از تاریخ دانش و فن

سرگذشت یک نابرابری

ل. کور لیان چیک، ا. فا ای بوشوویچ
برگردان: پرویز شهریاری

از سرگذشت این نابرابری صحبت می‌کنیم:[1]

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}>\frac{n}{2}$$

که بررسی آن را، برای نخستین بار، «شاپیرو» ریاضی‌دان آمریکایی در مجله‌ی
The American mathematical monthly
در سال ۱۹۴۵، برای حل پیشنهاد کرد. این مساله نظر بسیاری از ریاضی‌دانان را در سراسر جهان به‌خود جلب کرد. سهم اساسی در حل این مساله مربوط به «والودیا درین فِلد»، دانش‌آموز اتحاد شوروی است که بعدها جایزه‌ی فیلدس را گرفت.

در سال ۱۹۵۸، پروفسور «موردل» از کمبریج، نابرابری را برای $n \leq 6$ ثابت کرد. چون برای حالت $n=7$ به‌دشواری برخورد، فرضیه‌ای آورد که نابرابری برای $n=7$ نادرست است. جالب است، اگر او می‌توانست فرضیه‌ی خود را ثابت کند، یعنی هفت عدد x_1، x_2، ...، x_7 پیدا کند که برای آن‌ها چنین مجموعی کوچک‌تر از $\frac{7}{2}$ باشد، آن وقت می‌شد از آن‌جا نتیجه گرفت که، نابرابری، برای هر $n>7$ نادرست است. این مطلب را ثابت می‌کنیم. در آغاز، این نام‌گذاری را وارد می‌کنیم:

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

که باعث می‌شود در «جا» صرفه‌جویی کنیم. سپس توجه می‌کنیم که

$$f_n(x_k,x_{k+1},\ldots,x_n,x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

یعنی اگر عددهایی را که در سمت چپ نابرابری قرار دارند، تبدیل دوری کنیم، نابرابری تغییر نمی‌کند. به‌همین دلیل، این نابرابری و نابرابری‌های دیگری که این ویژگی را داشته باشند، «دوری» می‌نامند.

آزمایش کنید که

$$f_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1,x_2)=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1$$

از این‌جا نتیجه می‌شود، اگر

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)<\frac{1}{2}n$$

آن وقت

$$f_{n+2}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1,x_2)<\frac{1}{2}(n+2)$$

اکنون، این برابری را امتحان کنید:

$$f_{n+1}(x_1,\ldots x_i,x_i,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2\ldots x_n)-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}{2x_i(x_i+x_{i+1})}$$

---

۱. همه‌ی متغیرها در این مقاله نامنفی و مخرج‌ها مثبتند.

در ضمن، باید $x_{i+1}=x_1$ و $x_{i+2}=x_2$ گرفت. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر

$$(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})<0$$

آن وقت

$$f_{n+1}(x_1,\dots x_i, x_i, \dots, x_n) < \frac{1}{2}(n+1)$$

به‌ازای

$$f_n(x_1, x_2,\dots x_n) < \frac{1}{2}n$$

ولی در حالت فرد بودن n، باید چنان مقداری برای i پیدا شود که برای آن نابرابری

$$(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})<0$$

برقرار باشد، زیرا اگر برای همه‌ی آنها نابرابری

$$(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})>0$$

برقرار باشد، آن وقت با ضرب آن‌ها در یک‌دیگر به‌دست می‌آید:

$$(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2\dots(x_n-x_1)^2<0$$

برای این‌که ۷، عددی فرد است، بنابراین نابرابری که برای n=۸ و همه‌ی عددهای زوج n نادرست بود، با استدلالی که کردیم، همین نتیجه را برای عددهای فرد n هم به‌دست می‌دهد.

