نخستین ترجمه‌ام را به‌استاد پرویز شهریاری که با نوشته‌هایش شوق مطالعه‌ی ریاضی را به‌من بخشید، تقدیم می‌کنم.

قضیه‌ی دو هزار و پانصد ساله‌ی فیثاغورس[1]

داركو ولجين

برگردان: سهیل برادران

معرفی و اندکی از تاریخ

هنگامی که شما مقاله‌ای را با موضوع قضیه‌ی فیثاغورس مشاهده می‌کنید ممکن است بگویید من از این عنوان آگاهی دارم و آن را به‌خوبی می‌شناسم، لذا از خواندنش صرف نظر می‌کنم. اما تصور من این است که هنوز هم اندیشه‌های جالبی درباره‌ی قانون قدیمی و قابل ستایش فیثاغورس وجود دارد که این مقاله بخواهد به‌بررسی آن‌ها بپردازد.

فیثاغورس در حدود سال ۵۷۰ پیش از میلاد در جزیره‌ی ساموس واقع در دریای اژه دیده به‌جهان گشود و در حدود ۴۹۰ پیش از میلاد از دنیا رفت. به‌تقریب در همین دوران فیلسوفان بسیاری از تمدن‌های گوناگون مشغول به‌کسب دانش و معرفت و راهنمایی کردن مردم بودند که ما می‌توانیم از آن‌ها به‌بودا در شرق آسیا، کنفوسیوس در چین، زردشت در ایران و اسحاق پیامبر در Judea اشاره کنیم. با این بررسی در این‌جا می‌توان پرسشی را مطرح کرد و آن این‌که آیا ممکن است این سازمان‌یافتگی و رشد همزمان فلسفه در نقاط مختلف دنیا تنها یک اتفاق بوده باشد؟

شاید بتوانیم بگوییم که تالس مهم‌ترین معلم فیثاغورس بوده و او به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم از افکار و آثار این دانشمند بهره‌مند شده است. این گمان با نظر به‌این‌که فیثاغورس در جوانی نزدیک شهر ملطیه یعنی زادگاه تالس می‌زیسته و این‌که تالس در طول تاریخ ریاضی

1. The 2500 - Year -Old Pythagorean Theorem. DARKO VELJAN American Mathemathic Magazine. October 2000.

نخستین کسی است که به‌حل مساله‌های هندسی با روش استدلال قیاسی تاکید کرده و سپس آن را فیثاغورس، با ایجاد اصول متعارفه و موضوعه به‌تکمیل رسانده است می‌تواند به‌اثبات برسد.

فیثاغورسیان نخستین کسانی بودند که تشخیص دادند برای مطالعه‌ی ریاضی به‌سیستم نظام‌یافته‌ای از برهان‌ها احتیاج می‌باشد. تنها در دو سده بعد اقلیدس توانست این مطلب را درک نماید و آن را در کتاب اصول خود که شامل بسیاری از عقاید فیثاغورس بود رعایت کند و شاخص‌های جدیدی را در دقت ریاضی و ساختمان منطقی آن معین کند.

فیثاغورس مدت‌های زیادی از عمر خود را به‌شاگردی کاهنان مصری و بابلی پرداخت. به‌ظاهر به‌هند و ایران نیز سفری داشته و در ایران نزد مغان ایرانی، دانش مغان را آموخته بود. چرا که او معتقد بود خورشید مرکز عالم است (و آن را برابر با یک در نظر می‌گرفت) که زمین و دیگر سیاره‌ها به‌دور آن می‌گردند و این همان چیزی است که مغان ایرانی می‌گفته‌اند!

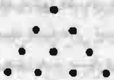
فیثاغورس هنگامی که به‌ساموس بازگشت، آن‌جا را تحت ظلم و ستم پلی‌کرات وابونی‌ها را تحت سلطه‌ی ایرانیان یافت. پس تصمیم به‌ترک این جزیره و سکنی گزیدن در جزیره‌ای در شمال ایتالیا به‌نام کروتون راگرفت، جایی که او مدرسه‌ی فلسفی -دینی خود راکه به‌یک انجمن برادری تبدیل شد و پیروان زیادی پیداکرد، بنیان نهاد و از آن‌جاکه رسم انجمن اُخوتی بر آن بود که همه‌ی کشف‌ها را به‌موسس آن منصوب کند، اکنون به‌سختی می‌توان گفت که کدام یک از کشف‌های این گروه مربوط به‌فیثاغورس و کدام یک مربوط به‌اعضای انجمن است. هنگامی که در اشاره به‌اعتقادات و کشف‌های این گروه واژه‌ی فیثاغورس را به‌کار می‌بریم منظورمان کل انجمن اخوتی است نه خود فیثاغورس.

فیثاغورس عقیده داشت که تمامی بخش‌های طبیعت و نظم و ترتیب آن، می‌توانند به‌ارتباط‌های عددی تبدیل شود و یا به‌بیان مشخص‌تر همه چیز از عدد ساخته شده است. روشن است که قبول این مطلب آسان نیست و برای درک آن باید دید که آن‌ها از عدد چه می‌فهمیدند و درباره‌ی عدد چه تصوری داشتند؟

به‌نظر می‌آید که فیثاغورسیان عدد را شامل مکان ملاحظه می‌کردند، و یا به‌بیان ساده‌تر یکی دانستن چیزها با عددها به‌این معنا است که تمام اجسام عبارت از نقطه‌هایی (که نماینده‌ی عدد یک می‌باشند) در مکان‌اند که چون با هم در نظر گرفته شوند، یک عدد را می‌سازند.

