**فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال نهم، شماره ۲۴، بهار ۹۱**
**صفحات ۴۵ تا ۶۵**

# روشی جدید برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره

**مقصود امیری** *
**محسن رحیمی مزرعه شاهی** **
**حمید تابلی** ***

## چکیده

این مقاله روشی جدید برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره ارائه می‌کند. این روش بر اساس تعریف هندسی خاصی از گزینه‌ها و با منطق ریاضی ساده اما قوی و مستدل طراحی شده است. یکی از مهم‌ترین و مشخص‌ترین مزایای این روش قابل فهم بودن محتوا و سادگی فرآیند و الگوریتم آن می‌باشد. محاسبات این روش با توجه به نگاه جدیدی که از لحاظ هندسی به این‌گونه مسائل می‌شود پیچیدگی و تنوع چندانی نداشته و از دیگر مزایای آن می‌توان به این نکته اشاره کرد که به راحتی امکان نمایش ترسیمی مسئله وجود دارد و علیرغم اکثر روش‌های حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره که تنها دارای مدل ریاضی بوده و داشتن مدل ترسیمی برای آن روش‌ها فرایند پیچیده و مشکلی است، در این روش مدل ترسیمی به سادگی رسم شده و با یک منطق مستدل هندسی می‌توان فرایند این روش را نمایش داد.

---

* استادیار گروه مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی تهران، ایران
** مدیر اجرایی شرکت پژوهش پویان ماندگار، تهران، ایران (نویسنده مسئول)m.rahimi.m@gmail.com
*** عضو هیأت علمی دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

**تاریخ دریافت: ۸۸/۸/۱۹** **تاریخ پذیرش: ۸۹/۳/۳**

**واژگان کلیدی:** تصمیم‌گیری، مسائل چند معیاره، روش‌های رتبه‌بندی

**مقدمه**

تصمیم‌گیری چند معیاره[1] را می‌توان مجموعه‌ای از روش‌ها و رویه‌هایی تعریف نمود که سعی دارند بر روی چندین شاخص یا معیار اغلب ناسازگار، تحلیلی مناسب جهت انتخاب یک گزینه انجام دهند. تصمیم‌گیری چند معیاره اساساً شامل دو شاخه بهینه‌سازی چند معیاره و تحلیل تصمیم چند معیاره[2] است. در حالی که تمرکز تصمیم چند معیاره بر مسائل چند معیاره‌ای با تعداد کمی گزینه و تحت شرایط عدم اطمینان است، بهینه‌سازی چند معیاره مسائلی را پوشش می‌دهد که در یک ساختار برنامه نویسی ریاضی قابل حل بوده و تعداد اهداف آنها بیش از یکی است.

از دهه ۶۰ این مبحث علمی آغاز شده و همچنان در حال تولید علم است و تعداد زیادی تئوری و الگوریتم در مقاله‌ها و کتاب‌های گوناگون ارائه شده است. درک سهم خاص این بحث در توسعه مسئله پژوهش عملیاتی و به ویژه حوزه تصمیم‌گیری دارای اهمیت فراوانی است. در بحث تحلیل تصمیم چند معیاره این مسئله مطرح است که مقایسه بین کنش‌های بالقوه باید جامع و فراگیر بوده و همه معیارها را در نظر بگیرد. به همین منظور روش‌های مختلفی برای دسترسی به این هدف پیشنهاد شده‌اند. از اولین نظریه‌های اواخر قرن ۱۹ میلادی که توسط پارتو پیشنهاد و توسعه یافت تا امروز، بسیاری از سیستم‌های پشتیبانی تصمیم از ترکیب روش‌های مختلف به منظور مواجهه با اهداف متناقض استفاده می‌کنند.

موضوعی که بهینه‌سازی چند معیاره مطرح می‌کند انتخاب تصمیمی مناسب از بین تعدادی گزینه با در نظر داشتن چندین معیار و یا تابع هدف است. لذا این مطلب که مبدأ و خاستگاه این بحث تئوری اقتصاد بوده، تعجب آور نیست. اولین تلاش‌ها به اواخر قرن ۱۹ و زمانی باز می‌گردد که تئوری مطلوبیت و رفاه اقتصادی برای اولین بار مطرح گردید.

ادورس[۵]، توابع مطلوبیت و منحنی‌های بی‌تفاوتی را که توسط پارتو[۱۴] به منظور

1- Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
2- Multiple Criteria Decision Analysis (MCDA)

تعریف تعادل اقتصادی مورد استفاده قرار گرفت، معرفی نمود. امروزه به این نقطه تعادل در اصطلاح بهینه محلی پارتو گفته می‌شود. از آن زمان تئوری مطلوبیت به عنوان شاخه‌ای از علم اقتصاد مطالعه و توسعه یافت. از دیدگاه ریاضی، بهینه‌سازی چند معیاره یا همان بهینه‌سازی برداری بر تعیین عناصر حداکثر کننده (یا حداقل کننده) از مجموعه‌های رتبه‌ای تمرکز دارد. به همین جهت شاید به نوعی بتوان زادگاه بهینه‌سازی چند معیاره را در کارهای کانتور[۲] دنبال کرد.

با این وجود شاخه بهینه‌سازی چند معیاره بسیار جوان و نوین است. برای اولین بار در کارهای کوپمن[۱۱] به اصطلاح موثر[1] اشاره شده است. کان و تاکر[۱۳] مسئله بزرگترین بردار را معرفی کردند. مطالعات ریاضی در این زمینه با کار روی این مسئله در فضای برداری هندسه غیر کمّی توسط هارویکس[۷] صورت گرفت. یک دهه پس از تعریف مسئله بزرگترین بردار جنبه‌های الگوریتمی آن برای اولین بار توسط چارنز و کوپر[۴] مطرح گردید. سپس اصول برنامه‌ریزی هدف در این زمینه مطرح شد که امروزه آن را شاخه‌ای مجزا از پژوهش عملیاتی به شمار می‌آورند. در سال ۱۹۶۸ مفهوم رتبه‌بندی و روش تصمیم‌گیری چند معیاره گسسته الکتری[2] [۱۵] به‌طور جامع مطرح شد. اولین روش‌های تعاملی یعنی روش استم[3] [۱] و روش جیوفریون – دایر – فینبرگ [۶] در دهه ۷۰ مطرح شدند.

