فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال هشتم، شماره ۲۱، تابستان ۹۰
صفحات ۱۶۷ تا ۱۸۰

# ارائه یک الگوریتم برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌های حلقوی

اصغر عینی *
امیر صالحی‌پور **

## چکیده

برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو گره در شبکه‌های دارای حلقه که در آن حداقل یک حلقه وجود دارد الگوریتم فلوید ـ وارشال (Floyd-Warshall) به‌عنوان پرکاربردترین الگوریتم مطرح است. در این مقاله الگوریتم جدیدی با عنوان الگوریتم مستطیلی توسعه داده می‌شود که به‌طور قابل ملاحظه‌ای حجم محاسبات موردنیاز را نسبت به الگوریتم فلوید ـ وارشال کاهش می‌دهد. علاوه بر این، روش ارائه شده بسیار ساده‌تر و قابل فهم‌تر از الگوریتم فلوید ـ وارشال است که این خود می‌تواند به‌عنوان یک مزیت بزرگ در حوزه آموزشی محسوب شود. نحوه به‌کارگیری الگوریتم جدید در قالب مثال کوچکی بررسی می‌شود.

**واژگان کلیدی: الگوریتم فلوید ـ وارشال، الگوریتم مستطیلی، روش آبشاری تجدیدنظر شده، شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه**

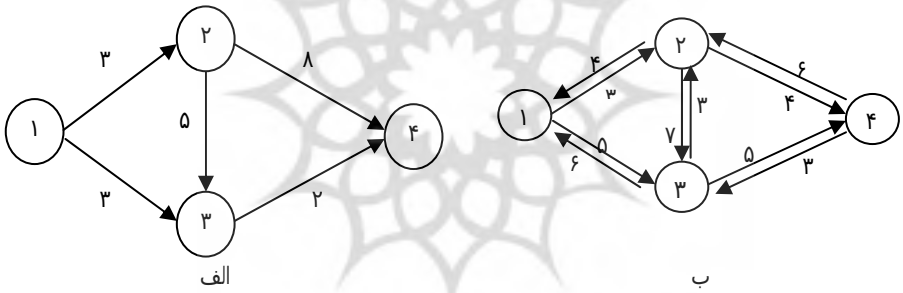


* عضو هیات علمی دانشکده مهندس کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه هوائی شهید ستاری تهران، ایران (مسئول مکاتبات)
Email: ainiasghar@yahoo.com
** عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران

**تاریخ دریافت: ۸۸/۸/۱۸** **تاریخ پذیرش: ۸۹/٤/۸**

## مقدمه

مسئله کوتاه‌ترین مسیر، یکی از مسائل معروف و پرکاربرد در تحقیق در عملیات است. در این مسئله، هدف یافتن مسیر بین دو گره از یک گراف است به‌طوری‌که مجموع وزن‌های (هزینه، زمان، فاصله و دیگر معیارها) بردارهای اتصال‌دهنده حداقل شود [۴، ۶ و ۸]. این مسئله دارای کاربردهای متنوعی در دنیای واقعی است. یکی از این کاربردها را می‌توان در یافتن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه راه‌ها نام برد (شبکه کوتاه‌ترین مسیر). شکل ۱- الف چنین شبکه‌ای (گرافی) که دارای ۴ گره و ۵ کمان (جهت حرکت بین هر دو گره) است را نشان می‌دهد. گره‌های ۱ و ۴ به ترتیب مبدا و مقصد حرکت هستند. با توجه به این شکل کوتاه‌ترین مسیر باید از گره ۳ عبور کرده و دارای هزینه ۵ باشد.




**شکل ۱. دو شبکه ساده، الف. بدون حلقه. ب. دارای حلقه**

در یک تقسیم‌بندی، شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر به شبکه‌های بدون حلقه (سیکل) و شبکه‌های دارای حلقه تقسیم می‌شوند. شکل ۱ ـ الف شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر بدون حلقه را نشان می‌دهد. شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه[1] نوع جامع و کامل‌تری از شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر هستند (شکل ۱ ـ ب). در این نوع شبکه‌ها حداقل یک حلقه وجود دارد. این نوع شبکه‌ها فاقد گره شروع و پایان مشخصی هستند و لذا هر گره می‌تواند گره شروع یا گره پایان باشد [۲]. دراین شبکه‌ها معمولا

