مجله دانشکده علوم اداری و اقتصاد دانشگاه اصفهان
سال سیزدهم، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۳۸۰)

مقدمه‌ای بر «نظریه ریاضی پس‌انداز - رمزی»(۱)

رحیم دلالی اصفهانی*

چکیده

این بررسی نگاهی کوتاه بر بخش‌هایی از مقاله کلاسیک و نطفه‌زای رمزی، یعنی "A Mathematical Theory of Saving" دارد. در این باره با به کارگیری کنترل بهینه، بعضی از اصول و «قاعده عمومی» (General Rule) مشهور او استخراج و معرفی می‌گردد. همچنین با توجه به یکی از مدل‌های رایج در خصوص رشد بهینه اقتصادی، ضمن نشان دادن جنبه‌ای از کاربرد قاعده عمومی رمزی در تخمین «نرخ بهینه پس‌انداز اجتماعی» و تحول اقتصاد به وضعیت ایده‌آل جامعه، گوشه‌ای از تأثیرپذیری و تطابق مدل‌های زمان حاضر از دستاوردهای وی مطرح می‌شود.

۱- کلیات

«نظریه ریاضی پس‌انداز رمزی» «یکی از شگفت‌آورترین دستاوردهای است که تاکنون در علم اقتصاد ریاضی حاصل شده؛ هم از نظر اهمیت موضوع و مشکل بودن فی‌النفسه آن، و هم به لحاظ استحکام و زیبایی روش‌های تکنیکی به کار گرفته شده و جنبه خلوص و شفافیت بیان مطلب... ».

جان مینارد کینز

به رغم این که رمزی در جوانی در گذشت (۲) خدمات عظیمی به اقتصاد، فلسفه و منطق ریاضی کرد. از سه مقاله او در زمینه اقتصاد، دو مقاله در دسترس عموم قرار دارد. مقاله

* عضو هیئت علمی گروه اقتصاد دانشگاه اصفهان.

«دستاوردی برای نظریه مالیات» (A Contribution to the Theory of Taxation, 1927) او، نظریه جدید مالیات بر کالا را به شایستگی پی‌ریزی کرد.

مقاله کلاسیک او «نظریه ریاضی پس‌انداز» که مبحث مورد نظر ما است، بنیاد تحولات عظیمی را در اقتصاد پایه‌ریزی کرد و بسیاری از پیشرفت‌های علمی بعدی را ممکن ساخت. بدون شک از نظر ترتیب زمانی، نظریه مدرن رشد اقتصادی با این مقاله شروع می‌شد.او در پاسخ به این سؤال اساسی که: «هر ملت چه مقداری باید پس انداز کند» به «قاعده عمومی» (general rule) و مهمی دست یافت که به قاعده رمزی یا قاعده کینز – رمزی (۳) شهرت دارد. این سؤال اساسی به بیان دیگر، همان تعیین نرخ بهینه رشد اقتصادی است که می‌تواند برای تخفیف یا رفع آثار منفی یکی از مهم‌ترین منابع «شکست بازار» (Market failure) در اقتصاد سرمایه‌داری به کار آید. منبع شکستی که در فضای بین زمانی (Intertemporal contex) قابل بیان است.

برای ارتقای هر چه بیش‌تر رفاه یک جامعه، تخصیص بهینه منابع ضرورت دارد؛ تخصیصی پویا با افق زمانی بلند. ملاحظات و تصمیم‌های مصرف در زمان‌های مختلف،یعنی حال و آینده توسط افراد و جامعه نقش کلیدی در تخصیص منابع بین زمانی ایفا می‌کند. از مقدار تولید شده در هر زمان، مصرف بیش تر حال به معنای پس‌انداز کم‌تر (سرمایه‌گذاری و تولید کم‌تر) و در نتیجه، مصرف و رفاه کم‌تر آیندگان است، و بالعکس. پس تصمیم به اینکه در هر زمان چه مقدار مصرف شود یا به عبارت دیگر چه مقدار پس‌انداز شود، تعیین کنندهٔ مسیرهای زمانی تولید و رفاه جامعه است.