در اوایل دهه ۷۰ مطالعاتی برای طرح روش‌های ترسیمی به منظور حل مسائل چند معیاره و چند هدفه صورت گرفت. با توجه به محدودیت ابعاد در نمایش گزینه‌ها، مشکل اصلی نحوه ساخت یک فضای دو بعدی و یا سه بعدی برای نمایش داده‌هایی بود که در آن تعداد معیارها از دو و یا سه تجاوز می‌کنند. در سال ۱۹۷۲ دو روش منحنی‌های اندرو[4] و صورتک‌های چرنوف[5] برای نمایش داده‌های چند معیاره مطرح شدند[۱۲].

منحنی‌های اندرو بر اساس یک تابع سینوسی هر مشاهده را به صورت یک

1- efficient
2- ELECTRE
3- STEM
4- Andrew Curves
5- Chernoff Faces

منحنی هموار در دو بعد رسم می‌کردند. در این روش تعداد معیارها می‌تواند نامحدود باشد. چرنوف از یک صورتک انسانی برای نمایش هر مشاهده به صورت ترسیمی استفاده نمود. ساختار صورتک چرنوف شامل اجزای هندسی معمول مانند کمان‌های دایره‌ای، کمان‌های بیضوی و خطوط مستقیم بود. مقادیر معیارها به عنوان پارامترهای این اجزا مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اگرچه منحنی‌های اندرو و صورتک‌های چرنوف برای مشاهده برخی شباهت‌ها و تضادهای گزینه‌ها مناسب است، لیکن برای تفسیر ارجحیت گزینه‌ای بر گزینه دیگر مفید نمی‌باشد. در منحنی‌های اندرو هر منحنی مربوط به یک مشاهده است و منحنی‌ها به دلیل ساختار رابطه اندرو انحراف چندان زیادی را نشان نمی‌دهند. با این توصیف، تشخیص ارجحیت در آنها اغلب مشکل است. در یک صورتک چرنوف تصور مثبت از چهره ملاک مقایسه است. مشاهده حالت خنده در صورتک نشان دهنده نکته‌ای مثبت است اما پارامترهای دیگر مانند طول بینی، بزرگی و یا کوچکی چشم‌ها و ... در تصمیم گیرندگان مختلف اثر یکسانی در رابطه با مثبت و یا منفی بودن ندارد. با تمام معایب ذکر شده این دو روش پایه و اساس طرح روش‌های ترسیمی در مسائل چند هدفه را تشکیل می‌دهند.

اهمیت الگوریتم‌ها در توسعه روش‌های حل مسائل خطی چند معیاره توسط زلنی[۱۹] و ایزرمن[۹] بررسی و ارائه شدند. تئوری مطلوبیت چند شاخصه[1]، در سال ۱۹۷۶ توسط کینی و ریفا[۱۰] مطرح و مورد پسند قرار گرفت. در سال ۱۹۸۰، ساعتی کتابی درباره برنامه‌ریزی سلسله مراتبی[2] منتشر نمود[۱۶]. در پایان دهه ۷۰ و همچنین دهه ۸۰ تحقیقات و رساله‌های مختلفی در خصوص پیشرفت‌های این حوزه منتشر شد. از این کتاب‌ها می‌توان به چانکونگ و هیمز[۳] و وانگ و مسعود[۸] اشاره نمود.

دهه ۸۰ با ظهور کامپیوترها در بخش طراحی و به کارگیری روش‌ها همراه بود. به همین دلیل از مشخصه‌های تحقیقات صورت گرفته در این دهه می‌توان به افزایش سرعت الگوریتم‌ها و دیداری نمودن تعاملات بین پارامترها اشاره کرد. اولین مواجه

---
1- MAUT
2- Analytic Hierarchy Process (AHP)

بین تصمیم‌گیری چند معیاره و روش‌های فراابتکاری در سال ۱۹۸۴ توسط شافر[۱۷] با ارائه روش وگا[1] که ترکیب الگوریتم ژنتیک با مسائل چند معیاره بود، ثبت شده است. امروزه هزاران مقاله و کتاب در رابطه با تصمیم‌گیری چند معیاره وجود دارد که همچنان در حال توسعه است. تنها بین سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۲ در زمینه تصمیم‌گیری چند معیاره حدود ۱۲۱۶ مقاله، ۲۰۸ کتاب، ۳۱ مجله علمی مرتبط و ۱۴۳ کنفرانس ثبت شده‌اند[۱۸].

روش‌های رتبه‌بندی یکی از رهیافت‌های موثر در حوزه تصمیم‌گیری چند معیاره به شمار می‌روند. هدف اصلی آنها مقایسه همه گزینه‌ها به صورت جفتی با کمک روابط باینری، قطعی و یا فازی است به طوری که بتوان این گزینه‌ها را رتبه‌بندی نمود. در این رهیافت، خانواده روش‌های الکتری و پرامتی[2] بسیار شناخته شده و کاربردی هستند. با این وجود روش‌های دیگری نظیر کوالیفلکس[3]، رجیم[4]، اوریست[5]، آرگوس[6]، اوامیکس[7]، تاکتیک[8] و ملچیور[9] نیز مطرح است. اغلب این روش‌ها تعاریف و محاسباتی ارائه می‌کنند که کم و بیش با ایده اصلی روش‌های الکتری پیوند دارند. برخی از این روش‌ها بر اساس تحلیل تطابق و عدم تطابق بین رتبه‌بندی گزینه‌ها مطابق معیار مورد نظر و همچنین رتبه‌بندی آنها به‌طور جامع و کامل طراحی شده‌اند. برخی از این روش‌ها نیز برای مقایسه مستقیم هر جفت گزینه از تحلیل تطابق ـ عدم تطابق روش الکتری استفاده کرده‌اند. برخی دیگر نیز مانند مپ‌پک[10]، پراگما[11]، ایدرا[12] و پکمن[13] بر اساس چارچوب ساختاری دیدگاه مقایسه معیاری هوشمند زوجی ارائه شده‌اند.