1- Cycled Shortest Route Networks

مسیرها از هر دو گره دو طرفه می‌باشند و به همین دلیل آنها را شبکه‌های دارای حلقه می‌نامند. برای حل شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه (یافتن کوتاه‌ترین مسیر) الگوریتم‌های متفاوتی وجود دارد که الگوریتم فلوید ـ وارشال (الگوریتم آبشاری تجدیدنظرشده[1]) یکی از مهم‌ترین و پراستفاده‌ترین این الگوریتم‌ها است. برای مطالعه بیشتر در خصوص الگوریتم‌های موجود و مقایسه آنها در حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر (با حلقه و بدون حلقه) می‌توان به چرکاسکی و همکاران (۱۹۹۶) و گالو و پالوتینو (۱۹۸۸) مراجعه نمود [۵ و ۹].

علاوه بر الگوریتم‌های حل بهینه ارائه شده برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر، کاربردهای عملی مسئله بعضا منجر به توسعه الگوریتم‌های ابتکاری برای مسئله شده‌است. در این راستا می‌توان به فوا و همکاران (۲۰۰۶) رجوع نمود که در آن بررسی و مطالعه جامعی از الگوریتم‌های ابتکاری برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر آورده شده‌است [۱۱]. منظور مطالعه در ارتباط با رویکردهای بهینه به‌کارگرفته‌شده به ویژه در کاربردهای عملی می‌توان به آلتین و همکاران (۲۰۰۹) و چرکاسکی و همکاران (۱۹۹۶) رجوع نمود [۱۲ و ۵]. کلاندر و پست (۲۰۰۶) عملکرد و سرعت ۷ الگوریتم حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌های حمل و نقل واقعی (دنیای واقعی) را مقایسه نموده‌اند [۱۳].

همان‌طور که در ابتدا نیز شرح داده شد مسئله کوتاه‌ترین مسیر دارای کاربردهای متنوعی در دنیای واقعی است. گاماچه و همکاران و رویست و همکاران به دو کاربرد بسیار جالب از مسئله در حوزه معادن زیرزمینی [۱۴] و مسیریابی هواپیما [۱۵] اشاره نموده‌اند. در کاربرد اول مسئله مسیریابی و زمان‌بندی ماشین‌های معدن به‌طوری‌که در سریع‌ترین زمان بتوانند کارهای محوله را انجام دهند، به وسیله مسئله کوتاه‌ترین مسیر مدل‌سازی شده‌است. کاربرد دوم اشاره به برنامه‌ریزی ماموریت‌ها به هنگام حملات نظامی دارد. تابع هدف, حداقل‌سازی خطرات حملات موشکی و محدودیت‌ها, مصرف سوخت و زمان پرواز می‌باشند.

در این مقاله، نویسندگان شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه را مورد توجه

1- Revised Cascade Method

قرار داده و با ارائه الگوریتم جدیدی با عنوان "الگوریتم مستطیلی"، حجم محاسبات الگوریتم فلوید ـ وارشال را به‌طور قابل توجهی کاهش داده‌اند. علاوه بر این نوآوری مهم، درک و فهم الگوریتم جدید نیز بسیار آسان‌تر از الگوریتم فلوید- وارشال است. ساختار ارائه مقاله مطابق زیر است. در بخش دوم الگوریتم فلوید ـ وارشال تشریح می‌گردد. نوآوری این مقاله در بخش سوم مورد بررسی قرار می‌گیرد و الگوریتم مستطیلی به‌طور کامل شرح داده می‌شود. در بخش چهارم با ارائه مثالی عملکرد الگوریتم مستطیلی در حل شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه بررسی می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید حجم و زمان انجام محاسبات در الگوریتم مستطیلی به‌طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به الگوریتم فلوید- وارشال کاهش یافته‌است. مقاله با نتیجه‌گیری و بیان تحقیقات آتی خاتمه می‌یابد.