پدیدار شدن نرخ مثبت رجحان زمانی در جامعه (ترجیح نسبی مصرف حال نسبت به آینده یا رضایتمندی از به روز کردن خوشی‌ها) به دلایلی همچون خودپسندی، بیصبری، کوتاه بینی (داشتن افق زمانی کوتاه در تصمیم‌گیری‌ها) یا کلاً حاکمیت فرهنگ مصرفی، و وجود ساختارهای نامناسب جامعه، منجر به این می‌شود که پس‌انداز اجتماعی بسیار کم‌تر از مقدار بهینه آن باشد و لذا شرایط تخصیص بهینه منابع در طول زمان مطلقاً شکل نگیرد و موجبات بروز عدم کارایی عمده فراهم گردد. این مورد در سیستم اقتصاد بازار به عنوان عمده‌ترین(٤) نوع «شکت بازار» مطرح است. در اقتصاد مبتنی بر بازار، از وظایف برنامه ریز (یا ارزیاب) اجتماعی است که نرخ بهینه پس‌انداز اجتماعی را تعیین و به عنوان پایه‌ترین معیار و راهنما در

اختیار دیگر برنامه‌ریزان و سیاستگذاران کلان اقتصادی قرار دهد تا براساس آن به تحقیقات مفصل خود پرداخته، سیاست‌گذاران اقتصادی را در اتخاذ سیاست‌های مناسب برای رفع معضل مهم فوق یاری رسانند.

نظریه ریاضی پس‌انداز رمزی با به کارگیری «اصل اولیه خنثایی» (Neutrality Postulate) و در قالب یک نظام ارزشی به خلق اثری ماندگار پرداخته و با به کارگیری روش‌های دقیق علمی ریاضی به استخراج اصول و قاعدهٔ عمومی دست یافته است. این قاعده و نتایج حاصل از آن معیارهای دقیقی را برای برنامه‌ریزان اقتصادی به منظور دستیابی به اهداف بلندمدت و تعدیل ساختار اقتصاد فراهم ساخته است.

دقایق فراوان اقتصادی و ابتکارات ریاضی همچون «طرح رمزی» (Ramsey device) در مقوله شرایط کافی برای همگرایی از دیگر ظرایف مقاله او است.

مبحث تعیین نرخ بهره درچارچوب نظریه ریاضی پس‌انداز رمزی از قابل تعمق‌ترین مباحثی است که محققان و سیاستگذاران ژرف‌نگر اقتصادی را دعوت به مطالعه آن می کند.

۲- مدل رمزی

مقاله کلاسیک رمزی در فضای تخصیص منابع پویا (بین زمانی) ترسیم شده و به دنبال تعیین نرخ بهینه سرمایه‌گذاری اجتماعی است. رمزی فرض کرد که رفاه اجتماعی بستگی به مطلوبیت حاصل از مصرف $U(C)$ و مشقت حاصل از کار (Disutility of labor) $D(L)$ دارد:

$$W=U(C)-D(L) \quad (۵)$$

در حالی که،

$$U''(C) \leq 0$$

$$D''(L) \geq 0$$

هدف برنامه‌ریز اقتصادی به حداکثر رساندن مطلوبیت اجتماعی برای کلیه نسل‌ها است:

(٦)

(۱) $= \int^{\infty}$ $-$

ولید از به کارگیری سرمایه و نیروی کار حاصل می‌شود $Q = F(K,L)$. وضعیت سکون
رای تکنولوژی و جمعیت فرض شده، و نرخ استهلاک برابر صفر است. محصول یا مصرف
ی‌شود یا پس‌انداز (تبدیل به انباشت سرمایه). بنابراین:

$$Q = C + I \qquad (۲)$$

$$Q = C + \mathring{K}$$

رمزی همچنین یک وضعیت ایده‌آل (Bliss اوج سعادتمندی) را برای جامعه
متصور شد که برنامه‌ریز تلاش دارد جامعه را بدان سو سوق دهد. این وضعیت که مترادف با
حداکثر سطح مطلوبیت قابل دستیابی (Maximum Obtainable rate of Utility)
است از اشباع سرمایه (۷) (Capital Saturation) و با اشباع مصرف(۸)
(Consumption saturation) نتیجه می‌شود.