به‌طور مطلق نمی‌توان برترین روش را تعیین کرد، زیرا هیچ کدام از روش‌های

1- VEGA
2- PROMETHEE
3- QUALIFLEX
4- REGIME
5- ORESTE
6- ARGUS
7- EVAMIX
8- TACTIC
9- MELCHIOR
10- MAPPAC
11- PRAGMA
12- IDRA
13- PACMAN

ذکر شده در بالا و روش‌های بسیار دیگری که در مراجع گوناگون از آنها نام برده شده از همه جهات بهترین نیستند. کمتر روشی وجود دارد که هم از لحاظ پایه منطقی و ریاضی دارای اساس محکمی باشد و ـ هم ساده و قابل فهم بوده و تصمیم گیرنده‌ها، با هر زمینه علمی و مهارت‌های ریاضی به سادگی فرایند حاکم بر آن را درک کنند. یکی از مشخصه‌های سادگی و قابل فهم بودن روش آن است که بتوان به نوعی مدل ریاضی را به مدل ترسیمی تبدیل نمود. اکثر افراد با روش‌های ترسیمی سریع‌تر و مفهومی‌تر یک مسئله را مدل‌سازی و الگوریتم آن را درک می‌کنند. از دیگر مشخصه‌های ساده بودن روش آن است که فرآیند و الگوریتم کلی آن، دارای محاسبات پیچیده و طولانی نباشد. روش پیشنهادی این مقاله براساس نگاه هندسی و از زاویه‌ای جدید به این مسائل نگاه می‌کند و با محاسباتی آسان برای هر گزینه مقدار عددی منحصر به فردی به دست آورده و از این عدد برای رتبه‌بندی و انتخاب بهترین گزینه کمک می‌گیرد. سعی شده است در عین حفظ بنیان هندسی قوی دو مشخصه قابلیت بیان ترسیمی مدل و داشتن محاسبات آسان نیز رعایت شود.

در این مقاله روشی برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره با استفاده از ماتریس تصمیم‌گیری، تبدیل خطی نرمالایز کردن و ماتریس ضربی ارائه می‌شود. ساختار مقاله به این صورت است که در بخش دوم فهرستی از تعاریف، علائم و اختصارات ارائه شده است. روش پیشنهادی در بخش ۳ تشریح و مثالی فرضی در بخش ۴ به کمک این روش حل شده است. در پایان به ارائه نتایج و مقایسات پرداخته شده است.

## علائم و اختصارات

$a_i$: گزینه (آلترناتیو، کاندیدا) i ام

$A_i$: مساحت فضای هندسی مربوط به $a_i$

W: ماتریس وزن معیارها

n: تعداد معیارها در یک مسئله تصمیم‌گیری چند معیاره

$\theta$: زاویه بین محورهای نسبت داده شده به هر معیار در مدل ترسیمی

S: ماتریس حاصل از ضرب عناصر ماتریس وزن در تک تک عناصر ستون مربوطه از ماتریس تصمیم‌گیری نرمالایز شده به روش تبدیل خطی

$SP_i$ : مجموع آرایه‌های بالای قطر ماتریس ضربی گزینه iام که یک ماتریس $n \times n$ است.

## رویه پیشنهادی

مسائل مورد بررسی مسائلی هستند که هدف از حل آنها رتبه‌بندی گزینه‌ها و یا انتخاب یک گزینه از بین چندین گزینه به نحوی است که بر اساس معیارهای مشخص و وزن‌های معلوم بهترین تصمیم اتخاذ شود. غالباً در این مسائل تعداد معیارها بیش از دو می‌باشد. ماتریسی را در نظر بگیرید که عنصر $X_{ij}$ آن، مقدار معین معیار jام برای گزینه iام باشد. در اصطلاح به این ماتریس، ماتریس اولیه تصمیم‌گیری گویند. برای از بین بردن اثر اندازه اعداد مربوط به معیارهای مختلف بر یکدیگر و همچنین رفع مشکل عدم یکسانی مقیاس‌ها و واحدها، ماتریس اولیه را نرمالایز می‌کنند. در این روش برای نرمالایز نمودن از روش تبدیل خطی استفاده می‌شود. نتیجه حاصل از این روش ماتریسی خواهد بود که همه اعداد آن مثبت و کوچکتر از یک هستند. برای انجام این تبدیل ابتدا نوع معیارها از لحاظ جهت مطلوبیت ارزیابی و به دو دسته max (معیارهایی که با افزایش عددی بر مطلوبیت می‌افزایند) و min (معیارهایی که با کاهش عددی بر مطلوبیت می‌افزایند) تقسیم می‌شوند. برای مثال معیارهایی چون سود، بازده، خلوص و ... از نوع معیارهای max و معیارهایی مانند هزینه، زمان خرابی، زمان آماده سازی و ... از نوع min می‌باشند. در ستون‌های مربوط به معیار از نوع max برای هر ستون بزرگترین عدد را مشخص نموده و کلیه عناصر آن ستون را بر این عدد تقسیم می‌کنند. به این ترتیب ستونی به دست می‌آید که حداقل شامل یک عدد ۱ و تعدادی عدد کوچکتر از یک خواهد بود. در ستون‌های نوع min نیز کوچکترین عدد هر ستون را انتخاب و آن عدد را بر تک تک عناصر ستون مربوطه تقسیم می‌کنند. به این ترتیب ماتریسی حاصل می‌شود که در اصطلاح به آن ماتریس نرمالایز شده تصمیم‌گیری گویند. ماتریس سطری

وزن که به صورت برداری می‌باشد، ماتریسی $1 \times n$ است که مجموع عناصر موجود در آن برابر یک است. عناصر این ماتریس وزن‌هایی هستند که هر یک از معیارها به خود می‌گیرند و به نوعی مقایسه‌ای بین اهمیت مطلوب سازی در بین معیارها است. ماتریس S ماتریسی هم بعد با ماتریس تصمیم‌گیری نرمالایز شده است که عنصر $s_{ij}$ آن از ضرب عنصر مشابه ماتریس نرمالایز شده، یعنی عنصر واقع در سطر i و ستون j، در عنصر j ام بردار وزن حاصل می‌شود.