## الگوریتم فلوید ـ وارشال (روش آبشاری تجدیدنظرشده)

شبکه $N(V,A)$ با مجموعه گره‌های $V=\{1,2,\dots,n\}$ $(|V|=n)$ و مجموعه کمان‌های $A=\{(i,k): i,k\in V, i\neq k\}$ را در نظر بگیرید. اگر این شبکه دارای حلقه باشد الگوریتم فلوید ـ وارشال بهترین و کامل‌ترین روش در بین الگوریتم‌های موجود برای به‌دست آوردن کوتاه‌ترین فاصله و مسیر مربوط به آن بین هر دو گره دلخواه $i$ و $k$ می‌باشد [۷ و ۱۰]. این الگوریتم براساس یک فرآیند ۴ مرحله‌ای است که در آن دو ماتریس $D_j$ و $R_j$ برای $j=0,\dots,n$ محاسبه می‌شوند. این دو ماتریس به ترتیب مقادیر کوتاه‌ترین هزینه و کوتاه‌ترین مسیر (مبداء و مقصد) را در خود ذخیره می‌کنند. بنابراین، این الگوریتم کوتاه‌ترین هزینه و مسیر بین هر دو گره دلخواه در یک شبکه دارای حلقه را پس از $n+1$ مرحله نتیجه می‌دهد. باید در نظر داشت اگرچه محاسبات الگوریتم ساده است ولی به دلیل تعداد بسیار بالای این محاسبات، زمان محاسباتی الگوریتم به‌طور قابل توجهی بالا می‌باشد [۱ و ۲]. الگوریتم ۱ الگوریتم فلوید ـ وارشال را تشریح می‌نماید.

**الگوریتم ۱. الگوریتم فلوید ـ وارشال برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه**

گام ۱. اگر $n$ برابر تعداد گره‌هاي شبکه باشد، دو ماتریس مربع $n \times n$ ، $D_j$ و $R_j$ به‌ازاي $j = 0, \dots, n$ که در آن $j$ را مرحله نامند, تعریف کنید.

گام ۲. به‌ازاي $j = 0$, عناصر ماتریس‌هاي $D_0$ و $R_0$ را به‌ترتیب زیر محاسبه نمائید.

عناصر ماتریس $D_0$

| | |
|---|---|
| اگر بردار مستقیم از گره $i$ به گره $k$ وجود داشته باشد | $d_{ik}$ |
| اگر بردار مستقیم از گره i به گره $k$ وجود نداشته باشد | $\infty$ |
| اگر $i = k$ | صفر |

عناصر ماتریس $R_0$

| | |
|---|---|
| اگر بردار مستقیم از گره $i$ به گره $k$ وجود داشته باشد | $k$ |
| اگر بردار مستقیم از گره $i$ به گره $k$ وجود نداشته باشد | - |
| اگر $i = k$ | - |

گام ۳. براي $j = 1, \dots, n$ ماتریس‌هاي $D_j$ و $R_j$ را مطابق زیر محاسبه کنید.

عناصر ماتریس $D_j$

| | |
|---|---|
| اگر $i = k$ ،$i = j$ و $k = j$ | $d_{ik}$ |
| در غیر اینصورت | $\min(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk})$ |

عناصر ماتریس $R_j$

| | |
|---|---|
| اگر $i = k$ ،$i = j$ و $k = j$ | $k$ |
| اگر $d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}$ | $k$ |
| اگر $d_{ik} > d_{ij} + d_{jk}$ | $j$ |

گام ۴. گام ۳ را تا جایي انجام دهید که ماتریس‌هاي $D_n$ و $R_n$ حاصل شوند.

نکات بیشتر در خصوص حجم محاسبات الگوریتم فلوید ـ وارشال در بخش ۴ آورده شده‌است. در اینجا از آوردن جزییات بیشتر در خصوص این الگوریتم صرف‌نظر می‌شود. جهت مطالعات بیشتر می‌توان به منابع [۵ و ۹] مراجعه نمود.

