نوشته‌ی: هادی سودبخش

درآمدی فلسفی بر هندسه‌ی تصویری

تفکر هندسی در ریاضیات و جست‌وجوی عنصر دیفرانسیلِ حجم در مشاهده «عین» و انتزاع ذهنی آن، درک عامی در بیان فضا به‌عنوان عنصر اصلی تصویرگریِ «احساس» و «ادراک» مطرح می‌کند که ضرورتاً کاربرد لفظ «فضا» را وسعت می‌بخشد. با حرکت از مبدا «نقطه» در هندسه که نماد بی‌حرکتی و بی‌بعدی است، بعد «خط» در تضاد با بی‌بعدی، به‌عنوان یک مفهوم ذهنی می‌شود و «امتداد» معنا پیدا می‌کند. با حرکت از مبدا «خط» که نماد بی‌سطحی و «امتداد» یک بعدی است، بعد سطح در تضاد با امتداد، به‌عنوان یک مفهوم، ذهنی می‌شود و «سطح» دو بعدی معنا پیدا می‌کند. این مفهوم در بازگشت به مصداق عینی خود «انحنا» را تعریف می‌کند که کیفیتی بینابینی میان امتداد و سطح است. با حرکت از مبدا، سطح که نماد بی‌حجمی و انحنای دو بعدی است، بعد حجم در تضاد با انحنا، به‌عنوان یک مفهوم در ذهن متولد می‌شود.

این مفهوم در بازگشت به‌مصداق عینی خود «خم» را تعریف می‌کند که کیفیتی بینابیتی میان سطح و حجم است. این، مسیر تعمیم مفهوم نقطه به‌عنوان عنصر بی‌نهایت یا سلول بنیادی «فضا» است که حد آن از صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند و بافت‌های تکامل‌یافته را تشکیل می‌دهد. و همین تعمیم است که ضرور کاربرد لفظ فضا را گسترش می‌دهد و «نقطه‌ی مادی» را تعریف می‌کند. این تعریف را نمی‌توان از مفهوم حرکت جدا کرد.

نقطه‌ی مادی چیست[1]؟ یک خط از چند نقطه‌ی مادی تشکیل شده است؟ یک سطح از چند نقطه؟ یک حجم از چند نقطه؟ برای همه، جواب «بی‌نهایت» است. بی‌نهایت چیست؟

برتراند راسل گفته است: حساب دیفرانسیل و انتگرال به پیوستگی نیاز دارد و پیوستگی محتاج بی‌نهایت کوچک است. اما، هیچ‌کس تاکنون نتوانسته کشف کند که بی‌نهایت چیست؟ البته این یک استنتاج استقرایی است. در مکانیک نیوتونی «نقطه‌ی ماده» با حرکت تعریف می‌شود و پیوستگی کیفیت حرکت است. اگر محتوای آنالیز ریاضی را در زمینه‌ی توضیح نقطه‌ی مادی و مسیر آن مورد توجه قرار دهیم، به وضوح، تلفیق مفاهیم جبری و هندسی، و در واقع، وحدت در کیفیت متضاد

۱– در فیزیک، نقطه‌ی مادی به صورت «نقطه‌ی هندسی جرم‌دار» تعریف می‌شود.

انفصال و اتصال را، منتها در حد بالاتری از انتزاع درک خواهیم کرد. مفاهیم دیفرانسیل و انتگرال چیزی جز تلفیق این دو کیفیت نیست: تقسیم یک کل به بی‌نهایت جز «بی‌نهایت کوچک». و تحویل بی‌نهایت جز «بی‌نهایت کوچک» به یک عنصر ریاضی. و این درواقع حرکت از کل به جز و از جز به کل است. در خارج از این تعامل، استنتاج استقرایی، یعنی ادراک «بی‌نهایت» با تجربه مستقیم، ممکن نیست.