گزینه‌ای که اعداد مربوط به آن در ماتریس نرمالایز شده تصمیم‌گیری همگی برابر یک باشند، بهترین گزینه انتخابی بوده و گزینه ایده‌آل نامیده می‌شود. زیرا دارای بالاترین مقدار در معیارهای max و کمترین مقدار در معیارهای min است. این امر در واقعیت بسیار به ندرت رخ می‌دهد و در بسیاری از موارد یک گزینه خاص در همه معیارها بهترین نیست. همین ویژگی به خصوص زمانی که تعداد معیارها زیاد باشند، منجر به احساس نیاز به تولید روش‌هایی گردید که به صورت نسبی و رتبه‌بندی گزینه‌های مختلف را بر اساس معیارها و وزن‌های مربوطه سامان‌دهی کنند.

روش پیشنهادی برای این رتبه‌بندی از منطقی هندسی و ساده استفاده می‌کند. به طوری که گزینه‌ها را بر روی n محور به صورت دو بعدی ترسیم می‌کند. زاویه بین محورها در این روش از رابطه ۱ به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{360}{n} \qquad (۱)$$

به عنوان نمونه برای تصویر هندسی گزینه‌های یک مسئله که دارای سه معیار هستند، سه محور که زاویه ۱۲۰ درجه با یکدیگر دارند، رسم می شود. عناصر سطر گزینه ایده‌آل در ماتریس تصمیم‌گیری نرمالایز شده همان‌طور که ذکر شده برابر یک هستند و همگی بیشترین مقدار را در ستون مربوط به خود دارند.

انتقال اعداد ماتریس فرضی S که دارای یک گزینه ایده‌آل است بر روی محورهای به دست آمده با روش مذکور و سپس متصل نمودن آنها به وسیله خطوط مستقیم، این واقعیت را آشکار می‌نماید که چند ضلعی حاصل از اعداد مربوط به گزینه ایده‌آل لزوماً باید بر تمام چند ضلعی‌های دیگر محاط باشد و در نتیجه

بیشترین مساحت را دارا می‌باشد. لذا این ایده که در یک مسئله واقعی بدون حضور گزینه ایده‌آل، گزینه‌ای ارجح‌تر است که مساحت چند ضلعی حاصل از آن بزرگتر باشد، ایده منطقی و مستدلی است. جالب توجه است که روش ساو[1] نیز بدون آنکه مبدعان این روش به آن اشاره نمایند، به نوعی از همین شیوه ترسیمی استفاده می‌کند، اما به جای مقایسه مساحت‌ها، مجموع طول خطوط روی محورها را مدنظر قرار داده و به کمک رتبه‌بندی این مجموع به شناسایی اولویت‌ها می‌پردازد.

## گراف‌های گوناگون مسائل دارای ٤ معیار و بیشتر

اساس روش پیشنهادی تحقیق حاضر بر چند ضلعی‌هایی استوار است که گوشه‌های آن بر روی محورهای نسبت داده شده به هر معیار قرار دارد. نکته قابل توجه آن است که برای مسائل دارای ۴ معیار و بالاتر بسته به اینکه محورها با چه ترتیبی به معیارها اختصاص یابد، تنها یک حالت جواب وجود ندارد و با افزایش معیارها، جواب‌های بیشتری را می‌توان یافت. برای نمونه در یک مسئله ۴ معیاره، سه حالت مختلف از چیدمان محورها می‌توان در نظر گرفت. تخصیص معیارهای ۱، ۲، ۳ و ۴ به (A، B، C، D) می‌تواند همانند شکل ۱ به صورت‌های (۱، ۲، ۳، ۴)، (۱، ۳، ۲، ۴) و (۱، ۲، ۴، ۳) باشد.

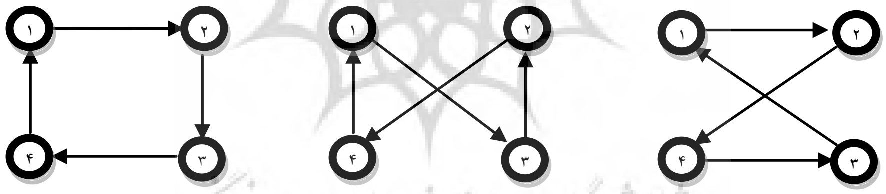

**شکل ۱ . سه حالت چیدمان محورها برای مسائل ٤ معیاره**

در نتیجه سه راه مختلف برای تخصیص محورها به ۴ معیار وجود دارد و مطمئناً جواب‌ها نیز متفاوت خواهند بود. حتی در مواردی نیز که همه حالات از لحاظ

1- SAW

رتبه‌بندی یکسان باشند، بی‌شک میزان ارجحیت گزینه‌ها متفاوت خواهد بود. به‌طور کلی در مواردی که ممکن است نتایج حاصل از رتبه‌بندی حالات مختلف چیدمان محورها یکسان نباشد، روش پیشنهادی محاسبه میانگین مساحت حالت‌های مختلف برای هر گزینه و رتبه‌بندی نهایی بر اساس این میانگین‌ها می‌باشد.