فیثاغورس ویژگی‌های عدد را بررسی می‌کرد و به‌هر عدد شخصیتی نسبت می‌داد. به‌نظر او عدد ممکن است مذکر، مونث، تام، ناقص، زاید، زیبا، زشت و غیره و غیره باشد. برای نمونه عدد ده یک عدد تام تلقی می‌شود. این عدد از جمع چهار عدد اولیه‌ی طبیعی تشکیل شده ،ست

(۱۰=۴+۳+۲+۱) و می‌توان آن را با نقاط پررنگ و به‌صورت یک مثلث کامل نمایش داد.[1]



به‌عنوان آخرین مطلب قابل توجه درباره‌ی عدد که به‌وسیله‌ی فیثاغورسیان بیان شده است، می‌توانیم به‌بستگی فاصله‌های موسیقی با نسبت‌های عددی اشاره کنیم. فیثاغورسیان تشخیص دادند که برای تارهای تحت کشش یکسان، طول‌ها باید به‌نسبت ۲ به ۱ برای اوکتاو، ۳ به ۲ برای فاصله‌ی پنجم و ۴ به ۳ برای فاصله‌ی چهارم باشد. این نتیجه‌ها که نخستین واقعیت‌های فیزیک ریاضی بودند، فیثاغورسیان را به آغاز مطالعه‌ی علمی گام‌های موسیقی هدایت کرد.

از دیگر عقاید فیثاغورس می‌توان این موردها را آورد:

۱) حقیقت از پایه و بنیاد وابسته به‌ریاضیات می‌باشد. ۲) فلسفه می‌تواند منجر به‌پاکی روح شود. ۳) روح می‌تواند با کل هستی متحد گردد. ۴) علامت‌های معین و مشخص معنایی عرفانی دارند. ۵) تمامی اجزای قانون‌ها باید به‌صورت وفادارانه‌ای رعایت شوند و مخفی بمانند.

در انتهای این قسمت این را نیز خاطرنشان می‌کنیم که تنها ابتکار فیثاغورس کشف قضیه‌ی معروفش نمی‌باشد و او قضیه‌های دیگری را نیز در ریاضیات بیان کرده و ثابت کرده است که برخی از آن‌ها را در این‌جا آورده‌ایم:

۱) قضیه‌ی مربوط به‌مجموع زاویه‌های درونی مثلث ۲) حل مساله‌ی مربوط به‌بخش کردن صفحه به‌چند ضلعی‌های منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظم). ۳) پی بردن به کمیت‌های گنگ ۴) حل هندسی معادله‌ی درجه‌ی دوم. ۵) قاعده‌ی حل این مساله که با در دست داشتن دو شکل هندسی، شکلی بسازید که با یکی برابر و با دیگری متشابه باشد.

۱. البته نباید تصور کرد که مطالعه‌ی عددها توسط فیثاغورس به‌صورت علمی و امروزی انجام می‌گرفته، بلکه این مطلب بیش‌تر حالتی عرفانی داشته و از محتوا روش و اندیشه‌ی مکتب فیثاغورس حاصل می‌شده است. با استناد به‌شواهد موجود می‌توانیم بگوییم که یونانیان به‌دلیل روح حاکم بر جامعه‌شان با این‌که در زمینه‌ی علم هندسه به‌پیش‌رفت‌های بسیار دست یافتند، اما در زمینه‌ی شمارش و علم عددها پیش‌رفت قابل ملاحظه‌ای نکردند برای اطلاع بیش‌تر درباره‌ی این موضوع و چرایی آن به‌کتاب «سرگذشت ریاضیات» اثر استاد پرویز شهریاری، که توسط انتشارات مهاجر به‌چاپ رسیده است مراجعه کنید.

ورود به‌مطلب

اما مهم‌ترین میراث فیثاغورس قضیه‌ای از او که با عنوان قضیه‌ی فیثاغورس شناخته می‌شود، می‌باشد. به‌احتمال زیاد، این قضیه تنها قضیه‌ی غیر پیش پا افتاده‌ی ریاضی است که بیش‌تر آن را می‌شناسند. این قضیه از جمله قضیه‌هایی است که در تاریخ ریاضی و به‌ویژه در هندسه‌ی پایه بسیار نقل شده است و هنوز هم بسیاری از مردم به‌دنبال یافتن تعمیم‌ها، متشابهات، اثبات‌ها و کاربردهای جدیدی از آن می‌باشند.

بنا به‌گفته‌ی یکی از افسانه‌ها، به‌ظاهر فیثاغورس قضیه‌ی خود را هنگامی که در تالارهای اصلی کاخ پلی کرات برای پذیرفته شدن عضوها ایستاده بود، کشف کرد. در آن هنگام فیثاغورس سنگ تراشیده شده‌ی دایره‌شکلی را که در آن مثلث قایم‌الزاویه‌ای محاط شده بود، تصور می‌کرد. او متوجه شد که مساحت دایره‌ی ساخته شده بر روی وتر مثلث قایم‌الزاویه برابر مساحت دایره‌های ساخته شده بر روی اضلاع زاویه‌ی قایمه در آن مثلث می‌باشد. در آن هنگام فیثاغورس به‌این فکر افتاد که آیا این قضیه برای هنگامی که ضلع‌های زاویه‌ی قایمه برابر نباشند[1] و یا هنگامی که اشکال دیگری بر روی ضلع‌های زاویه‌ی قایمه ساخته شده باشد نیز برقرار است...