«بی‌نهایت» یک الزام ریاضی است. مفهوم «پیوستگی» بر مبنای کیفیت «بی‌نهایت کوچک» در ریاضیات سده‌ی ۱۶ فرموله و تاریخی شد. مساله‌ی اصلی، بینش و نظرگاه یک فیلسوف در تبیین کلیت مفهوم فضاست: فضای شعر، فضای قصه، فضای تابلوی نقاشی، فضای آهنگ موسیقی و فضای معماری[1]. و به‌طور کلی تفکر حجمی زمینه‌ای است که عمومی‌کردن ریاضیات و ریاضی‌دان اندیشمند را معنی می‌کند و «هشترودی» از این جهت یک ریاضی‌دان اندیشمند است که تفکر حجمی را در تمام آثارش تجربه کرده است.

از این‌رو نکته‌ی اصلی در پردازش رساله‌اش تعمیم ابعاد فضاهای تصویری تا بعد nام است و این همان نگرش هرمنوتیک بر عنصر «فضا»ست که اساس آن بر تعمیم از ملموس به مجرد است و بازگشت از مجرد به ملموس. و حرکت دایم از عین به ذهن و از ذهن به عین. از استقرا به قیاس و از قیاس به استقرا. منتها این حرکت دایره یا بیضی بسته نیست، یک سیکلویید است با نقاط ماکزیمم فزاینده. ویژگی اصلی این حرکت توضیح روشن‌تر ابهامات مسایل فضای n-۱ بعدی به وسیله‌ی عناصر منطقی فضای n بعدی است. در سیر بی‌نهایت است که استقرای ریاضی، خود صورت قیاسی پیدا می‌کند و این همان استحاله کیفی است. به عبارت بهتر، به تعبیر ماکس پلانک، برای صعود به قله‌ی کمال فکری باید از دامنه‌های پایین آن گذشت.

بدیهی است هرچه بالاتر برویم افق دید ما وسیع‌تر و نقطه‌ی عزیمت ما کوچک‌تر به نظر خواهد رسید و «ارتباطات جدید»ی تعریف خواهد شد. این «ارتباطات جدید» همان نکته اصلی است که دکتر مسعود خلخالی در تجلیل از هشترودی با تحلیل رساله‌اش تذکر داد[2].

سده‌ها، بشر در فضای هندسه‌ی اقلیدسی اندیشیده است. تفکر تعمیمی (توسیعی بر اساس مکانیزمی که گفته شد، ضرورت تغییر کیفی در نگرش تاریخی به هندسه را پیش آورد و با نقد مبانی و اصول موضوعه اقلیدس به خصوص اصل پنجم آن «اصل توازی» ویژگی این تغییر کیفی را در مدل ریاضی و معادلات دیفرانسیلی آن نشان داد. هندسه‌هایی به‌وجود آمدند که اصل توازی را نقض می‌کردند.

۱- «تصویر» هر یک از این فضاها «فرم» انتزاعی ویژه‌ی خود را طرح و قانونمندی و توپولوژی «موضوعی خود را تعریف می‌کند.»

۲- کنفرانس سی و هفتم ریاضی، شهریور ۸۵، تبریز، آذرشهر.

اقلیدس گفت: از یک نقطه خارج یک خط، یک خط و فقط یک خط، می‌توان به موازات آن رسم کرد.

ولی ریمان گفت: از نقطه مفروض هیچ خطی نمی‌توان به موازات خط مفروض رسم کرد.

و لباچوفسکی گفت: از نقطه‌ی مفروض فوق بی‌نهایت خط می‌توان به‌موازات خط مفروض رسم کرد.

وقتی مفهوم «بی‌نهایت» را به تعریف دو خط موازی وارد کنیم که «دو خط موازی در بی‌نهایت یک‌دیگر را قطع می‌کنند»، نقاط تقاطع در بی‌نهایت، گرچه ذهنی، معنا پیدا می‌کنند. و «نقطه بی‌نهایت» تعریف می‌شود. «نقطه بی‌نهایت» چیست؟ با شهود هندسی - در هندسه اقلیدسی - می‌توان تصور کرد که اگر خط راستی که متقاطع با خطی دیگر است به آرامی دوران داده شود تا در موقعیتی موازی با خط دیگر قرار گیرد، نقطه‌ی تقاطع دو خط دور می‌شود و به سمت بی‌نهایت می‌رود. به بیان ساده می‌توانیم بگوییم که این دو خط در یک نقطه‌ای واقع در بی‌نهایت یک‌دیگر را قطع می‌کنند. این یک تعمیم تصور هندسی برای نقطه‌ی تقاطع است. حال لازم است معنای دقیقی به این گفته‌ی مبهم ببخشیم، به‌طوری که با نقطه‌های بی‌نهایت بتوان به طور دقیق همان‌طور رفتار کرد که با نقطه‌های واقع در صفحه و فضا.