تعداد این حالات مختلف به تعداد معیارهای مسئله بستگی دارد. مسائل تک معیاره، دو معیاره و یا سه معیاره تنها دارای یک حالت هستند. برای مسائل ۴ معیاره نیز سه حالت ممکن برای چیدمان محورها وجود دارد. تعداد حالات یک مسئله n معیاره را باید بر اساس مباحث گراف‌ها جستجو کرد. یک گره برای هر معیار در نظر بگیرید. برای مثال مسئله ۴ معیاره دارای یک گراف با ۴ گره است. تعداد گراف‌های مختلفی که بتوان با این ۴ گره رسم کرد، به طوری که از یک نقطه شروع و به گره‌های دیگر کمانی رسم و از تمام گره‌ها تنها یک بار عبور کرده و در نهایت به گره اول باز گردد، همان تعداد حالات را به دست می‌دهد. از ۴ گره می‌توان سه گراف با شرایط توضیح داده شده رسم کرد. این سه گراف در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.




**شکل ۲. سه گراف ممکن برای مسائل ٤ معیاره**

این توضیح مشخص است که چرا مسائل تک معیاره، دو معیاره و سه معیاره تنها دارای یک حالت هستند. برای این‌گونه مسائل نمی‌توان چند گراف رسم کرد. جدول ۱ تعداد حالات ممکن برای مسائلی با تعداد معیارهای گوناگون را نشان می‌دهد.

**جدول ۱. تعداد حالات مختلف چیدمان محورها در مسائل n معیاره**

| تعداد معیارها | ۱ | ۲ | ۳ | ٤ | ۵ | ٦ | ... | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد حالات | ۱ | ۱ | ۱ | ۳ | ۱۲ | ٦۰ | ... | $\frac{(n-1)!}{2}$ |

همان‌طور که جدول ۱ نشان می‌دهد، برای یک مسئله n معیاره $\frac{(n-۱)!}{۲}$ حالت مختلف برای چیدمان محورها وجود دارد. به‌طور مثال برای ۶ معیار باید ۶۰ حالت مختلف را بررسی کرد:

$$\frac{(n-۱)!}{۲}=\frac{(۶-۱)!}{۲}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}{۲}=۶۰$$

مسلماً محاسبه همه حالات به ویژه برای مسائلی با تعداد معیار بالا بسیار دشوار است. با توجه به این که میانگین این $\frac{(n-۱)!}{۲}$ مساحت در رتبه‌بندی گزینه‌ها مهم است، می‌توان از یک روش ساده استفاده نمود. در ادامه این روش برای مسئله‌ای با ۴ معیار توضیح داده شده است.

مسئله‌ای با ۴ معیار را در نظر بگیرید. هر گزینه دارای ۴ مقدار است که هر یک از این مقادیر مربوط به یک معیار می‌باشند. مقادیر گزینه iام را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$[x_{i1} \quad x_{i2} \quad x_{i3} \quad x_{i4}]$$

چون ۴ معیار وجود دارد، سه حالت را می‌توان برای آن رسم نمود که مساحت این سه حالت عبارت است از:

$$A_{i1}=\frac{\sin 90}{2}[x_{i1}\times x_{i2}+x_{i2}\times x_{i3}+x_{i3}\times x_{i4}+x_{i4}\times x_{i1}]$$

$$A_{i2}=\frac{\sin 90}{2}[x_{i1}\times x_{i3}+x_{i3}\times x_{i4}+x_{i4}\times x_{i2}+x_{i2}\times x_{i1}]$$

$$A_{i3}=\frac{\sin 90}{2}[x_{i1}\times x_{i4}+x_{i4}\times x_{i2}+x_{i2}\times x_{i3}+x_{i3}\times x_{i1}]$$

میانگین این سه مساحت برابر است با:

$$A_i = \frac{A_{i1} + A_{i2} + A_{i3}}{3}$$
$$= \frac{\sin 90}{2\times 3}[x_{i1}x_{i2} + x_{i2}x_{i3} + x_{i3}x_{i4} + x_{i4}x_{i1} + x_{i1}x_{i3} + x_{i3}x_{i4}$$
$$+ x_{i4}x_{i2} + x_{i2}x_{i1} + x_{i1}x_{i4} + x_{i4}x_{i2} + x_{i2}x_{i3} + x_{i3}x_{i1}]$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود هر یک از عبارات داخل پرانتز دو بار تکرار شده‌اند. از این نکته استفاده و ماتریسی ۴ در ۴ به صورت زیر برای هر گزینه در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \\ x_{i4} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - & x_{i1}x_{i2} & x_{i1}x_{i3} & x_{i1}x_{i4} \\ - & - & x_{i2}x_{i3} & x_{i2}x_{i4} \\ - & - & - & x_{i3}x_{i4} \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

آرایه‌های این ماتریس از ضرب اعداد مربوط به هر معیار برای گزینه iام به دست می‌آیند. با توجه به اینکه ماتریس فوق از ضرب نظیر به نظیر اعداد هر گزینه به دست می‌آید، به عنوان «ماتریس ضربی» گزینه iام شناخته می‌شود. اینکه چرا تنها آرایه‌های بالای قطر این ماتریس نوشته شده به این دلیل است که در محاسبات از آرایه‌های قطری استفاده‌ای نشده و آرایه‌های پایین قطر اصلی نیز تکرار آرایه‌های بالای قطر هستند.