## الگوریتم مستطیلی

نوآوری اصلی این مقاله، در قالب طراحی و ارائه یک الگوریتم بهینه جدید برای حل شبکه‌های کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه (یافتن کوتاه‌ترین مسیر)، در این بخش

آورده شده‌است. علاوه بر اینکه الگوریتم پیش‌رو حجم و زمان لازم برای محاسبات را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد، به‌کارگیری آن نیز بسیار آسان‌تر از الگوریتم فلوید ـ وارشال است. از طرفی دارای این مزیت است که آموزش آن بسیار آسان‌تر از الگوریتم فلوید ـ وارشال می‌باشد. توجه داشته باشید که الگوریتم مستطیلی برپایه الگوریتم فلوید ـ وارشال طراحی شده‌است، با این تفاوت مهم که الگوریتم برپایه ترسیم مجموعه‌ای از مستطیل‌ها جهت انجام محاسبات می‌باشد (به همین دلیل نام الگوریتم مستطیلی برای آن انتخاب شده‌است). الگوریتم ۲ مراحل الگوریتم مستطیلی را شرح می‌دهد.

**الگوریتم ۲. الگوریتم مستطیلی برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر دارای حلقه**

گام ۱. اگر $n$ برابر تعداد گره‌های شبکه باشد, دو ماتریس مربع $n \times n$ , $D_j$ و $R_j$ به‌ازای $j = 0, \dots, n$ که در آن $j$ را مرحله نامند, تعریف کنید.

گام ۲. ماتریس‌های $D_0$ و $R_0$ را همانند گام ۲ الگوریتم فلوید– وارشال محاسبه نمایید ($j = 0$).

گام ۳. برای $j = 1, \dots, n$ ماتریس‌های $D_j$ را مطابق زیر محاسبه کنید.

الف. اگر هر سطر / ستون در ماتریس $D_j$ شامل $\infty$ باشد، سطر / ستون مجاور آن تغییر نخواهد کرد. بنابراین مقادیر این درآیه‌ها دقیقا همانند ماتریس $D_{j-1}$ ($j \geq 1$) خواهند بود (رویه بهبود عملکرد ۱).

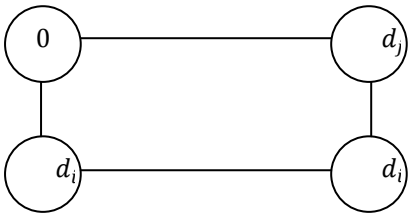
ب. اگر با به‌کارگیری بند الف. هنوز درآیه‌ای مجهول وجود داشت، توسط ترسیم مجموعه‌ای از مستطیل‌ها آنرا محاسبه کنید (مطابق شکل ۲). در حقیقت می‌توان گفت که برای محاسبه هر آرایه $d_{ik}$ از ماتریس $D_j$ یک مستطیل موردنیاز خواهد بود.

ج. ماتریس $R_j$ را مطابق مقابل محاسبه کنید. اگر درآیه‌ای در ماتریس $D_j$ تغییر نکند قطعا ماتریس $R_j$ نیز تغییر نخواهد کرد و اگر درآیه‌ای در ماتریس $D_j$ تغییر کند درآیه متناظر در ماتریس $R_j$ با $j$ جایگزین می‌شود. این مهم را با مقایسه $\min(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk})$ در ماتریس $D_j$ با $d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$ در ماتریس $R_j$ می‌توان دریافت. به‌عبارت بهتر ماتریس $R_j$ به ماتریس $D_j$ وابسته است. (رویه بهبود عملکرد ۲). توجه داشته باشید که در اینجا ماتریس $R_j$ براساس ماتریس $D_j$ محاسبه خواهد شد.

گام ٤. گام ۳ را تا جایی انجام دهید که ماتریس‌های $D_n$ و $R_n$ حاصل شوند.

## رویه ترسیم مستطیل

در هر مرحله $j$, $j = 1, \dots n$ برای هر درآیه $d_{ik}$ (سطر $i$ و ستون $k$، و به جزء صفرهای قطر اصلی)، یک مستطیل با استفاده از صفر قطر اصلی مرحله $j$ ترسیم می‌شود. همان‌طور که شکل ۲ نشان می‌دهد این صفر گوشه بالای چپ مستطیل را تشکیل می‌دهد.