بنابراین به جای ماکزیمم کردن معادله (۱) رمزی به مینیمم کردن عبارت زیر
پرداخت.

$$\int^{\infty} \quad - \quad -$$

۳- حل مسأله رمزی

رمزی ابتداً به تشریح اصول و برقراری معادلات لازم می‌پردازد و از سیستم معادلات
سه‌گانه به قاعده عمومی خویش دست می‌یابد. او همچنین اشاره دارد که نتایج حاصل را از
طریق کاربرد حساب تغییرات به راحتی می‌توان استخراج کرد. با توجه به کاربرد وسیع
متدهای کنترل در بهینه‌سازی پویا، نتایج رمزی را با توجه به «اصل ماکزیمم» به شرح زیر
استخراج می‌کنیم:

$$\int^{\infty} \quad - \quad - \qquad (۳)$$

با توجه به محدودیت‌های زیر:

$$\mathring{K} = F(K, L) - C \qquad (٤)$$

$\mathring{K}$ مقداری معلوم

برای این منظور، تابعی از نوع هامیلتون را برقرار می‌سازیم:

$$H = B - U(C) + D(L) + \lambda\,[F(K, L) - C] \qquad (۵)$$

شرط لازم و کافی برای بهینه‌سازی عبارت است از:

$$H_c = 0$$

$$H_k = -\mathring{\lambda}$$

شرط ترانسورسالیته (Transversality condition) عبارت است از:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t K_t = 0$$

$$Hc = 0 \Rightarrow -U'(C) - \lambda = 0$$

$$(٦) \qquad U'(C) = -\lambda$$

با گرفتن لگاریتم و مشتق زمانی خواهیم داشت:

$$(٧) \qquad \frac{\frac{\delta U'(C)}{\delta t}}{U'(C)} = -\frac{\mathring{\lambda}}{\lambda}$$

$$H_k = -\mathring{\lambda} \Rightarrow \lambda\, Fk\,(K, L) = -\mathring{\lambda}$$

$$(٨) \qquad = -\frac{\mathring{\lambda}}{\lambda}$$

با توجه به نتایج ۷ و ۸ داریم:

$$(٩) \qquad \frac{\delta\ '}{} = \frac{\delta}{'}$$

برابری فوق قاعده‌ای را به شرح زیر بیان می‌دارد:

مسیر بهینه اقتصاد، نیاز به برابری نرخ کاهش نسبی مطلوبیت نهایی و نرخ بهره واقعی (بهره‌وری نهایی سرمایه) دارد.

$$\frac{\delta\ '}{\delta} =$$

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که ادامه افزایش مصرف در صورتی موجبات افزایش مطلوبیت را فراهم می‌سازد که نرخ بهره واقعی $F_K(K,L)$ یا مطلوبیت نهایی $U'(C)$ صفر شوند. به عبارت دیگر، برای رسیدن به وضعیت ایده‌آل (Bliss) لازم است نرخ بهره واقعی صفر باشد یا به اشباع مصرف برسیم.

$$H_L = 0 \Rightarrow D'(L) + F_L(K, L) = 0$$

با توجه به رابطه ۶ داریم:

$$D'(L) = U'(C)\ F_L(K, L) \qquad (۱۰)$$

یعنی مشتق نهایی کار در هر زمان باید مساوی مطلوبیت نهایی مصرف در بهره‌وری نهایی سرمایه باشد.