همان‌طور که در اول بحث به آن اشاره شد. یعنی تعریف یک «سلول بنیادی» حجم در فضای غیراقلیدسی. به عبارت دیگر، می‌خواهیم همه‌ی قواعد مربوط به رفتار نقطه‌ها، خط‌ها، صفحه‌ها و غیره... حتا وقتی که این عناصر هندسی به صورت ذهنی و ایده‌آلی هستند، برقرار بماند. بدیهی است که این «قواعد» نیز در ارتباط با تعمیم عناصر تشکیل‌دهنده‌ی فضای تصویری، ساختار منطقی مربوط به فضا را پیدا خواهند کرد و «توپولوژی» متناسب با این «تحلیل موضعی» تعریف خواهد شد[1].

این زیربنای هندسه‌ی «مانیفولد» است که زنده یاد دکتر هشترودی رساله‌ی خود را زیر نظر «الی کارتان» ریاضی‌دان نامدار فرانسوی، در متن آن تنظیم و تدوین کرده است.

«مانیفولد»ها فضاهایی هستند که به‌طور موضعی شبیه R^nاند. مانند کره زمین که به‌صورت یک کره است ولی به‌طور موضعی در اطراف خود ما، سطح و شبیه R^2 است. بر روی این فضاها می‌توان محاسبه انجام داد.

مثال‌های دیگری از این نوع فضاها عبارتند از فضاهای اقلیدسی، منحنی‌های هموار مانند دایره‌ها

۱- دکتر هشترودی در مقاله‌ای از کتاب دانش و هنر، توپولوژی را «علم تحلیل موضوعی» نامیده است.

برای توضیح «نقطه‌ی بی‌نهایت» از کتاب ریاضیات چیست؟ تالیف ریچارد کورانت و هربرت رابینز، برگردان سیامک کاظمی، نشر نی، بخش ۴، فصل توازی و بی‌نهایت، صفحه‌ی ۱۹۳ استفاده شده است.

و بیضی‌ها و سطح‌های هموار و در $\mathbb{R}^3$، مانند کروی‌ها، بیضوی‌ها و هذلولوی‌ها. یکی از خصوصیات مهم مانیفولدها محاسبه‌پذیری آن‌هاست. برای مثال کاربرد تئوری مانیفولد در هندسه، شامل مطالعه‌ی خواصی مانند حجم و انحنا است. حجم‌ها با انتگرال‌گیری وانحناها یا فرمول‌هایی مانند مشتق دوم محاسبه می‌شوند.

برای تعمیم این حیطه‌ی محاسبه‌پذیری، به مانیفولدها باید مفاهیم دیفرانسیل و انتگرال را روی مانیفولدها تعریف کنیم. کاربرد نظریه‌ی مانیفولدها در مکانیک کلاسیک، شامل حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیل بر روی مانیفولدها و کاربرد آن در گرایش عمومی، شامل حل یک سیستم معادلات دیفرانسیل موضعی است[1].»

این محاسبه‌پذیری در واقع همان وحدت فلسفیِ دو گرایش متضاد «اتصال» و «انفصال» در هندسه و جبر است که با طرح فضاهای غیراقلیدسی به‌صورت دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی تحت تبدیلات «لورنتز» با رشته مشتق‌های مراتب بالاتر به‌صورت مدل ریاضی مکانیک نسبیتی مطرح می‌شود.

کاری که زنده‌یاد دکتر هشترودی در رساله‌ی دکترای خود در سال ۱۹۳۷ انجام داده است که نمونه‌ی بی‌نظیر و تاریخی گرایش شهودی در ریاضیات است.

۱- این بخش با همکاری گروه ریاضی مجتمع آموزشی و فرهنگی دکتر هشترودی تهیه و تنظیم شده است.