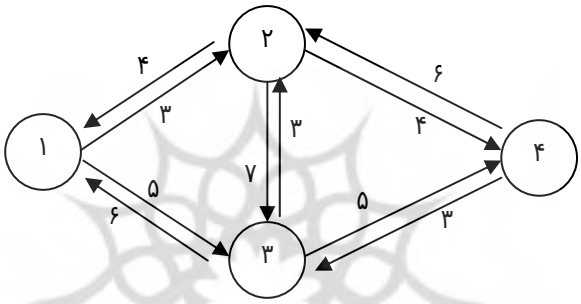

**شکل ۲. نحوه ایجاد مستطیل در الگوریتم مستطیلی. در این شکل صفر، همان صفر قطر اصلی مرحله *j* می‌باشد.**

همانند الگوریتم فلوید ـ وارشال، در الگوریتم مستطیلی نیز رابطه $d_{ik} = \min(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk})$ برقرار است. توجه داشته‌باشید که برای محاسبه درآیه $d_{ik}$ از ترسیم مستطیل کمک گرفته می‌شود. لذا نه تنها به‌کارگیری آن آسان‌تر از الگوریتم فلوید ـ وارشال است بلکه فهم و آموزش آن نیز راحت‌تر است. با توجه به اینکه در مرحله $j$، نمی‌توان با سطر و ستون این مرحله مستطیل ایجاد نمود (این گره به‌صورت زیر واسطه قرار می‌گیرد)، لذا سطر و ستون مربوطه همانند الگوریتم فلوید ـ وارشال تکرار خواهد شد.

رویه‌های بهبود عملکرد ۱ و ۲ که در بندهای ۳. الف و ۳. ب تشریح شدند به‌طور قابل توجهی حجم محاسبات را کاهش می‌دهند. لذا الگوریتم مستطیلی بسیار سریع‌تر از الگوریتم فلوید ـ وارشال عمل می‌نماید. این در حالی است که الگوریتم مستطیلی به‌خودی خود دارای منطقی ساده‌تر بوده که این امر باعث به‌کارگیری آسان‌تر الگوریتم و بهبود سرعت آن می‌شود. باید توجه داشت که با توجه به این مهم که این الگوریتم همانند الگوریتم فلوید ـ وارشال یک الگوریتم بهینه برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌های دارای حلقه می‌باشد و منجر به جواب بهینه می‌شود، لذا ضرورتی به مقایسه جواب‌های این الگوریتم با دیگر الگوریتم‌های موجود همانند الگوریتم فلوید ـ وارشال نمی‌باشد. بنابراین تنها به بررسی زمان محاسباتی این الگوریتم در مقابل الگوریتم فلوید ـ وارشال اکتفا می‌شود. این بررسی به تفصیل در بخش ۴ آورده شده‌است. در ادامه با آوردن مثالی کوچک به‌کارگیری الگوریتم مستطیلی تشریح می‌شود.

## حل مثال نمونه

شبکه کوتاه‌ترین مسیر دارای دارای حلقه که در شکل ۳ نشان داده شده‌است را در نظر بگیرید. چون $n = 4$ است, لذا دو ماتریس $D_j$ و $R_j$, به ابعاد ۴×۴ را به تعداد ۵ مرحله تکرار خواهیم نمود. به منظور نشان دادن بهتر توانایی الگوریتم مستطیلی و تعداد کم محاسبات موردنیاز این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم فلوید- وارشال، در ابتدا مسئله را با الگوریتم فلوید- وارشال حل می‌نماییم.




**شکل ۳. شبکه مربوط به مثال**

### الگوریتم فلوید ـ وارشال

این الگوریتم بدین ترتیب محاسبه می‌شود: به دنبال گام ۲ الگوریتم فلوید- وارشال ابتدا باید ماتریس‌های $D_0$ و $R_0$ را محاسبه نماییم:

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, R_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ - & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

برای محاسبه ماتریس‌های $D_1$ و $R_1$، باتوجه به این‌که $j = 1$ است مقادیر سطر و ستون ۱ تکرار خواهد شد. باید توجه کرد که قطر اصلی در کلیه مراحل ثابت خواهد ماند. با پیمودن گام ۳ الگوریتم فلوید- وارشال خواهیم داشت:

$$d_{23} = \min(d_{23}, d_{21} + d_{13}) = \min(7,4 + 5) = 7$$
$$d_{24} = \min(d_{24}, d_{21} + d_{14}) = \min(4,4 + \infty) = 4$$
$$d_{32} = \min(d_{32}, d_{31} + d_{12}) = \min(3,6 + 3) = 3$$
$$d_{34} = \min(d_{34}, d_{31} + d_{14}) = \min(5,6 + \infty) = 5$$
$$d_{42} = \min(d_{42}, d_{41} + d_{14}) = \min(6, \infty + \infty) = 6$$
$$d_{43} = \min(d_{43}, d_{41} + d_{13}) = \min(3, \infty + 5) = 3$$