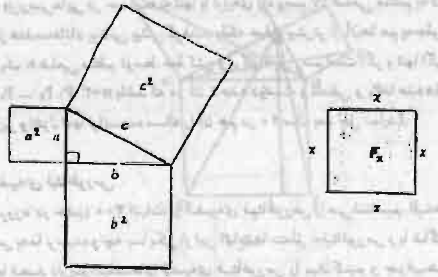
شکل ۱

به‌هر حال بنا به‌دانسته‌های ما از نقاشی‌ها، متن‌های مذهبی، افسانه‌ها و داستان‌های قوم‌هایی چون بابل، مصر و چین این قضیه در حدود سال‌های ۱۵۰۰ تا ۱۸۰۰ پیش از میلاد شناخته شده بوده است. یکی ازداستان‌های مشهور (و شاید افسانه) معتقد است که کشاورزان مصری از طنابی که در یک مکان مسطح به‌صورت مثلث قایم‌الزاویه و با ضلع‌های ۴،۳ و ۵ گره خورده بود، برای اندازه‌گیری و مشخص ساختن دوباره‌ی زمین‌های کشاورزی سیل‌زده‌شان که همه

۱. توجه داشته باشید منظور از این‌که دایره بر روی یک ضلع مثلث ساخته شده این است که مرکز دایره بر روی آن ضلع قرارگرفته که در این حالت دو ضلع زاویه قایمه با هم برابر می‌شوند و مساحت دایره‌های ساخته‌شده بر روی آن‌ها نیز با هم‌برابر است.

ساله با طغیان رودخانه‌ی نیل از بین می‌رفتند استفاده می‌کردند. پس قضیه فیثاغورس مثالی ابتدایی از حقیقتی مهم است که بارها به‌طور مستقل کشف شد، اما فیثاغورس بود که برای نخستین بار آن را با فرمول معین بیان کرد و با استدلال قیاسی به‌اثبات رساند.

همان‌طور که می‌دانیم، قضیه‌ی فیثاغورس بیان می‌کند که مجموع مربع‌ها اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی ۹۰ درجه در مثلث قایم‌الزاویه برابر مربع و اندازه‌ی وتر این مثلث می‌باشد.



شکل ۲

(Fx مساحت مربع به‌ضلع x می‌باشد)

$a^2+b^2=c^2$ یا $Fa+Fb=Fc$

یکی از قدیمی‌ترین نتیجه‌های قضیه‌ی فیثاغورس بحث بر قابل اندازه‌گیری بودن قطر یک مربع می‌باشد. این حقیقت نخستین نشانه‌ی وجود عددهای گنگ بود که پیشگامی دگرگونی ریاضیات پایه را برای رسیدن به‌عددهای حقیقی برعهده داشت. چون فیثاغورسیان تحقیقات خود را بر روی مربع به‌ضلع یک انجام می‌دادند تا مدت‌ها $\sqrt{2}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود.[1] اما بعدها بنا به‌گفته‌ی افلاتون، تئودوروس (حدود ۴۲۵ پیش از میلاد) نشان داد که $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ و... و $\sqrt{17}$ نیز عددهای گنگ هستند.

فیثاغورسیان با کشف عددهای گنگ متحیر شدند و تلاش کردند که آن را به‌صورت یک راز نگه دارند زیرا این کشف ضربه‌ی محکمی بر فلسفه‌ی فیثاغورسی، که همه چیز را به‌عدد

۱. امکان دارد ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}$) که نسبت ضلع پنج‌ضلعی منتظم به‌قطر آن است، نخستین عدد گنگ شناخته شده باشد.

طبیعی وابسته می‌دانست، وارد می‌کرد. اما سرانجام کابوس آن‌ها (یعنی افشای وجود عددهای گنگ) توسط هیپاسوس فاش شد و او با انجام این عمل از گروه اخراج گردید و هنگامی که در یک سانحه‌ی دریایی جان خود را از دست داد فیثاغورسیان آن را تنبیه الهی دانستند.[1]

هیپاسوس نخستین کسی بود که به‌ساختن یک پنج‌ضلعی منتظم[2] و تغییر مساله به‌قابل رسم بودن آن پرداخت. تنها در سال ۱۷۹۶ بود که این مساله توسط گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) حل شد. او در کتاب «بررسی‌هایی در حساب» نه تنها با ارایه‌ی راه رسم ۱۷ ضلعی منتظم به‌کمک خط‌کش و پرگار از هندسه‌دانان یونانی پیشی گرفت، بلکه خیلی بیش‌تر از آن‌ها هم به‌جلو رفت و ثابت کرد که: یک n ضلعی منتظم توسط خط‌کش و پرگار قابل رسم است اگر و تنها اگر n توانی از ۲ باشد یا $n=2^r P_1 P_2 \dots P_k$ باشد که در آن r عدد درست و نامنفی و P_iها عددهای اول فرما[3] هستند (پیر وانتزل تنها توانست، مساله را آن هم در ۴۰ سال بعد حل نماید).

اثبات قضیه‌ی فیثاغورس

ما امروزه در حدود ۴۰۰ اثبات از قضیه‌ی فیثاغورس را می‌شناسیم. البته اثبات خود فیثاغورس به‌ما نرسیده و چه بسا یکی از این اثبات‌ها متعلق به‌فیثاغورس و یا شاگردان او باشد. در این‌جا قصد داریم اثبات‌های قضیه‌ی فیثاغورس را بیان کنیم و جواب‌های معادله‌ی فیثاغورسی (یعنی $x^2+y^2=z^2$) را در حالت کلی بیابیم و ببینیم که آیا امکان دارد این قضیه را با ایجاد تغییراتی برای هر مثلثی به‌کار بریم.