ولی در سال ۱۹۶۱ «دیه کوویچ»، ریاضی‌دان بلغارستانی، فرضیه‌ی «موردل» را رد و نابرابری را برای n=۸ ثابت کرد. در سال ۱۹۶۷، «نُووُساد»، ریاضی‌دان برزیلی، آن را برای n=۱۰ ثابت کرد. در سال ۱۹۷۴، «و. ای. له‌وین» و «ا. ک. گُودوئُووا»، ریاضی‌دانان شوروی، نابرابری را برای n=۱۲ ثابت کردند.

در تمام این سال‌ها، کسی کوشش نکرد که نابرابری را در حالت کلی ثابت کند. در سال ۱۹۵۶ بود که «لایت هیل»، ریاضی‌دان انگلیسی، ثابت کرد که، در حالت کلی، نابرابری نادرست است. او توانست انتخابی از بیست عدد $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ پیدا کند به‌نحوی که داشته باشیم:

$$f_{20}(x_1,\dots x_{20})<10$$

و بعد از مدتی او، و بدون ارتباط با او، «تسولاوف»، ریاضی‌دان اسکاتلندی، موفق شد چنین نمونه‌ای برای n=۱۴ پیدا کند. این، یکی از آن‌هاست:

۵۰, ۵, ۴۸, ۳, ۴۸, ۱, ۵۰,
۰, ۵۲, ۱, ۵۴, ۴, ۵۳, ۶

برای عددهای فرد n، همه جا به‌دشواری برمی‌خورد. در سال ۱۹۵۸، «پانکین»، ریاضی‌دانی از گلاسکو، نادرستی نابرابری را برای عددهای به‌اندازه‌ی کافی بزرگ n ـ وقتی فرد باشد ـ ثابت کرد.

در سال ۱۹۵۹، «تسولاوف» ـ که پیش از این از او یاد کردیم ـ نادرستی نابرابری را برای عددهای فرد n≥۵۳ ثابت کرد. در سال ۱۹۶۱، «دیاناندا»، دانشمندی از سنگاپور موفق شد نمونه نقضی برای n=۲۷ پیدا کند. نمونه‌ی نقضی هم برای n=۲۵، «دی کین»، ریاضی‌دان انگلیسی در سال ۱۹۷۱ پیدا کرد. و دانش‌آموزان ریاضی از مدرسه‌ی شبانه‌روزی دانشگاه لنین‌گراد (که شاگردان نویسنده‌ی این مقاله بودند)، «ر. آلکسه یف» و «ا. خُوش کین» هم توانستند به‌یاری رایانه، مثال نقضی برای n=۲۵ پیدا کنند. نمونه‌ی نقض این است: ۴, ۱۰ ۲۹, ۲۹, ۱۶, ۳۰,
۸, ۶۲, ۲۱, ۵۵, ۲۹, ۴۴, ۳۲, ۳۳, ۳۱, ۲۴,
۳۲, ۰, ۳۷, ۰, ۴۳, ۰, ۵۰, ۰, ۵۹,

کمی بعد، در اکتبر سال ۱۹۸۹، «تِروُهش»، ریاضی‌دان آمریکایی درستی نابرابری را، برای بقیه‌ی عددهای n به‌ویژه برای زمانی که n برابر ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱ و ۲۳ باشد، ثابت کرد.

از سال ۱۹۵۶ که معلوم شد نابرابری $f_n \ge \frac{n}{2}$ در حالت کلی نادرست است، بررسی‌ها در دو جهت دیگر ادامه پیدا کرد. جهت نخست این بود که معلوم کنند، نابرابری برای چه مقدارهایی از n برقرار است.

درباره‌ی این سمت بررسی‌ها، روایت کردیم. و اکنون درباره‌ی جهت دوم بررسی‌ها گفت‌وگو می‌کنیم.