بنابراین ماتریس $D_1$ مطابق زیر به‌دست خواهد آمد:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به گام ۳ الگوریتم فلوید ـ وارشال با در دست داشتن $D_1$ می‌توان $R_1$ را محاسبه نمود:

$r_{12} = k = 2$
$r_{13} = k = 3$
$r_{21} = k = 1$
$r_{23} = k = 3$
$r_{24} = k = 4$
$r_{31} = k = 1$
$r_{32} = k = 2$
$r_{34} = k = 4$
$r_{42} = k = 2$
$r_{43} = k = 3$

بنابراین ماتریس $R_1$ مطابق زیر به‌دست خواهد آمد:

$$R_1 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ - & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

کلیه محاسبات فوق به تعداد ۸ مرحله دیگر (۴ مرحله برای هر ماتریس) باید تکرار شوند. در اینجا از نشان‌دادن محاسبات ماتریس‌های $D_2$ و $R_2$، $D_3$ و $R_3$ و $D_4$ و $R_4$ صرف‌نظر می‌کنیم و تنها مقادیر این ماتریس‌ها ارائه می‌شوند:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 10 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ 2 & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ 3 & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ 3 & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

حال با در دست داشتن دو ماتریس $D_4$ و $R_4$ می‌توان فاصله و مسیر را از هرگره دلخواه $i$ به هر گره دلخواه $k$ به‌دست آورد. به‌عنوان مثال کوتاه‌ترین فاصله بین دو

گره ۱ و ۴ عبارتست از ۹ $(d_{41} = 9)$ و مسیر متناظر (کوتاه‌ترین مسیر) عبارت است از عبور از طریق گره ۳ $(r_{31} = 1$ و $r_{41} = 1)$.

## الگوریتم مستطیلی

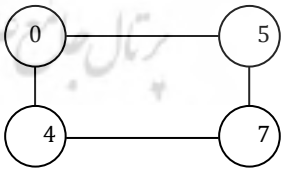
با توجه به الگوریتم مستطیلی (الگوریتم ۲)، ابتدا باید ماتریس‌های $D_0$ و $R_0$ محاسبه شوند:

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, R_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ - & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

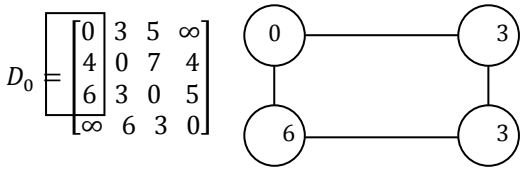
باتوجه به قدم سوم الگوریتم مستطیلی، محاسبه دیگر ماتریس‌ها (در اینجا $D_1$ و $R_1$، $D_2$ و $R_2$، $D_3$ و $R_3$ و $D_4$ و $R_4$) براساس رویه‌های بهبود عملکرد ۱ و ۲، و ترسیم مجموعه‌ای از مستطیل‌ها انجام می‌گیرد. در این بخش این الگوریتم برای محاسبه دو ماتریس $D_1$ و $R_1$ به‌طور کامل شرح داده می‌شود و برای دیگر ماتریس‌های تنها به ذکر مقادیر نهایی اکتفا می‌شود.

استفاده از رویه بهبود عملکرد ۱ باعث می‌شود تنها محاسبه درایه‌های $d_{23}$ و $d_{32}$ برای دست‌یابی به ماتریس $D_1$ کافی باشد (در حالی‌که در الگوریتم فلوید ـ وارشال باید تمامی درآیه‌ها جز قطر اصلی محاسبه شوند). چون $j = 1$ است صفر روی سطر و ستون ۱ معیار ترسیم مستطیل می‌باشد. برای محاسبه درایه $d_{23}$ مستطیلی رسم می‌شود (با استفاده از ماتریس $D_0$) که یک راس آن درایه $d_{23}$ و راس مقابل آن ۰ سطر و ستون ۱ (درایه $d_{11}$) باشد (شکل ۴).

