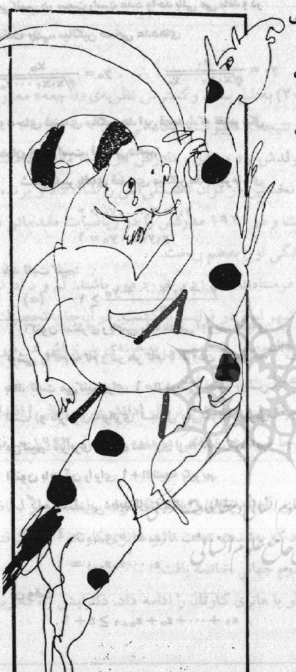
از تاریخ دانش و فن

اوگوستین لویی کوشی و استقرای ریاضی

پرویز شهریاری



میانگین حسابی چند عدد مثبت از میانگین هندسی آن‌ها، کوچک‌تر نیست:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

این نابرابری مشهور متعلق به‌کوشی، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی است که در سال ۱۸۲۱ میلادی چاپ شد. از آن زمان، این نابرابری یکی از دشوارترین نابرابری‌های عددی شمرده می‌شود. در جریان صد و پنجاه سال، ده‌ها اثبات مختلف برای درستی این نابرابری پیدا شد. ولی به‌طور سنتی، هم‌چنان نابرابری کوشی نامیده می‌شود. اثبات خود کوشی به‌چند صفحه نیاز دارد و کم و بیش دشوار است. در این‌جا یکی از این اثبات‌ها را، که به‌نظر من ساده‌ترین آن‌هاست، می‌آورم. به‌اعتقاد من، این اثبات به‌اندازه‌ی سادگی خود، زیبا هم هست. ولی در آغاز لازم است تغییرهایی در نابرابری کوشی بدهیم.

به‌چه مناسبت صورت یک مساله را تغییر شکل می‌دهیم؟ یک ریاضی‌دان با تجربه می‌داند که این کار، آن قدرها هم که در ابتدا به‌نظر می‌آید، بی‌فایده نیست... همه جا، وقتی به‌دنبال اثبات ساده‌ای برای

یک قضیه‌ی پیچیده می‌روند، این‌گونه تغییر شکل‌ها لازم می‌شود.

در مرحله‌ی نخست، ریشه‌ی nام را که در سمت راست نابرابری است، و اندکی ترسناک به‌نظر می‌آید، به‌هم می‌زنیم. دو طرف نابرابری را به‌آن تقسیم می‌کنیم. در سمت راست عدد واحد باقی می‌ماند و در سمت چپ، میانگین حسابی عددهای

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\ , \ \ldots\ ,\ y_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

و به‌جای قضیه‌ی میانگین‌ها، این قضیه را، که تغییر شکل همان قضیه است، قرار می‌دهیم:

شکل تغییر یافته‌ی قضیه‌ی میانگین‌ها. با شرط‌های

$$y_1 > 0, \ldots, y_n > 0$$

$$y_1y_2\cdots y_n = 1$$

باید ثابت کنیم:

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geq 1 \qquad (*)$$

اکنون استقرای ریاضی را به‌یاد می‌آوریم. قضیه‌ی کوشی را گام به‌گام و در هر گام، با افزودن یک واحد به n، ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ درستی قضیه روشن است (و نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود). فرض می‌کنیم، نابرابری را برای مقداری از n ثابت کرده‌ایم. اکنون باید آن را برای $n+1$ نتیجه بگیریم.

گام استقرایی: باید ثابت کنیم، اگر داشته باشیم:

$$z_1 > 0, \ldots, z_n > 0, z_{n+1} > 0$$

$$z_1\cdots z_nz_{n+1} = 1$$

آن وقت

$$z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1} \geq n + 1$$

از نابرابری $(*)$، که فرض کردیم درست است، استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$y_1 = z_1,\ \ldots,\ y_{n-1} = z_{n-1}\ ,\ y_n = z_nz_{n+1}$$

در این صورت، هر دو شرط

$$y_1 > 0, \ldots, y_n > 0$$

$$y_1y_2\cdots y_n = 1$$

برقرار است. در نتیجه، این نابرابری را ثابت کردیم:

$$y_1 + \cdots + y_n \geq n$$

و اگر به‌جای yها مقدارشان را قرار دهیم:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_nz_{n+1} \geq n$$

یادآوری می‌کنیم، تا این‌جا، یک‌بار در قضیه تغییر شکل دادیم. ولی خود اثبات کجاست؟

عددهای $z_1,\ldots,z_{n+1}$ را طوری نام‌گذاری می‌کنیم که داشته باشیم:

$$z_n > 1\ ,\ z_{n+1} < 1$$

(روشن است، اگر همه‌ی عددهای y_i برابر واحد نباشند، بین آن‌ها چنین دو عددی پیدا می‌شود). اکنون در رابطه‌ی آخر، حاصل ضرب z_nz_{n+1} را به‌مجموع z_n+z_{n+1} تغییر می‌دهیم. برای این منظور، باید ثابت کنیم:

$$z_n + z_{n+1} \geq z_nz_{n+1} + 1$$

یا

$$z_n + z_{n+1} - z_nz_{n+1} - 1 \geq 0$$

سمت چپ این نابرابری قابل تجزیه است:

$$(z_n - 1)(1 - z_{n+1}) \geq 0$$

و درستی این نابرابری روشن است، زیرا $z_n > 1$ و $z_{n+1} < 1$. اثبات تمام شد.