در این قسمت نخستین اثبات همان اثباتی است که اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود آورده است (البته با کمی تغییر در بیان جمله‌ها) و بقیه‌ی اثبات‌ها بدون کلام می‌باشند که به‌وسیله‌ی ریاضی‌دانان مختلفی ارایه شده‌اند.

۱ـ اثبات اقلیدس: این اثبات به‌گواهی پروکلس متعلق به‌خود اقلیدس است. برهان اقلیدس

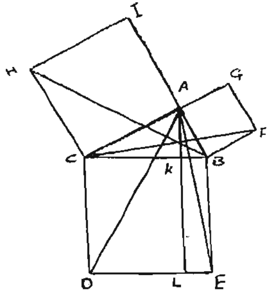
---

۱. البته جناب استاد شهریاری در کتاب «سرگذشت ریاضیات» و هم‌چنین ایوز در کتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات» مدعی شده‌اند که هیپاسوس به‌وسیله‌ی بیگانگان در دریا به‌هلاکت رسیده است نه در یک سانحه‌ی دریایی. روایت دیگری نیز در این باره وجود دارد، که بنابرآن هیپاسوس از جامعه‌ی فیثاغورسی طرد گشته و آن‌ها برای او قبری برپا کرده‌اند، تا آن قبر نمادی برای مردن وی باشد.

۲. به‌یک چندضلعی که رأس‌های آن به‌فاصله‌های مساوی روی یک دایره قرار دارند چندضلعی منتظم می‌گوییم.

۳. منظور از عددهای اول فرما عددهای به‌فرم کلی $F=2^{2^n}+1$ می‌باشند. فرما یقین داشت که تمام این عددها، اول هستند. (با این‌که تنها پنج تای آن‌ها را حساب کرده بود: ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷) اما اویلر ریاضی‌دان سوییسی یک قدم پیش‌تر گذاشت و نشان داد که عدد F_5 یک عدد اول نیست. امروزه درباره‌ی این‌که آیا عدد اول فرمای دیگری وجود دارد، فعالیت‌های زیادی انجام شده اما تمامی نتایج، منفی بوده است و بسیاری از ریاضی‌دانان فکر می‌کنند که عدد اول فرمای دیگری وجود ندارد.

برای قضیه‌ی فیثاغورس مبتنی بر شکل ۳ و توضیحات داده شده می‌باشد. از شکل ۳ گاهی با عنوان صندلی عروس یاد کرده‌اند.



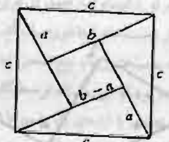
شکل ۳

مربع BCDE را روی ضلع BC (وتر) و مربع‌های ABFG و AGHI را به‌ترتیب روی ضلع‌های AB و AC می‌سازیم. از نقطه‌ی A خطی موازی با ضلع‌های CD و BE رسم می‌کنیم تا مربع را در دو نقطه‌ی K و L قطع کند. نقطه‌ی A را به E و F را به C وصل می‌کنیم. از آن‌جا که ۲ زاویه $B\hat{A}C$ و $B\hat{A}G$ قایمه‌اند دو ضلع AC و AG در یک امتداد قرار می‌گیرند و به‌همین ترتیب AB و AI نیز در یک امتداد می‌باشند. چون زاویه‌ی $E\hat{B}C$ با زاویه‌ی $F\hat{B}A$ برابر است، اگر زاویه‌ی $A\hat{B}C$ را به‌هر کدام از آن‌ها اضافه کنیم دو زاویه‌ی $F\hat{B}C$ و $E\hat{B}A$ با هم برابر می‌شوند. حالا دو مثلث $A\hat{B}E$ و $F\hat{B}C$ به‌حالت ضلع، زاویه، ضلع هم‌نهشت‌اند در این‌جا ثابت می‌شود که دو برابر مثلث $A\hat{B}E$ برابر مستطیل BKLE و دو برابر مثلث $F\hat{B}C$ برابر مربع ABFG است. به‌همین ترتیب با وصل کردن A به D و B به H ثابت می‌شود که مساحت مستطیل CBED برابر مساحت مربع AICH می‌باشد یعنی تمام مربع BCDE برابر دو مربع ACHI و ABFG است و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۲ـ اثبات بها سکاره (Baha Skara): ریاضی‌دان هندی سده‌ی ۱۲ میلادی. (شکل ۴).

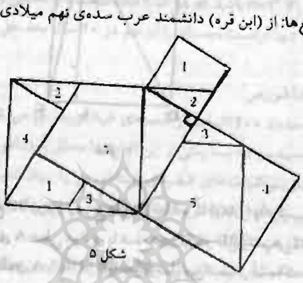
$$(b-a)^2+\frac{4ab}{2} = c^2 \Rightarrow$$

$$a^2+b^2=c^2$$



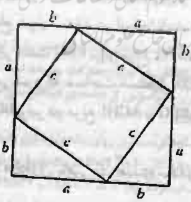
شکل ۴

۳ـ بریدن مربع‌ها: از (ابن قره) دانشمند عرب سده‌ی نهم میلادی (شکل ۵).



شکل ۵

۴ـ تشریح یک مربع: از کتاب Chou-Pei Suon-Ching از نویسنده‌ی ناشناس چینی در حدود ۲۵۰ پیش از میلاد (شکل ۶).