با توجه به تابع هامیلتونی (۵):

$$H = B - U(C) + D(L) + \lambda\,[F(K, L) - C]$$

و نتایج به دست آمده در بالا مبنی بر این که زمانی به هدف اقتصادی مورد نظر دست یافته‌ایم که $[U(C) - D(L)]$ به B منتج شود و این در صورتی است که به اشباع سرمایه یا اشباع مصرف برسیم، یعنی:

$$U'(C) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$ (با توجه به رابطه ۶)

$$F_k(K, L) = 0$$
$$F(K, L) = C$$

یا به عبارت دیگر:

$$B - U(C) + D(L) - U'(C)\,(\overset{\circ}{K}) = 0$$

و در نتیجه:

$$\overset{\circ}{} = \frac{- \quad -}{\quad ,\quad}$$

این نتیجه به قاعده رمزی شهرت دارد: «**نرخ بهینه انباشت سرمایه (نرخ پس‌انداز) در هر لحظه از زمان با نسبت اختلاف سطح مطلوبیت موجود از سطح حداکثر مطلوبیت قابل دستیابی، به مطلوبیت نهایی برابر است**».

توابع مورد استفاده رمزی بسیار کلی است. با به کارگیری توابع مطلوبیت و تولید صریح‌تر، قاعده رمزی جنبه کاربردی بیش‌تری پیدا می‌کند. همچنین با لحاظ کردن رشد برون‌زای جمعیت و جانشین کردن حداکثر مطلوبیت قابل دستیابی با مطلوبیت ناشی از مصرف مربوط به قاعده طلایی انباشت، برنامه‌ریز به راحتی می‌تواند نرخ بهینه پس‌انداز اجتماعی را محاسبه و نرخ بهینه رشد اقتصادی را تعیین کند. مدل تعمیم یافته برای این منظور در بخش بعد توضیح داده شده است. در ادامه فقط به مواردی از استنتاجات و نظریه‌های رمزی اشاره می‌شود.

رمزی درمطالعات تئوریک و پایه‌ای خویش دریافت که نرخ پس‌انداز باید بیش از آنچه تصور می‌شود باشد. او در بررسی و مطالعه نمونه‌ای خویش بدون رشد جمعیت به نرخ ۶۰ درصد رسیده که البته با لحاظ رشد جمعیت به نرخی بالاتر خواهیم رسید. از آن پس تحقیقات وسیعی دال بر درستی و نادرستی تخمین فوق صورت پذیرفته است.

رمزی نه فقط شالوده مطالعات انباشت سرمایه بهینه و رشد بهینه اقتصادی را براساس نظام ارزشی «خنثایی» (برابری میان نسل‌ها) استوار ساخت، بلکه نظریه اثباتی پس‌انداز و نرخ بهره را نیز به دقت ارائه کرد. او به روشنی بیان می‌دارد که سطح پس‌انداز از تقاضای مصرف آینده تأثیر می‌پذیرد، در حالی که ذخیره حال سرمایه نرخ بهره را معین می‌دارد.

در متن پایانی مربوط به بخش تعیین بهره، رمزی چنین اظهار می‌دارد: نرخ بهره عمدتاً توسط قیمت تقاضا (تقاضا برای سرمایه) تعیین می‌شود و ممکن است از پاداش لازم (مثلاً سود) برای «پرهیز از مصرف (Abstinence)» بسیار بیش‌تر باشد. در ملاحظات یک دولت سوسیالیستی نیز نرخ بهره باید معقولانه‌ترین شکل استفاده از سرمایه موجود را تضمین کند، البته نه به صورت مستقیم، بلکه به عنوان شاخصی برای تعیین نرخ پس‌انداز (سهمی از درآمد که باید پس‌انداز شود).

۴- تعمیم مدل

امروزه تعمیم‌های جزئی برای تحقیقات پایه رشد بهینه اقتصادی در مدل رمزی به کار گرفته شده که به اختصار یکی از آنها را توضیح می‌دهیم.