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$




**شکل ٤. مستطیل ترسیم شده برای محاسبه $d_{23}$**




**شکل ۵. مستطیل ترسیم شده برای محاسبه $d_{32}$**

با توجه به شکل ۴ $d_{23} = \min(7,4+5) = 7$ و به‌طور مشابه $d_{32} = \min(3,6+3) = 3$ (شکل ۵). در نتیجه ماتریس زیر حاصل خواهد شد.

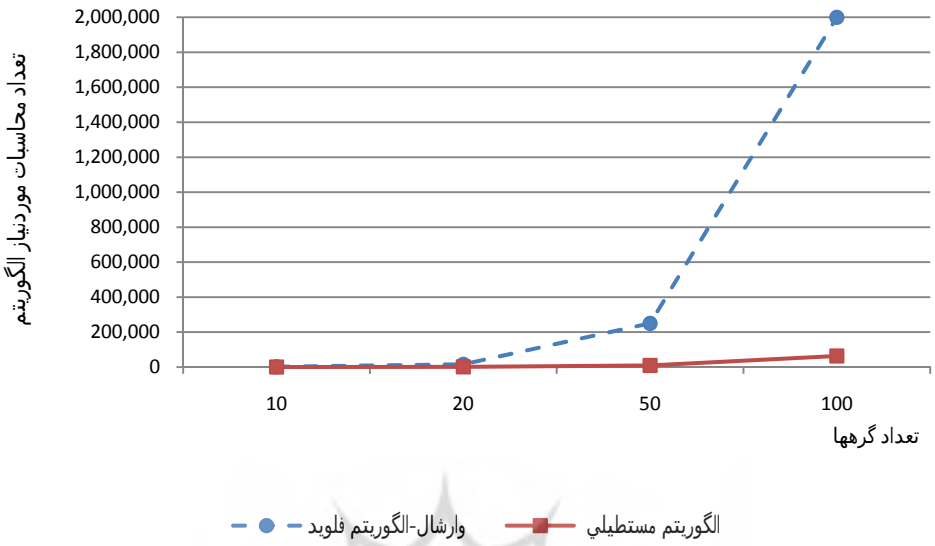
$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ 4 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

با بهره‌گیری از رویه بهبود عملکرد ۲ در محاسبه $R_1$ خواهیم داشت:

$$R_1 = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ 1 & - & 3 & 4 \\ 1 & 2 & - & 4 \\ - & 2 & 3 & - \end{bmatrix}$$

حال با دنبال نمودن مراحل فوق می‌توان به دیگر ماتریس‌های $D_2$ و $R_2$، $D_3$ و $R_3$ و $D_4$ و $R_4$ نیز دست یافت. بدیهی است مقادیر این ماتریس‌ها همانند مقادیر متناظر حاصل از الگوریتم فلوید ـ وارشال است. توجه داشته‌باشید که استفاده از رویه‌های بهبود عملکرد ۱ و ۲ معرفی شده در الگوریتم مستطیلی بسیار موثر در کاهش حجم محاسبات و بنابراین تسریع سرعت الگوریتم بوده‌اند. در الگوریتم مستطیلی نیز با در دست داشتن ماتریس‌های $D_4$ و $R_4$ می‌توان فاصله و مسیر هر گره $i$ تا هر گره $k$ را به‌دست آورد.

همان‌طور که پیش‌تر نیز به آن اشاره شد با توجه به بهینگی الگوریتم مستطیلی، حل مسائل نمونه توسط این الگوریتم و مقایسه آنها با نتایج حاصل از الگوریتم فلوید ـ وارشال ضروری به نظر نمی‌رسد. لیکن به منظور نشان‌دادن حجم محاسبات کم الگوریتم مستطیلی در مقابل الگوریتم فلوید ـ وارشال نتایج بررسی‌های شبیه‌سازی‌شده توسط نویسندگان در شکل ۶ نشان داده شده‌است.