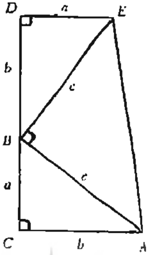


شکل ۶

$$(a+b)^{۲}= c^{۲}+۴\ \frac{ab}{۲} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

۵ـ ذوزنقه‌ی گارفیلد (شکل ۷).

$$\frac{a+b}{۲}\ .\ (a+b)=\ ۲\ .\ \frac{ab}{۲}\ +\ \frac{۱}{۲}\ c^{۲} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$



شکل ۷

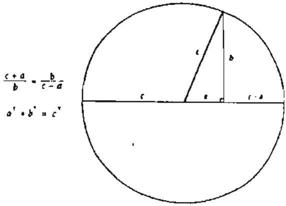
این اثبات در سال ۱۸۸۱ توسط گارفیلد بیستمین رییس‌جمهور ایالات متحد ارایه شده است. از قرار معلوم ایرانی‌ها و هندی‌ها در سده‌ی هفتم این اثبات را می‌دانسته‌اند. توجه داشته باشید که این شکل در واقع از نصف شدن شکل قبلی حاصل می‌شود.

۶ـ اثبات مایکل هاردی (شکل ۸).

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

۷ـ اثباتی از داوینچی در سده‌ی پانزدهم (شکل ۹).

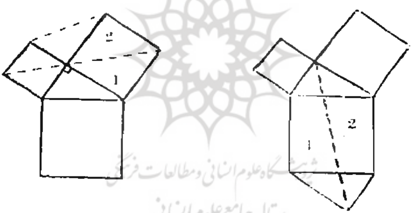
اما همان‌طور که مشاهده کردید معادله‌ی $x^2+y^2=z^2$ برای تمامی عددهای صحیح صادق نیست و به‌ازای مقدارهای خاصی که به‌سه تایی‌های فیثاغورسی مشهورند، برقرار می‌باشد. در واقع هر سه تایی فیثاغورسی متناظر با یک مثلث قایم‌الزاویه‌ای است که وتر و اضلاع زاویه‌ی قایمه‌ی آن با این عددها بیان شده‌اند. امروزه مشخص شده است که سه تایی های فیثاغورسی یک مجموعه‌ی بی‌پایان را تشکیل می‌دهند.



شکل ۸

بررسی‌هایی که توسط نوگه باوئر و زاکس بر روی لوح پلیمتن Plimpton۳۲۲ (که قدمتی بین ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ پیش از میلاد دارد) انجام شده، نشان می‌دهد که بابلیان قدیم چگونگی محاسبه‌ی چنین سه تایی‌هایی را می‌دانسته‌اند. به‌هر حال این سه تایی‌ها توسط عبارت‌های

$x = (m^2 - n^2)t$ و $y = 2mnt$ و $z = (m^2 + n^2)t$ $((m, n) = 1,\ m, n, t \in Z)$

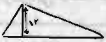


شکل ۹

به‌دست می‌آیند. به‌عنوان نمونه اگر ۲=m و ۱=n و ۱=t باشد، ضلع‌های مثلث مصری یعنی سه تایی (۵ و ۴ و ۳) = (x, y, z) حاصل می‌شود. [برای اطلاع بیش‌تر به‌سرچشمه‌های شماره‌ی ۱، ۳، ۴ مراجعه کنید.]

حل مساله‌ی یافتن سه تایی‌های فیثاغورسی ما را به‌مساله‌های کلی‌تری در این زمینه رهنمون

می‌سازد که یکی از آن‌ها ایجاد مثلث‌های هرونی[1] می‌باشد. اگر دو مثلث فیثاغورسی با ضلع‌های زاویه‌ی قایمه یکسان را در نظر بگیریم و آن دو ضلع برابر را طوری روی هم قرار دهیم که دو ضلع دیگر زاویه قایمه در یک امتداد باشند یک مثلث هرونی حاصل می‌شود برای نمونه در دو مثلث فیثاغورسی با ضلع‌های (۱۳ و ۱۲ و ۵) و (۳۷ و ۱۲ و ۳۵) یک مثلث هرونی با ضلع‌های (۴۰ و ۱۳ و ۳۷) حاصل می‌شود که ارتفاعی برابر ۱۲ دارد و مساحت آن برابر ۲۴۰ واحد مربع می‌باشد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

با وجود این‌که تعداد قابل ملاحظه‌ای از مثلث‌های هرونی را می‌شناسیم، قاعده‌ای کلی برای یافتن تمامی این مثلث‌ها در اختیار نداریم. در حالت کلی برای بررسی این‌که یک مثلث دلخواه هرونی می‌باشد یا نه ساده‌ترین راه به‌کار بردن فرمول هرونی مساحت مثلث (یعنی فرمول زیر) می‌باشد.

$$S = \sqrt{\frac{P}{2}(\frac{P}{2} - x)(\frac{P}{2} - y)(\frac{P}{2} - z)}$$

(S = مساحت، P = محیط، x و y و z ضلع‌های مثلث می‌باشند).

اما گذشتن از این مطلب بدون بیان قضیه‌ی آخر فرما خالی از لطف است.

فرما (۱۶۰۱؟ـ۱۶۶۵)[2] ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی است که حرفه‌ی اصلی‌اش وکالت بود و ریاضیات را به‌خاطر علاقه‌ای که به آن داشت مطالعه می‌کرد. علاقه‌ای که باعث شد او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان سده‌ی هفدهم گردد. او در زمان زندگی‌اش نتیجه‌گیری‌های نظری ـ محاسبه‌ای خود را به‌چاپ نرساند و بیش‌تر آن‌ها بعد از مرگش در نامه‌ها و کاغذهایی که از او پیدا شد، به‌چاپ رسید. اثبات‌هایی که فرما برای نتیجه‌گیری‌های خود داشته به‌ما نرسیده و بیش‌تر مسایل او به‌وسیله‌ی ریاضی‌دانان بعد از وی، به‌ویژه اولر تنظیم شده است.