فروض الحاقی:

- جمعیت با نرخ رشد برون‌زای η رشد می‌یابد.
- مطلوبیت با نرخ ρ تنزیل می‌یابد.
- تابع تولید دارای بازده ثابت نسبت به مقیاس بوده، شروط اینـادا (Inada Conditions) برقرار است:

$$Q_t = F(K_t, L_t) = C_t + I_t$$

$$Q_t = C_t + \overset{\circ}{K}_t$$

کلیه متغیرها را به صورت سرانه می‌نویسیم:

$$q_t = f(k_t) = c_t + \eta\ k_t + \overset{\circ}{k}_t \qquad (1)$$

تابع هدف:

$$W = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) \qquad (۲)$$

تابع هدف را نسبت به محدودیت زیر حداکثر می‌کنیم:

$$\overset{\circ}{k}_t = f(k_t) - \eta\, k_t - c_t$$

$k_0 =$ مقداری معلوم

با برقراری عبارت هامیلتونی خواهیم داشت:

$$= {}^{-\rho}\mu \quad + \lambda \quad\quad -\eta \quad - \qquad (۳)$$

شرایط لازم و کافی برای قرار گرفتن در مسیر بهینه اقتصادی به شرح زیر است:

$$H_c = 0$$

$$\overset{\circ}{H}_k = -\overset{\circ}{\lambda}_t$$

شرط ترانسورسالیته عبارت است از: $\lim_{t \to \infty} k_t \lambda_t = 0$

(٤) $\quad = \Rightarrow \; {}^{-\rho} \; \mu' \quad = \lambda$

با گرفتن لگاریتم و مشتق زمانی داریم:

$$-\rho_t + \ln \mu'(c_t) = \ln \lambda_t$$

$$-\rho + \frac{\quad}{\mu'} \mu'' \quad {}^{\circ} = \frac{\mathring{\lambda}}{\lambda}$$

با فرض:

(٦) $\quad -\frac{\mu''}{\mu'} = \sigma \quad$ (٩)

$$-\rho - \sigma \overset{\circ}{—} = \frac{\mathring{\lambda}}{\lambda}$$

$$H_k = -\lambda^{\circ}_t \Rightarrow \lambda_t [f'(k_t) - \eta] = -\lambda^{\circ}_t$$

$$' \quad -\eta = \frac{-\mathring{\lambda}}{\lambda}$$

$$\rho + \sigma \overset{\circ}{—} = \; ' \quad -\eta$$

(١١ و ١٠)

(٨) $\quad \overset{\circ}{—} = \frac{—}{\sigma} \quad ' \quad -\eta - \rho$

که رشد بهینه مصرف سرانه در وضعیت پایا را نشان می‌دهد. (٢) و (٣) آنگاه با توجه به شرط ترانسورسالیته:

$$\lim_{t \to \infty} k_t \lambda_t = 0$$

و معادله ٤ $\quad \lambda = {}^{-\rho} \quad \mu'$

...وجه می‌شود:

$$\mu' \quad ^{-\rho} =$$
$$\to \infty$$

... همان اشباع سرمایه یا مصرف است و این یعنی رسیدن به حداکثر مطلوبیت قابل دستیابی و ...رحله رشد پایا . در وضعیت رشد پایا داریم:

$$\overset{\circ}{c}_t = \overset{\circ}{k}_t = 0$$

...بر این با توجه به ۸:

$$\overset{\circ}{c}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(k) = \eta + \rho \qquad (۱۲)$$

...نی نرخ بهره واقعی (بهره‌وری نهایی سرمایه) در وضعیت مطلوب پایا برابر است با مجموع ...خ رشد جمعیت و نرخ ترجیح زمانی.

با توجه به اصل خنثایی رمزی $\rho = 0$ در این صورت قاعده بالا به صورت زیر خواهد ...د:

$$f'(k) = \eta$$
و یا
$$f'(k) - \eta = 0$$

... همان صفر بودن نرخ «بیولوژیک بهره» است.

رمزی در مدل مورد نظر خویش $\eta = 0$ فرض کرد و لذا از $f'(k) = 0$ چنین ...وجه می‌شود: از میان مسیرهای مختلف رشد اقتصادی آن مسیر بهینه است که قاعده رمزی بر ... حاکم باشد (نرخ بهره واقعی صفر باشد). فقط بر روی این مسیر سرانجام به حداکثر مصرف ...بل دستیابی، یعنی آنچه رمزی آن را اصطلاحاً «وضعیت ایده‌ال» نامید می‌رسیم.