در سال ۱۹۵۷، «ران کین»، ثابت کرد، این نابرابری درست است:

$$f_n \ge \frac{2\sqrt{2}-1}{6}n = \frac{n}{2}\times 0/609\ldots$$

هم او در سال ۱۹۶۱، تا اندازه‌ای نتیجه‌گیری خود را بهبود بخشید:

$$f_n \ge \frac{n}{2}\times 0/661$$

در همین سال «دیانانا»، توانست ثابت کند:

$$f_n \ge \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\times 0/914\ldots$$

در سال ۱۹۶۲، او ثابت کرد:

$$f_n \ge \frac{n}{2}\times 0/922\ldots$$

یعنی این مساله را مطرح کرد: بزرگ‌ترین عدد γ که در نابرابری

$$f_n > \gamma\cdot\frac{n}{2}$$

صدق می‌کند، کدام است (البته، به‌ازای همه‌ی عددهای طبیعی)؟ و درست این مساله را «والودیا درین فلد»، حل کرد.

همه چیز از این‌جا آغاز شد که در المپیاد سوم سراسری شوروی در سال ۱۹۶۹، اثبات این نابرابری به داه‌طلبان پیشنهاد شد:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{n}{4}$$

که از بین همه‌ی داوطلبان تنها یک دانش‌آموز توانست آن را حل کند: «آ. برزینش»، دانش‌آموز مدرسه‌ی شبانه‌روزی ریاضی که مقام سوم را در المپیاد سراسری روسیه به‌دست آورد.

این راه حل چنین بود. فرض کنید x_{i_1} بین عددهای x_1، x_2، ...، x_n بزرگ‌ترین باشد؛ x_{i_2} بین دو عدد بعدی x_{i_1} عددی بزرگ‌تر باشد؛ x_{i_3} بین دو عدد بعدی x_{i_2} بزرگ‌ترین باشد و به‌همین ترتیب تا آخر x_{i_k} را طوری انتخاب می‌کنیم که بین دو عدد بعدی x_{i_k}، عدد x_{i_1} بزرگ‌ترین باشد. روشن است که $k \ge \frac{n}{2}$ و بنابراین

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}}+\frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}}+\ldots+\frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \ge \frac{k}{2} \ge \frac{n}{4}$$

این مطلب، که آخرین مجموع، کم‌تر از $\frac{k}{2}$ نیست، از نابرابری کوشی

$$a_1+a_2+\ldots+a_k \ge k\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$$

یکی از کسانی که در این المپیاد به‌موفقیت رسید «والودیا درینفلد»، دانش‌آموز اهل خارکوف بود. او در ترکیب افرادی بود که از اتحاد شوروی در المپیاد جهانی ریاضیات شرکت کردند. راهنمای علمی هیات، یکی از بزرگ‌ترین ویژه‌کاران شوروی در زمینه‌ی نابرابری‌ها، استاد «و. ای. له‌وین»، بود. او برای دانش‌آموزان درباره‌ی نابرابری‌ها صحبت کرد و از جمله یادآور شد که در سال ۱۹۶۹ «والودیا» توانست مقدار مجهول γ را پیدا کند. معلوم شد که $\gamma = 0/989\ldots$.

پیش از آن‌که درباره‌ی اندیشه‌ی «والودیا درینفلد»، صحبت کنیم، درباره‌ی نتیجه‌ی ضعیف‌تری که حاصل شد، روایت می‌کنیم. صورت مساله چنین است:

ثابت کنید، اگر عددهای x_1، x_2، ...، x_n عددهای مثبتی باشند، آن وقت

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

بزرگ‌تر است از a) $(\sqrt{2}-1)n$؛ b) $\frac{5}{12}n$؛ c) به‌شرطی که عددهای x_1، x_2، ...، x_n دنباله‌ای یک‌نواخت را تشکیل دهند، آن وقت این مجموع کم‌تر از $\frac{n}{2}$ نیست.