---

۱. مثلث هرونی، مثلثی است که اندازه‌ی ضلع‌ها و مساحت آن عددی صحیح می‌باشد و زاویه ۹۰ درجه ندارد.

۲. در واقع به‌دلیل‌های گوناگون زادروز فرما به‌صورتی که نویسندگان مختلف داده‌اند از ۱۵۹۰ تا ۱۶۰۸ متغیر است و ما با نظر به‌سنگ قبر وی، سن او را ۵۷ سال می‌دانیم با اتکا به‌این مطلب و به‌دلیل وجود این اطلاعات متناقض، تاریخ تولد و مرگ فرما به‌صورت (۱۶۰۱؟ـ۱۶۶۵) نوشته‌ایم. (به‌منبع شماره ۱ مراجعه شود)

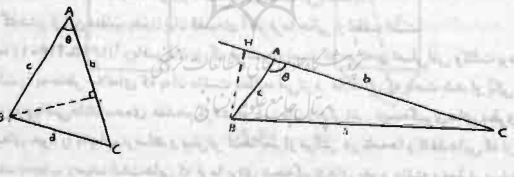
از جمله مهم‌ترین قضیه‌های این دانشمند بزرگ فرانسوی قضیه‌ای است که به‌قضیه‌ی آخر فرما مشهور شده است. او این قضیه را بر حاشیه‌ی صفحه‌ای از کتاب «حساب» دیو فانت که به‌بررسی معادله‌ی سیال $x^2+y^2=z^2$ پرداخته بود، بیان کرد و نوشت: «به‌هیچ وجه نمی‌توان یک توان سوم را به‌مجموع دو توان سوم، یا یک توان چهارم را به‌مجموع دو توان چهارم و، به‌طور کلی، یک توان با نمایی بزرگ‌تر از ۲ را به‌مجموع دو توان با همان تبدیل کرد. من اثبات عجیبی برای این حکم پیدا کرده‌ام، ولی در این‌جا به‌دلیل کمبود جا نمی‌توانم آن را بیان کنم».

جالب این‌که تنها اثبات کاملی که از فرما باقی مانده، اثبات همین قضیه در زمانی که $n=4$ است می‌باشد.

سالیان درازی به‌طول انجامید تا این قضیه بتواند به‌اثبات برسد. البته این قضیه در حالت‌های جزیی توسط ریاضی‌دانان مختلفی به‌اثبات رسیده اما سرانجام وایلز A.Wiles بود که توانست آن را در سال ۱۹۹۵ در حالت کلی و در ۲۰۰ صفحه به‌اثبات برساند.

آخرین مطلبی که می‌خواهیم در این بخش به‌بررسی آن بپردازیم این است که آیا می‌توانیم با تغییر قضیه‌ی فیثاغورس، آن را برای هر مثلثی به‌کار ببریم و یا به‌بیان روشن‌تر، آیا می‌توانیم بین ضلع‌های هر مثلث دلخواه رابطه‌ای را ایجاد کنیم؟ پاسخ به‌این پرسش مثبت است و با قانونی با عنوان قانون کسینوس‌ها بیان می‌شود. در این‌جا تنها، صورت این قضیه را می‌آوریم.

قضیه‌ی (قانون کسینوس‌ها): مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. اگر a, b, c طول ضلع‌های این مثلث باشد و θ زاویه بین AC, AB آن‌گاه $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$ (به‌شکل ۱۱ توجه کنید).



شکل ۱۱

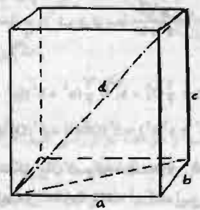
همان‌طور که مشاهده می‌شود اگر $\theta=\pi/2$ باشد آن‌گاه قانون کسینوس‌ها به‌قضیه‌ی فیثاغورس تبدیل می‌گردد.

تعمیم‌ها و مشابهات قضیه‌ی فیثاغورس

اکنون قصد داریم بحث‌هایی را برای بیان مشابهات قضیه‌ی فیثاغورس در بعدهای گوناگونی

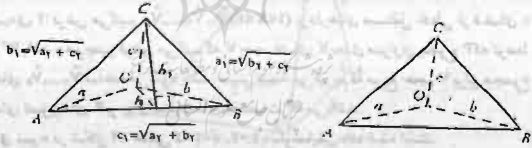
از فضا انجام دهیم. در آغاز جعبه‌ای با ضلع‌های c, b, a را بررسی می‌کنیم. در این جعبه قطر مورب d از رابطه‌ی $d^2=a^2+b^2+c^2$ محاسبه می‌شود برای اثبات این مورد نیز دوباره می‌توانیم از قضیه‌ی فیثاغورس کمک بگیریم:

توسط استقرا به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که خط مورب d از یک فضای n بعدی با اضلاع به‌طول $a_1, a_2, ..., a_n$ از دستور $d^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ محاسبه می‌شود. به‌بیان شایسته‌تر این فرمول بسط فرمول پیشین برای فضای بی‌نهایت بعدی در آنالیز تابعی می‌باشد. (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

در ادامه‌ی مطلب، قضیه‌هایی را بیان می‌کنیم که با قضیه‌ی فیثاغورس مرتبط‌اند و همگی پیشینه‌ای تاریخی دارند.



