱ + x_۲ + s_۱, ۳y_۱ + ۲y_۲ + t_۱, ٤z_۱ + ۳z_۲ + u_۱) = (٦,۱٦,۳۰)$$
$$(-z_۱ + x_۲ + s_۲, y_۱ + ۳y_۲ + t_۲, ۲z_۱ + ٤z_۲ + u_۲) = (۱,۱۷,۳۰)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\max \tfrac{1}{4}\left(x_1 + 2x_2 + 12y_1 + 6y_2 + 9z_1 + 8z_2\right)\\
&s.t:\\
&2x_1 + x_2 + s_1 = 6\\
&3y_1 + 2y_2 + t_1 = 16\\
&4z_1 + 3z_2 + u_1 = 30\\
&-z_1 + x_2 + s_2 = 1\\
&y_1 + 3y_2 + t_2 = 17\\
&2z_1 + 4z_2 + u_2 = 30\\
&y_1 - x_1 \geq 0\\
&z_1 - y_1 \geq 0\\
&t_1 - s_1 \geq 0\\
&u_1 - t_1 \geq 0\\
&y_2 - x_2 \geq 0\\
&z_2 - y_2 \geq 0\\
&t_2 - s_2 \geq 0\\
&u_2 - t_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

با حل مدل خواهیم داشت:

$$(x_1, y_1, z_1) = (0.79, 2.39, 3.41), (x_2, y_2, z_2) = (4.41, 4.41, 5.45)$$

مقدار $\tilde{z}^*$ به روش ضرب اعداد فازی استفاده شده در روش کومار برابر با $\tilde{z}^* = (9.61, 27.57, 74.29)$ به دست می‌آید؛ برای مقایسه با روش مؤمنی و حسین‌زاده جواب به دست آمده را به صورت LR تبدیل می‌کنیم:

$$(x_{1m}, w_1, w_1') = (2.39, 1.6, 1.02), (x_{2m}, w_2, w_2') = (4.41, 0, 1.04)$$

با قاعده ضرب پیشنهادی در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده مقدار $\tilde{z}^*$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{z}^* = (27.57, 25.96, 38.46)$$

در مقاله مؤمنی و حسین‌زاده مقدار جواب ارائه شده است :

$$(x_{1m}, w_1, w_1') = (5.33, 0, 1.27), (x_{2m}, w_2, w_2') = (0, 0, 4.76)$$

برای حالت تساوی محدودیت‌ها محاسبه شده است البته جواب صحیح در این حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$(x_{۱m}, w_۱, w'_۱) = (۵.۳۳,۱.۲۷,۱۰),(x_{۲m}, w_۲, w'_۲) = (۰,۰,٤.٧٦)$$

که به اشتباه جابه‌جا نوشته شده در صورتی که به صورت صحیح حالت نامعادله‌ای محدودیت‌ها را در نظر بگیریم؛ جواب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x_{۱m}, w_۱, w'_۱) = (۵.۳۳,۰,۰),(x_{۲m}, w_۲, w'_۲) = (۰,۰,٦.٦٦)$$

و مقدار $\tilde{z}^*$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{z}^* = (۳۱.۹۸,۲٦.٦۵,۳۵.۹۷)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود مقدار جواب بهینه با مقدار $\tilde{z}^* = (۲۷.۵۷,۲۵.۹٦,۳۸.٤٦)$ در روش کومار متفاوت است.

هر چند روش مؤمنی و حسین‌زاده مستلزم حل مسئله‌ای دو هدفه و مستلزم حل با محدودیت‌هایی با تعداد دو برابر می‌باشد و روش کومار و همکاران از سادگی بیشتری برخوردار است؛ برای مثال با محدودیت‌های نابرابر به دلیل max بودن تابع هدف، روش مؤمنی و حسین‌زاده که مقدار $\tilde{z}^*$ بزرگ‌تری ارائه داده، بهتر به نظر می‌رسد.

در انتها خلاصه‌ای از مقایسه بین روش‌ها در جدول زیر ارائه می‌شود:

شاخص‌های مقایسه روش‌ها	نوع ضرایب	نوع جواب	میزان محاسبه‌ها	کارایی
روش دهقان	مثبت	واقعی	زیاد	کم
روش لطفی	متقارن	تقریبی	بسیار زیاد	بسیار کم
روش کومار	مثبت و منفی	واقعی	کم	بالا
روش مومنی	مثبت و منفی	واقعی	زیاد	کم

۱۰- پی‌نوشت‌ها

1. Fully Fuzzy Linear Systems

۱۱- منابع

[1] Bellman R.E., Zadeh L.A.; "Decision making in a fuzzy environment", *Management Science*, Vol. 17, pp. 141-164, 1970.

[2] Allahviranloo T., Lotfi F. H., Kiasary M. Kh., Kiani N. A., Alizadeh L.; "Solving fully fuzzy linear programming problem by ranking function"; *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, pp. 19-32, 2008.

[3] Kumar A., Kaur J., Singh P.; "Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints"; *International Journal of Mathematical and Computer Sciences*, 6:1, pp. 37-41, 2010.

[4] Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M.; "Computational methods for solving fully fuzzy linear systems"; *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 179, pp. 328-343, 2006.

[5] Lotfi F. H., Allahviranloo T., Jondabeh M. A., Alizadeh L.; "Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution"; *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 3151-3156, 2009.

[6] Kumar A., Kaur J., Singh P.; A new method for solving fully fuzzy linear programming problems; *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, pp. 817-823, 2011.

[7] Momeni M., Hosseinzadeh M.; "A new method for solving fully fuzzy linear programming problems using fuzzy ranking concept", *Journal of Management Research in Iran*, Vol. 16, pp. 171-188, 2013.