حل. a) هر یک از کسرهای به‌صورت

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

را به‌این صورت نشان می‌دهیم:

$$\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}=\frac{\frac{1}{2}x_{i+1}+x_{i+2}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-1$$

$2n$ کسر به‌دست می‌آید که آن‌ها را به‌این ترتیب گروه‌بندی می‌کنیم: کسر اول را با کسر $(2n)$ام؛ کسر دوم را با کسر سوم؛ کسر چهارم را بـا کسر پـنجم و غـیره. مجموع عددهای هر زوج را ارزیابی می‌کنیم:

$$\frac{\frac{1}{2}x_i+x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}+\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$

$$2\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}x_i+x_{i+1})(x_i+\frac{1}{2}x_{i+1})}{(x_i+x_{i+1})(x_i+\frac{1}{2}x_{i+1})}}=$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{x_i+x_{i+1}}{4(x_i+x_{i+1})^2}\right)\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}>$$

$$>\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}$$

چون حاصل ضرب n عدد

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}},\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}},\ldots,\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}$$

برابر است با ۱، بنابراین از نـابرابـری کـوشی نـتیجه مـی‌شود کـه مـجموع آن‌هـا بـزرگ‌تر است از $\sqrt{2}\,n-n=(\sqrt{2}-1)n$.

b) به‌هر یک از کسرهای مربوط، در اثبات a)، یک واحد اضافه کردیم. ولی چرا به‌ویژه یک واحد؟ فرض کنید عدد دل‌خواه α را اضـافه کـنیم و β را طـوری انتخاب کنیم که این برابری برقرار باشد:

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\alpha=\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+$$

$$+\frac{\alpha(\beta x_{i+1}+x_{i+2})}{x_{i+1}+x_{i+2}}$$

روشن است کـه $\beta+\alpha\beta=\alpha$ یـعنی $\beta=\frac{\alpha}{\alpha+1}$

بنابراین

$$\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{\alpha(\beta x_i+x_{i+1})}{x_i+x_{i+1}}\geqslant$$

$$2\sqrt{\alpha\frac{(\beta x_i+x_{i+1})(x_i+\beta x_{i+1})}{(x_{i+1}+x_{i+2})(x_i+x_{i+1})}}=$$

$$2\sqrt{\alpha\frac{\beta(x_i+x_{i+1})^2+(\beta-1)^2x_ix_{i+1}}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}>$$

$$2\sqrt{\alpha\beta\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}$$

یعنی

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}>$$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}+\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}\right)\alpha n>$$

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}n-\alpha n=\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha\right)n$$

اگر $\alpha=\frac{5}{4}$ قرار دهیم، آن وقت:

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha=\frac{5}{12}=0/416\ldots$$

و حکم b) ثابت می‌شود. به‌یاد بیاوریم که بخش a) به‌ازای $\alpha=1$ به‌دست می‌آید.

c) حالتی را در نظر می‌گیریم کـه در آن داشـته باشیم:

$$x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$$

ثابت می‌کنیم، در این حالت، این رابـطه بـرقرار است:

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq f_{n-1}(x_1,x_n,\ldots,x_{n-1})+\frac{1}{2}$$

در واقع این اتحاد برقرار است:

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=$$

$$\frac{(x_{n-2}-x_{n-1})(x_1-x_n)}{(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_{n-1})}+\frac{(x_1-x_n)(x_{n-1}-x_n)(x_1-x_{n-1})}{2(x_{n-1}+x_n)(x_1+x_n)(x_1+x_{n-1})}$$

$$+\frac{(x_{n-1}-x_n)(x_2-x_n)}{(x_1+x_2)(x_1+x_n)}+\frac{1}{2}$$

ولی همه‌ی جمله‌ها، نامنفی‌انـد (از یـک نـوایـی دنباله‌ی $x_1, x_2, \ldots, x_n$). به‌این ترتیب

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq f_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})+\frac{1}{2}\geq$$

$$\geq f_{n-2}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2})+1\geq\ldots\geq$$

$$\geq f_2(x_1,x_2)+\frac{n-2}{2}=$$

$$=\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_1}+\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}$$