از آنجا که ۴ معیار وجود دارد و سه حالت می‌توان رسم کرد، در نتیجه دوازده (۴ × ۳) عبارت در فرمول میانگین وجود دارد که ۶ عبارت مختلف هر کدام دو بار تکرار شده‌اند. در نتیجه اگر عناصر بالای قطر ماتریس جمع و در ۲ ضرب شود همان عبارت داخل کروشه به دست می‌آید. این جمع ضرایب SP نامیده می‌شود. بنابراین در یک مسئله ۴ معیاره برای هر گزینه می‌توان میانگین مساحت را از رابطه ۲ به دست آورد:

$$A_i = \frac{\sin 90}{2\times 3} \times SP_i \times 2 \quad (۲)$$

به‌طور کلی رابطه محاسبه میانگین مساحت در روش پیشنهادی به صورت زیر است:

$$A_i = \frac{\sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2\times\frac{(n-1)!}{2}} \times SP_i \times (n-2)! \qquad (۳)$$

که در این فرمول $A_i$، میانگین مساحت‌های مربوط به حالات مختلف برای گزینه iام است که معیار رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها می‌باشد و $(n-۲)!$ تعداد تکرارهای هر عبارت ضربی فرمول محاسبه میانگین مساحت هر گزینه که از تقسیم تعداد عبارات ضربی بر تعداد آرایه‌های بالای قطر ماتریس ضربی به دست آمده است. برای مثال در مسائل ۴ معیاره هر عبارت ۲ بار تکرار می‌شود که با این فرمول هماهنگی دارد.

$$\frac{\frac{n\times(n-1)!}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = (n-2)! \qquad (٤)$$

## مراحل الگوریتم روش پیشنهادی

با توجه به توضیحات قبل و روابط ارائه شده با در نظر گرفتن کلیه گراف‌ها، الگوریتم حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره به کمک روش جدید به شرح زیر ارائه می‌گردد:

۱. ماتریس تصمیم‌گیری اولیه را نوشته و معیارهای کیفی را به معیارهای کمّی تبدیل کنید.
۲. ماتریس مذکور را به روش تبدیل خطی نرمالایز کنید.
۳. ماتریس S را با ضرب وزن مربوط به هر معیار در ستون اعداد مربوط به آن به دست آورید.
۴. اگر نمی‌خواهید نمای هندسی مسئله را رسم کنید، مستقیماً به مرحله ۶ بروید و در غیر این صورت به تعداد معیارها (n) محور با زاویه $\frac{360}{n}$ از یکدیگر رسم کنید.
۵. هر محور را به یک معیار نسبت داده و اعداد هر سطر ماتریس S را که مربوط به یک گزینه است، روی آن مشخص و به هم وصل کنید. برای تمام گزینه‌ها n

ضلعی مربوطه را رسم کنید.

۶. ماتریس ضربی کلیه گزینه‌ها را به دست آورید. این ماتریس یک ماتریس $n\times n$ است که تنها آرایه‌های بالای قطر اصلی دارای مقدار می‌باشند و این مقادیر از ضرب نظیر به نظیر اعداد هر گزینه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & \cdots & x_{i(n-1)} & x_{in} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \\ \vdots \\ x_{i(n-1)} \\ x_{in} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} - & x_{i1}x_{i2} & x_{i1}x_{i3} & \cdots & x_{i1}x_{i(n-1)} & x_{i1}x_{in} \\ - & - & x_{i2}x_{i3} & \cdots & x_{i2}x_{i(n-1)} & x_{i2}x_{in} \\ - & - & - & \cdots & x_{i2}x_{i(n-1)} & x_{i3}x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - & - & x_{i(n-1)}x_{in} \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

۷. آرایه‌های بالای قطر ماتریس ضربی هر گزینه را جمع و مقدار $SP_i$ برای هر گزینه به دست می‌آید.

۸. اعداد به دست آمده برای $SP_i$ها را از بزرگ به کوچک مرتب کرده و گزینه مربوط به هر $SP_i$ را مشخص کنید.

۹. گزینه‌ها را به ترتیب نزولی $SP_i$ها رتبه‌بندی کنید. گزینه دارای $SP_i$ بیشتر، ارجح است.

با توجه به محاسبات انجام شده در بخش‌های قبلی اعداد به دست آمده برای SPها را باید در معادله ۳ قرار داده و جواب را به دست آورد. اما از آن جهت که بقیه عبارات این فرمول کلی برای تمام گزینه‌ها یکسان و تنها SPها تعیین کننده می‌باشند، لذا در همین مرحله نیز می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی نمود.

## حل مثال عددی به کمک روش پیشنهادی

در این بخش یک مسئله انتخاب هواپیما در نظر گرفته شده و با استفاده از روش پیشنهادی نسبت به حل آن اقدام شده است. در مسئله انتخاب هواپیما باید چهار

گزینه $a_1$, $a_2$, $a_3$ و $a_4$ را بر اساس ۶ معیار (سرعت، ظرفیت، شتاب، هزینه، اطمینان و قدرت مانور) رتبه‌بندی نمود. ماتریس اولیه تصمیم‌گیری این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cccccc} \max & \max & \max & \min & \max & \max \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1500 & 20000 & 5.5 & 5 & 9 \\ 2.5 & 2700 & 18000 & 6.5 & 3 & 5 \\ 1.8 & 2000 & 21000 & 4.5 & 7 & 7 \\ 2.2 & 1800 & 20000 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که در سطر بالای ماتریس نیز مشخص است، همه معیارها به جز معیار هزینه (معیار چهارم) از نوع max هستند، یعنی هر چه مقدار مربوط به آن معیار برای گزینه‌ای بزرگ‌تر باشد، مطلوب‌تر است. نسبت وزن‌های این ۶ معیار به صورت زیر است:

$$w = [0.2 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3]$$

ماتریس اولیه تصمیم‌گیری مسئله با روش تبدیل خطی نرمالایز می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.56 & 0.95 & 0.82 & 0.71 & 1 \\ 1 & 1 & 0.86 & 0.69 & 0.43 & 0.56 \\ 0.72 & 0.74 & 1 & 1 & 1 & 0.78 \\ 0.88 & 0.67 & 0.95 & 0.9 & 0.71 & 0.56 \end{bmatrix}$$