قواعد بالا بسیار قابل توجهند؛ چون به این مطلب دلالت دارند که مآلا نرخ بهره ...قعی (بهره‌وری نهایی سرمایه) توسط رشد جمعیت و نرخ ترجیح زمانی تعیین می‌شود؛ (۱۳) ...نی رفتار بیولوژیک و رفتار مصرفی آحاد جامعه تعیین کننده نرخ بهره واقعی‌اند. این نرخ به ...وان شاخصی بسیار مهم به منظور تنظیم وضعیت اقتصادی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای حداکثر کردن رفاه جامعه از تابع $= \int^{\infty} \quad {}^{-\rho} \mu$ استفاده کردیم.

آرو و کورتز (Arrow K.J. & Kurtz M. (1970 چنین استدلال می‌کنند که لازم است تابع هدف به صورت $= \int^{\infty} \quad {}^{-\rho} \mu$ مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ زیرا آنچه به عنوان هدف مورد نظر، رفاه کل جامعه است. بنابر این با به کارگیری تابع فوق، رشد بهینه مصرف به صورت زیر خواهد شد:

$$\overset{\circ}{-} = \frac{}{\sigma} \quad ' \quad - \rho$$

در وضعیت پایا $\overset{\circ}{c} = 0 \Rightarrow f'(k_t) = \rho$

و با فرض $\rho = 0$

$$f'(k) = 0$$

یعنی نرخ بهره واقعی صفر، بالاترین رفاه قابل دستیابی را امکان‌پذیر می‌سازد (زمانی که به مرحله اشباع مصرف یا اشباع سرمایه همگرایی ایجاد شود).

نتیجه‌گیری

اقتصاد بازار در تخصیص پویا و بهینه منابع مواجه با مشکلات جدی است. وجود نرخ مثبت رجحان زمانی – و در نتیجه نرخ بهره مثبت – باعث به وجود آمدن شکافی میان نرخ پس‌انداز واقعی و نرخ بهینه اجتماعی آن می‌شود. نیروهای بازار در شرایط ایده‌آل، دستیابی به نرخ بهینه اجتماعی را امکانپذیر نمی‌سازند. تعیین این نرخ یا آنچه به مسأله رمزی (Ramsey problem) مشهور است و همچنین پیروی از قاعده مشهور رمزی – کینز در تأمین رشد بهینه اقتصادی از اساسی‌ترین معیارهای مورد نیاز برنامه‌ریزان کلان در تأثیرگذاری بر روند اقتصادی است. در این مقاله تلاش شد تا با رجوع به منبع اصلی که از پیچیدگی‌های خاص خود برخوردار است، گوشه کوچکی از ابتکارات عظیم رمزی معرفی گردد و همچنین با استفاده از روش کنترل بهینه قاعده عمومی او به صورت ساده‌تر استخراج شود. مضافاً در راستای مدل‌های رایج درون‌زای رشد با لحاظ کردن فروض الحاقی، همچون رشد برون‌زای جمعیت و نرخ ارجحیت زمانی به تعمیم مدل وی در تعیین مسیر بهینه اقتصادی پرداختیم.

ضمیمه

نمادهای مورد استفاده برای متغیرها و پارامترها به شرح زیر است:

W رفاه کل جامعه

U مطلوبیت لحظه‌ای

C مصرف

D مشقت ناشی از کار

L نیروی کار

t زمان

Q محصول کار

I سرمایه‌گذاری

— = انباشت سرمایه

K ذخیره سرمایه

B اوج سعادتمندی (حداکثر مطلوبیت قابل دستیابی)

λ ارزش سایه‌ای سرمایه (متغیر کمکی مربوط به متغیر وضعیتی K)

——— = (مطلوبیت نهایی ناشی از مصرف)

D′ (L) مشقت نهایی ناشی از کار

F′(K) و F_k بهره‌وری نهایی سرمایه

F_L بهره‌وری نهای نیروی کار

η رشد جمعیت

q محصول سرانه

c مصرف سرانه

k سرمایه برای هر نفر

ρ نرخ ترجیح زمانی (تنزیل)

σ کشش مطلوبیت نهایی