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که برای آن داشته باشیم:

$$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$$

یادآوری می‌کنیم که

$$f_n(x_1, x_2,\dots, x_n)=\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\dots+\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}-$$

$$-n+\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\dots+\frac{x_1}{x_n+x_1}$$

ولی مجموع اول کم‌تر از n نیست، زیرا حاصل ضرب همه‌ی جمله‌ها برابر واحد است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم:

$$g_n(x_1, x_2,\dots, x_n)=\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_3}{x_2+x_3}+\dots$$

$$\dots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}\ge\frac{n}{2}$$

برای این منظور ثابت می‌کنیم:

$$g_n(x_1, x_2,\dots, x_n)-g_{n-1}(x_1, x_2,\dots,x_{n-1})\ge\frac{1}{2}$$

در واقع داریم:

$$g_n(x_1, x_2,\dots, x_n)-g_{n-1}(x_1, x_2,\dots,x_{n-1})-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_1}{x_n+x_1}-\frac{x_1}{x_{n-1}+x_1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_{n-1})(x_n-x_1)}{2(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)(x_1+x_{n-1})}\ge 0$$

ولی

$$g_n(x_1,x_2,\dots,x_n)>g_{n-1}(x_1, x_2,\dots,x_{n-1})+\frac{1}{2}\ge$$

$$\ge g_{n-2}(x_1,x_2,\dots,x_{n-2})+1\ge\dots\ge$$

$$\ge g_2(x,x_2)+\frac{n-2}{2}=\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{x_1}{x_2+x_1}+\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}$$

اکنون به‌بیان اثبات «و. درینفلد» و نتیجه‌ی آن می‌پردازیم. او بر دو نابرابری اساسی تکیه می‌کند. در نابرابری اول، دو انتخاب از n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n و عبارت

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

را در نظر می‌گیرد. استدلال را چنین دنبال می‌کند که این عبارت وقتی به‌ماکزیمم خود می‌رسد که عددها را به‌نحوی شماره‌گذاری کنیم که داشته باشیم:

$$a_1\ge a_2\ge\dots\ge a_n \;\text{و}\; b_1\ge b_2\ge\dots\ge b_n$$

و وقتی به‌مینیمم خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$a_1\ge a_2\ge\dots\ge a_n \;\text{و}\; b_1\le b_2\le\dots\le b_n$$

نابرابری دوم، که به‌نابرابری «ین سن» معروف است، به‌ویژگی تابع‌های کوژ (محدب) مربوط می‌شود. تابع $q(x)$ را دربازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ کوژ گویند، وقتی که مقدارهای آن در هر بازه‌ی $[x_1, x_2]$ از $[a, b]$ روی منحنی آن، زیر پاره‌خط راستی واقع باشد که نقطه‌های $(x_1, q(x_1))$ و $(x_2, q(x_2))$ را به‌هم می‌پیوندد. (شکل ۱). این تعریف را می‌توان به‌صورت این نابرابری نوشت:

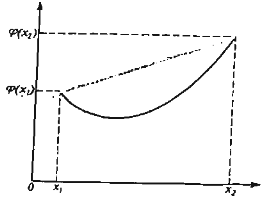
$$q(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant \alpha q(x_1)+(1-\alpha)q(x_2)$$

نابرابری ین سن می‌گوید، برای هر تابع $q(x)$ که در بازه‌ی $[a, b]$ کوژ باشد، انتخاب دلخواهی از نقطه‌های x_1، x_2، ...، x_n متعلق به‌این بازه، و همچنین عددهای مثبت دل‌خواه p_1، p_2، ...، p_n که مجموعی برابر ۱ داشته باشند:

$$f_1+f_2+\dots+f_n=1$$

این نابرابری برقرار است:

$$q(f_1x_1+\dots+f_nx_n)\leqslant f_1q(x_1)+\dots+f_nq(x_n)$$



شکل ۱

اثبات $k_i=\frac{x_{i+1}}{x_i}$ می‌گیریم؛ در ضمن $\frac{x_1}{x_n}=k_n$. عددهای K_i را به‌صورت صعودی تنظیم می‌کنیم و جمله‌هایی را که در این دنباله به‌دست می‌آید با m_i نشان می‌دهیم. اکنون به‌دو دنباله توجه می‌کنیم:

$$\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_2},\dots,\frac{1}{m_n};$$

$$\frac{1}{1+m_n},\frac{1}{1+m_{n-1}},\dots,\frac{1}{1+m_2},\frac{1}{1+m_1}$$

که اولی به‌طور یک نوا نزولی و دومی به‌طور یک نوا صعودی است. اگر از نابرابری اول خود استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\dots+\frac{x_n}{x_1+x_2}=$$

$$=\frac{1}{k_1(k_2+1)}+\frac{1}{k_2(k_3+1)}+\dots+\frac{1}{k_n(k_1+1)}\ge$$

$$\ge\frac{1}{m_1(m_n+1)}+\frac{1}{m_2(m_{n-1}+1)}+\dots+\frac{1}{m_n(m_1+1)}$$

و $m_i m_{n-i+1}=c_i$ و

$$r_i=\frac{1}{m_i(m_{n-i+1}+1)}+\frac{1}{m_{n-i+1}(m_i+1)}$$

می‌گیریم، در این صورت

$$r_i=\frac{1}{c_i}\left[1+\frac{c_i-1}{(1-m_i)(1+m_{n-i+1})}\right]$$

به‌این ترتیب، چون

$$(1+m_i)(1-m_{n-i+1})\ge(1+\sqrt{c_i})^2\ge(1+\sqrt{c_i})^2$$

پس

$$r_i>\begin{cases}\frac{1}{c_i} & c_i\ge 1\\ \frac{2}{c_i+\sqrt{c_i}} & c_i<1\end{cases}\qquad(**)$$

فرض می‌کنیم $c_i=e^{y_i}$ از نابرابری‌ها (*) و (**) به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{n}\sum_{i+1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\ge$$

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{c_i\ge1}e^{-y_i}+\sum_{c_i<1}2(e^{\frac{y_i}{2}}+e^{y_i})^{-1}\right]\quad(***)$$

g را بزرگ‌ترین تابع کوژی می‌گیریم که از تابع‌های

$$y=e^{-x}\ ,\ y=2(e^{\frac{x}{2}}+e^{x})^{-1}$$

آغاز کند. در این صورت از نابرابری (***)، با توجه به‌نابرابری ین سن خواهیم داشت:

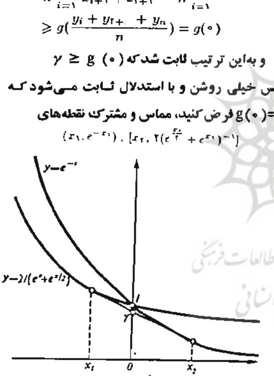
$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(y_i)\ge$$

$$\ge g\left(\frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right)=g(0)$$

و به‌این ترتیب ثابت شد که $\gamma\ge g(0)$

سپس خیلی روشن و با استدلال ثابت می‌شود که $\gamma=g(0)$ فرض کنید، مماس و مشترک نقطه‌های

$$(x_1, e^{-x_1})\ ,\ [x_2, 2(e^{\frac{x_2}{2}}+e^{x_2})^{-1}]$$



شکل ۲

را به‌هم وصل کند (شکل ۲). منحنی تابع g از سه بخش تشکیل شده است: $y=e^{-x}$ به‌ازای

$$y=2(e^{x}+e^{\frac{x}{2}})^{-1}\ ,\ x>x_1$$

برای $x\le x_2$ و مماس مشترک آن‌ها برای $x_2\le x\le x_1$ عرض نقطه تقاطع مماس با محور عرض برابر با γ است.