شکل ۱۳

قضیه ۱: فرض می‌کنیم چهاروجهی OABC یک چهاروجهی قایم‌الزاویه باشد. یعنی هریک از ضلع‌های OC, OB, OA دو به‌دو در نقطه‌ی O بر هم عمود باشند. سپس می‌توانیم بگوییم که

مربع مساحت سطح روبه‌رو به‌راس O برابر مربع مساحت وجه‌های دیگر می‌باشد. یعنی:

$$S(A\hat{B}C)^2=S^2(O\hat{B}C)+S^2(O\hat{B}C)+S^2(O\hat{A}C)$$

اثبات: مساحت مثلث‌های قایم‌الزاویه $O\hat{B}C, O\hat{A}C, O\hat{A}B$ به‌این صورت حاصل می‌شود: $SO\hat{A}C=\frac{ac}{2}, SA\hat{B}C=\frac{bc}{2}, SO\hat{A}B=\frac{ab}{2}$. سپس ارتفاع h از مثلث $O\hat{A}B$ که از رأس O به‌ضلع AB وارد شده است نیز توسط $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ محاسبه می‌گردد. پس می‌توانیم بگوییم که ارتفاع h_1 از مثلث $A\hat{B}C$ که از رأس C خارج می‌شود. توسط $h_1^2=c^2+h^2=c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ به دست می‌آید. و از این جا می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$S^2(A\hat{B}C)=\frac{1}{4}C_1^2\times h_1^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2})=$$
$$\frac{1}{4}(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)=S^2(O\hat{B}C)+S^2(O\hat{C}A)+S^2(O\hat{A}B)$$

اگر ما قضیه‌ی بالا را به‌این شکل بیان کنیم که مثلث‌های $O\hat{C}A, O\hat{B}C, O\hat{A}B$ ضلع‌ها و مثلث $A\hat{B}C$ وتر چهاروجهی قایمه‌ی OABC باشد آن گاه این قضیه می‌گوید که: مجموع مربع‌های ضلع‌های چهاروجهی قایم‌الزاویه برابر مربع وتر آن است.

پروفسور لیتمان معتقد است که این شباهت (یعنی یافتن معادل فضایی قضیه‌ی فیثاغورس) را برای نخستین بار یوهان فولگابر اهل اولم آلمان در سال ۱۶۲۲ پیدا کرده است.

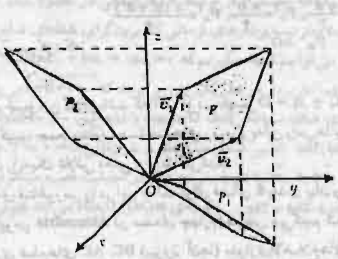
در این جا این را نیز یادآور می‌شویم که می‌توان اثبات دیگر قضیه ۱ را از قانون هرون به‌دست آورد.

قضیه‌ی ۲: فرض می‌کنیم $(1\leq K\leq n)\vec{V}_1, \vec{V}_2,...,\vec{V}_k$ بردارهای مستقل خطی از فضای n بعدی R^n باشد و هم‌چنین فرض می‌کنیم که V حجم فضای K بعدی متوازی سطوح P که توسط بردارهای $\vec{V}_1,...,\vec{V}_k$ ساخته می‌شود باشد. سپس نتیجه می‌گیریم که مربع حجم V برابر مجموع مربع‌های تصویرهای P بر روی صفحه‌های مختصات R^n می‌باشد.

برای نمونه در شکل ۱۴ حالتی که $k=2, n=3$ باشد نمایش داده شده است.

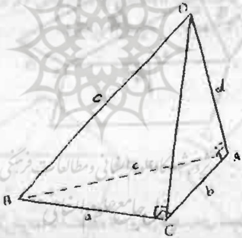
فضای بسیار جالب توجه دیگری که توسط قضیه‌ی فیثاغورس قابل اندازه‌گیری می‌باشد به‌این صورت بیان می‌شود. اگر حالت عادی قضیه‌ی فیثاغورس را به‌صورت $a^2-c^2+b^2=0$ بنویسیم می‌توانیم آن را به‌این گونه تعبیر کنیم:

هنگامی که به‌دور مثلث $A\hat{B}C$ در جهت $C \to B \to A$ می‌چرخیم به‌طور متناوبی مجموع مربع‌های ضلع‌های مقابل برابر صفر می‌باشد.



شکل ۱۴

حال اجازه دهید که این مطلب را در فضا نیز بررسی کنیم. فرض می‌کنیم مثلث $A\hat{B}C$ مثلثی قایم‌الزویه در رأس C باشد. خطی قایم، از نقطه‌ی A واقع بر صفحه‌ی ABC خارج می‌کنیم و نقطه‌ی D را بر روی آن مشخص می‌سازیم. حاصل این عمل‌ها چهاروجهی ABCD می‌باشد که گاهی orthosoheme نامیده می‌شود.



شکل ۱۵

فرض می‌کنیم F_D، F_C، F_B، F_A مساحت وجه‌های این چهاروجهی که به‌ترتیب در مقابل بردارهای B،A،D،C قرار دارند باشند (توجه کنید که مثلث $A\hat{B}C$ قایم‌الزاویه می‌باشد) داریم:

و به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که:

$$F_B^2=\frac{b^2d^2}{4},\ F_C^2=\frac{c^2d^2}{4},\ F_D^2=\frac{a^2b^2}{4},\ F_A^2=\frac{a^2(b^2+d^2)}{4}$$

$$F_A^2 - F_C^2 + F_B^2 - F_D^2 = 0$$

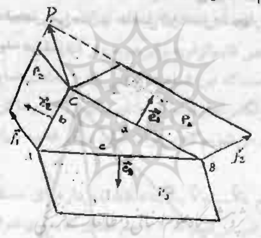
و این می‌تواند توضیح این گفتار باشد که اگر ما در جهت $A \to C \to B \to D$ به‌دور این چهاروجهی حرکت کنیم، جمع متناوب مساحت‌های روبه‌رو به‌این راس‌ها برابر صفر می‌شود.