مقادیر وزن در اعداد ستون مربوطه ضرب و ماتریس زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.056 & 0.095 & 0.082 & 0.142 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.086 & 0.069 & 0.086 & 0.168 \\ 0.144 & 0.074 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.234 \\ 0.176 & 0.067 & 0.095 & 0.09 & 0.142 & 0.168 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضربی گزینه اول تشکیل داده می‌شود:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 0.16 & 0.056 & 0.095 & 0.082 & 0.142 & 0.3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.056 \\ 0.095 \\ 0.082 \\ 0.142 \\ 0.3 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
- & 0.00896 & 0.0152 & 0.01312 & 0.02272 & 0.048 \\
- & - & 0.00532 & 0.004592 & 0.007952 & 0.0168 \\
- & - & - & 0.00779 & 0.01349 & 0.0285 \\
- & - & - & - & 0.011644 & 0.0246 \\
- & - & - & - & - & 0.0426 \\
- & - & - & - & - & -
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$SP_1$ از جمع آرایه‌های بالای قطر ماتریس ضربی فوق به دست می‌آید:

$$SP_1 = 0.271288$$

برای گزینه دوم نیز ماتریس ضربی به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.086 & 0.069 & 0.086 & 0.168 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.086 \\ 0.069 \\ 0.086 \\ 0.168 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}
- & 0.02 & 0.0172 & 0.0138 & 0.0172 & 0.0336 \\
- & - & 0.0086 & 0.0069 & 0.0086 & 0.0168 \\
- & - & - & 0.005934 & 0.007396 & 0.014448 \\
- & - & - & - & 0.005934 & 0.011592 \\
- & - & - & - & - & 0.014448 \\
- & - & - & - & - & -
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



$$SP_2 = 0.202452$$

برای گزینه سوم نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0.144 \\ 0.074 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.234 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.144 & 0.074 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.234 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} - & 0.010656 & 0.0144 & 0.0144 & 0.0288 & 0.033696 \\ - & - & 0.0074 & 0.0074 & 0.0148 & 0.017316 \\ - & - & - & 0.01 & 0.02 & 0.0234 \\ - & - & - & - & 0.02 & 0.0234 \\ - & - & - & - & - & 0.0468 \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

$SP_3 = 0.292468$

برای گزینه چهارم نیز ماتریس به صورت زیر است:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0.176 \\ 0.067 \\ 0.095 \\ 0.09 \\ 0.142 \\ 0.168 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.176 & 0.067 & 0.095 & 0.09 & 0.142 & 0.168 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} - & 0.011792 & 0.01672 & 0.01584 & 0.024992 & 0.029568 \\ - & - & 0.006365 & 0.00603 & 0.009514 & 0.011256 \\ - & - & - & 0.00855 & 0.01349 & 0.01596 \\ - & - & - & - & 0.01278 & 0.01512 \\ - & - & - & - & - & 0.023856 \\ - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

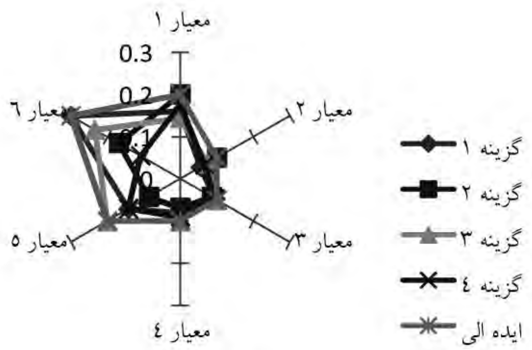
$SP_4 = 0.221833$

همان‌طور که پیش از این اشاره گردید، در همین مرحله نیز می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی نمود. با مرتب کردن SP ها رتبه‌بندی زیر به دست می‌آید:

$$a_3 \rightarrow a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_2$$

با این رتبه‌بندی مسئله حل شده است ولی فرمول کلی (معادله شماره ۳) را نیز می‌توان نوشت و SPها را در آن اعمال نمود.

در پایان برای درک ترسیمی روش حل یکی از ۶۰ حالت ممکن این مسئله در شکل ۳ نشان داده شده است.




**شکل ۳. یکی از ٦۰ حالت ممکن برای چیدمان محورها در مسئله ٦ معیاره مطالعه موردی**

به منظور مقایسه نتایج حاصل از این روش با سایر روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره، تعدادی از روش‌های شناخته شده در زمینه مسائل چند معیاره انتخاب و نتایج حاصل از به کارگیری آنها برای حل مثال عددی بالا در جدول ۲ ارائه شده است. روش‌های انتخابی عبارتند از جایگشت[1]، ساو، تاپسیس[2] و الکتری.

**جدول ۲. حل مثال عددی به کمک روش‌های جایگشت، ساو، تاپسیس و الکتری**

| روش | گزینه‌ها به ترتیب ارجحیت از چپ به راست | | | |
|---|---|---|---|---|
| جایگشت (Permutation) | A3> | A4> | A1> | A2 |
| ساو (SAW) | A3> | A1> | A2> | A4 |
| تاپسیس (TOPSIS) | A1> | A3> | A4> | A2 |
| الکتری (ELECTRE) | A3= | A1> | A4> | A2 |
| گزینه دارای بیشترین تکرار در هر ستون | A3 | A1 | A4 | A2 |
| روش پیشنهادی | A3> | A1> | A4> | A2 |

در ماتریس E استخراج شده در حل این مثال توسط روش الکتری، رابطه‌ای منطقی جهت استنتاج ارجحیت یکی از دو گزینه A3 و A1 بر دیگری قابل استخراج نیست. در نتیجه از علامت برابری در سطر مربوط به این روش در جدول ۲ استفاده