**شکل ٦. عملکرد شبیه‌سازی شده الگوریتم‌های فلوید ـ وارشال و مستطیلی برای مسائل تا ابعاد ۱۰۰ گره**

تعداد محاسبات الگوریتم فلوید ـ وارشال برای به‌دست آوردن هر یک از ماتریس‌های $D_j$ و $R_j$، $n^2 - n$ است. از طرفی تعداد ماتریس‌های تولید شده در این الگورتیم $2(n+1)$ است. در نقطه مقابل تعداد محاسبات الگوریتم مستطیلی در بدترین عملکرد خود به اندازه تعداد محاسبات الگورتیم فلوید- وارشال خواهد بود (توجه داشته باشید که رویه‌های بهبود عملکرد ۱ و ۲ متناسب با شرایط مسئله می‌توانند منجر به کاهش بسیار چشمگیر و قابل توجهی در تعداد محاسبات لازم شوند). همان‌طور که نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد زمان الگوریتم فلوید- وارشال با افزایش اندازه مسئله به‌طور نمایی افزایش می‌یابد. در نقطه مقابل زمان الگوریتم مستطیلی با اندازه مسئله و آن‌هم نه به‌طور نمایی تغییر می‌کند.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله الگوریتم بهینه جدیدی برای محاسبه کوتاه‌ترین هزینه و مسیر در شبکه‌های دارای حلقه ارائه شده‌است. الگوریتم ارائه شده با بهبود یکی از بهترین

الگوریتم‌های موجود (الگوریتم فلوید ـ وارشال) منجر به کاهش قابل توجه حجم محاسبات و زمان حل مسئله شده‌است. پرواضح است که در مسائل بزرگ این روش بسیار کاراتر از الگوریتم فلوید ـ وارشال خواهد بود. علاوه بر این، فهم این الگوریتم نیز برای اهداف آموزشی بسیار آسان‌تر از الگوریتم فلوید- وارشال است. به‌منظور تحقیقات آتی، نویسندگان مقاله در حال مطالعه و بررسی بهبود الگوریتم مستطیلی از طریق کاهش تعداد مراحل لازم برای حصول ماتریس‌های $D_n$ و $R_n$ می‌باشند (در حال حاضر تعداد $n+1$ مرحله جهت حصول این دو ماتریس لازم است).

## منابع و مآخذ


۱. سبزه‌پرور، مجید. **کنترل پروژه (گام به گام)**. انشارات خانیران، تهران (۱۳۸۱).

۲. قاسمی، فرهاد. **کنترل پروژه**. جزوه انشارات دانشگاه صنعتی شریف، دانشگاه صنعتی شریف، (۱۳۶۷).

۳. مهرگان، محمدرضا. **پژوهش عملیاتی**. انتشارات سالکان، تهران (۱۳۷۰).

4. Bellman, R. E. **On a routing Problem**. Quarterly of Applied Mathematics. **16**(1): 87-90 (1958).
5. Cherkassky, B. V., Goldberg, A. V. and Radzik, T. **Shortest paths algorithms: Theory and experimental evaluation**. Mathematical Programming. **73**(2): 129-174 (1996).
6. Dijkstra, E. W. **A Note on Two Problems in Connection with Graphs**. Numeriskche Mathematik. **1**: 269-271 (1959).
7. Floyd, R. W. **Algorithm 97: Shortest path**. Communications of the ACM. **5**(6): 345 (1962).
8. Ford, L. R. and Fulkerson, D. R. **Flows in Networks**. Princeton University Press, Princeton, NJ (1962).
9. Gallo, G. and Pallotino, S. **Shortest Paths Algorithms**. Annals of Operations Research. **13**: 3-79 (1988).
10. Warshall, S. **A Theorem on Boolean Matrices**. Journal of the ACM. **9**(1): 11-12 (1962).
11. Fua, L., Sunb, D., and Rilett, L.R. **Heuristic shortest path algorithms for transportation applications State of the art**. Computers & Operations Research 33: 3324–3343 (2006).
12. Altin, A., Fortz, B., Thorup, M., and Umit, H. **Intra-domain traffic engineering with shortest path routing protocols**. 4OR .7 (4): 301-335 (2009)
13. Klunder, G. A., and Post, H. N. **The shortest path problem on large-scale real-road networks**, Networks, 48 (4): 182-194 (2006).
14. Gamache, M., Grimard, R., and Cohen, P. **A shortest-path algorithm for solving the fleet management problem in underground mines**, European Journal of Operational Research 166: 497–506 (2005).
15. Royset, J. O. , Carlyle, W. M., and Wood, R. K. **Routing Military Aircraft With A Constrained Shortest-Path Algorithm**, Military Operations Research, 14 (3): 31-52 (2009)