1- Permutation
2- TOPSIS

شده است. به سادگی می‌توان دریافت که هیچ دو روشی پاسخ‌های کاملاً مشابه ارائه نداده‌اند. با این وجود در مقام مقایسه می‌توان مشاهده نمود که ترتیب ارجحیت گزینه‌ها در روش پیشنهادی به گونه‌ای است که با بیشترین تکرار آن گزینه در رتبه مربوطه مطابقت دارد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای حل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره معرفی و تشریح گردید. این روش دارای منطق ریاضی و هندسی ساده اما محکمی بوده و همان‌طور که ملاحظه گردید الگوریتم و مراحل محاسباتی این روش بسیار ساده و قابل درک است. از مزایای دیگر این روش آن است که بر خلاف بسیاری از روش‌های این حوزه افزایش تعداد گزینه‌ها و یا معیارها منجر به افزایش تصاعدی محاسبات نمی‌گردد و به‌طور متناسب رشد می‌کند. روش پیشنهادی در مورد مسائلی کاربرد دارد که بتوان به همه معیارها مقدار یا کمّیتی عددی نسبت داد. از معایب این روش می‌توان به این مورد اشاره کرد که در صورت برخورد با مسائلی که دارای تعداد زیادی معیار و همچنین گزینه‌های بسیار زیاد باشند، به دست آوردن ماتریس ضربی برای تک تک گزینه‌ها به زمان زیادی نیاز خواهد داشت. البته از آنجا که فرایند به دست آوردن ماتریس ضربی بسیار ساده است و همان‌طور که مشاهده گردید تنها آرایه‌های یک گزینه دو به دو در همان آرایه‌ها ضرب می‌شود، با نوشتن یک برنامه ساده کامپیوتری به کمک نرم افزارهایی مانند Excel، VB و MATLAB می‌توان بر این مشکل فائق آمد. نکته قابل بیان دیگر این مطلب است که در این مقاله معیار ارزیابی گزینه‌ها، مساحت چند ضلعی ایجاد شده توسط آنها بود و با همین منطق می‌توان معیار محیط را نیز بررسی نموده و الگوریتم‌ها و محاسبات مربوط به آن را نیز استخراج و با این روش مقایسه کرد و یا حتی ترکیبی از هر دو را برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده نمود.

## منابع


1. Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J., and Larichev O. I., **"Linear programming with multiple objective functions: Step method (STEM)**. aa thmntt iaal Prggrmnmiggll 1()) :666˚375, 1971.
2. Cttt rr G,, eee itrgge zrr Bggrgggggg rrr trsss finitnn ee gglll err e (in Grr m))) MMaMnmtticche Allll nn: ::: ::: ˚512, 1895.
3. Ckkkkggg V,, ddd Hii mes HHH,, MMl tibbjett ive Dccisinn Making: Teerr y ddd Mtt hllll ggy,, sss vvirr iii ccce bbbliiii ng C,,, NwwYrr k, NY, 1983.
4. Crrr ees A,, ddd Cpppr ,,, MMaagmntt ddd ll s add Ittttt tial Alll ictt inns ff Lieerr Progrmmming,, Jnnn ii lyy & ,,,,, , wwYrr k, NY, 1961.
5. gggttttt t ttt tt taa tmmmtticll Pyyiii ss.. .. . egg888 8888888 8888
6. Gfff frion A,, Dyrr ,,, nnd iii nrrr g A,, nnn intercctive rrrr ccch for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an cceeemie eerrr tmttt ,, aa gggmntt iii ccc99 99)) :377˚368, 1972.
7. Hrr wizz ,,, rrr ggrmmmigg in lieerr aaaees,, In ArrwwK.,,, Hurwizz ,,, ddd Uzaaa H,, dditrr s, SStiii ss in Liaaar ddd Nnnlinaar ggggrmmmigg,, gggss 88˚102. Stanford University Press, Stanford, 1958.
8. Hwggg C. ,,, ddd aa uud A. .. ,,, MMltiple Objcctive Deii ii on Making ˚ Methods nnd Apll iaatinn , vll mne 444 of tttt rr e Ntt es in Economics and Mathematical Systems. Springer Verlag, Berlin, 1979.
9. Ieermnnn H,, iii aaare Vektrr ttt imirr ggg (in Germ))) ,, DDDtsss is, University Regensburg, 1974.
10. Keeyyy R. ,,, add Raiffa H,, cccc isisss with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-ff f , nnnn Wilyy & ,,,,, , ww York, NY, 1976.
11. Kmmmsss T. C,, aaaa lyii s ff pruuutt iss ss ss s sficiett cmmi ttt ioo of cctivitiss,, In TCC Kmmmsss , dditor, Att ivity Alll yii s ff Prcccc tinn and Allocation, number 13 in Cowles Commission Monographs, pages 33˚97. John Wiley & Sons, New York, 1951.
12. Krr nnnnn ,,, AAviaaal refrr nnee dircctinn pppraahh to oolvigg ii ccrete multiple rr itrr ia rr oll mm , pppppppn uuuraal of Oeertt iaaa l Rssaarch 34, 152˚159 (1988)

13. Kunn H... , ddd Tkkkrr A,,,, ,,,,,, ,,, r rr ggrmmmigg,, In J. Neyman, editor, Proceedings of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pages 481˚492. University of California Press, Berkeley, 1951.
14. rrr eto V,, MMaaal d ccmmmie pll itieee (in Fre)))) , .. Rggge, Lausanne, 1896.
15. Ryy B,, aaaassmnttt tt oooix nn rr ͅ eenee de ooitt s ee vee mll till e,, la mtt eeee ee CCTRE (in eeehhh),, RAAIRRO Rvvee aaaaaaise Iff rr mtt ieee e edh hhhhhreee Oprr atieeee ll(( (( (( :57˚75, 1968.
16. Saaty T. L., eee Aaalytic Hieraryyy ccccess,, Mwwww-Hill, New York, NY, 1980.
17. wwwwew J. D,, MMltiple Objcctive Ott imiztt inn with Vcctor vv ll ttt dd Geeetic Algrr itmm , DDDtsss i,, Vnnrrr ii lt Univrr ii ty, Nss vvill,, TN, 1984
18. Steuer R. E., Gardiner L. R., and Gray J., bb bbbliggraiii s srr vyy ff tee cctivitiss nnd interaatinnll ttt ure of mll tiple critrr ia ccc iii nn mkkigg,, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 5:195˚217, 1996.
19. Zll yyy ,,, LLiaaar lll tibbjcctive ggggrmmmigg,, Volmme 55 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1974.