در این‌جا خوانندگان را به‌یک تلاش ذهنی دعوت می‌کنیم:

سعی کنید قضیه‌ی فیثاغورس را در این حالت برای فضای n بعدی بیان و به‌اثبات برسانید.

قضیه‌ی ۳: [از پاپوس Alexandria در سده‌ی چهارم] فرض می‌کنیم که $A\hat{B}C$ یک مثلث دلخواه باشد. بر روی ضلع‌های BC, AC (بیرون آن‌ها) متوازی‌الاضلاع‌های با مساحت‌های P_1, P_2 بنا می‌کنیم و فرض می‌کنیم که T نقطه‌ی برخورد امتداد ضلع‌های ۲ متوازی‌الاضلاع باشد (ضلع‌هایی که با ۲ ضلع AC و BC موازی‌اند). بر روی ضلع AB نیز متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم که ضلع‌های کوچک آن موازی و برابر CT باشد اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر روی AB را P_3 بنامیم داریم: (شکل ۱۶).

$$P_1 + P_2 = P_3$$



شکل ۱۶

این مورد نیز دوباره می‌تواند با استفاده از روش هندسه‌ی محض به‌اثبات برسد، اما ما اثباتی متفاوت را ترجیح می‌دهیم. در ابتدا احتیاج به‌دانستن حقیقتی ساده داریم. فرض می‌کنیم a طول قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر ضلع BC باشد و $\vec{e}$ برداری که عمود بر قاعده و $\vec{f}$ بردار‌یال ضلع دیگر این متوازی‌الاضلاع باشد. مساحت A از این متوازی‌الاضلاع به‌کمک $A=a\vec{e}.\vec{f}$ (که در آن $\vec{e}.\vec{f}$ ضرب داخلی را مشخص می‌سازد) به‌دست می‌آید و این یک مفهوم آشکار است، چون $\vec{e}.\vec{f}$ تنها ارتفاع متوازی‌الاضلاع می‌باشد. در ادامه، باید از حقیقت مشهور

دیگری استفاده کنیم. (که نخستین بار توسط مینکوفسکی در حدود سال ۱۹۰۰ اشاره شده است) اگر e_1, e_2, e_3 به‌ترتیب بردارهای نرمالی که برون‌گرای نقطه‌ای ضلع‌های c,b,a از مثلث دلخواه ABC باشند می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$ است. برای فهم این مورد ضلع‌های c, b, a را همانند بردار در نظر بگیرید، می‌بینید که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ می‌باشد و این به‌معنای آن است که بردارهای $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ نمایانگر نقطه O هستند و آن‌ها بین 0° و 90° تناوب می‌کنند و سپس به‌ترتیب به $a\vec{e_1}, b\vec{e_2}, c\vec{e_3}$ تغییر شکل می‌دهند. و در زمانی که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ باشند عبارت $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$ را نتیجه می‌دهند. (در حقیقت قضیه مینکوفسکی در زمانی که ضرب عددی $a\vec{e_1} = b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$ قضیه‌ی Cosها را ایجاد می‌کند هم‌ارز قانون فیثاغورس می‌باشد. و برعکس.

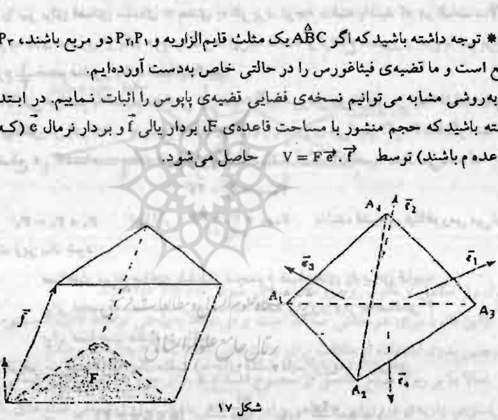
اثبات قضیه‌ی ۳: با توجه به‌این توضیحات داریم

$$P_1 = a\vec{e_1}.\vec{f_1},\ \ P_2 = b\vec{e_2}.\vec{f_2},\ \ P_3 = -c\vec{e_3}.\vec{f_3}$$

از طرف دیگر روشن است که: $\vec{CT}.\vec{e_1} = \vec{e_1}.\vec{f}$ (ارتفاع P_1) می‌باشد.

* توجه داشته باشید که اگر $\hat{ABC}$ یک مثلث قایم‌الزاویه و P_2, P_1 دو مربع باشند، P_3 نیز یک مربع است و ما قضیه‌ی فیثاغورس را در حالتی خاص به‌دست آورده‌ایم.

به‌روشی مشابه می‌توانیم نسخه‌ی فضایی قضیه‌ی پاپوس را اثبات نماییم. در ابتدا توجه داشته باشید که حجم منشور با مساحت قاعده‌ی F، بردار یالی $\vec{f}$ و بردار نرمال $\vec{e}$ (که متعلق به‌قاعده م باشند) توسط $V = F\vec{e}.\vec{f}$ حاصل می‌شود.



شکل ۱۷

حالا اگر فرض کنیم $A_1A_2A_3A_4$ یک چهاروجهی، F_i مساحت سطح روبه‌رو به A_i و $\vec{e}_i$ بردار نرمال (بیرون‌گرا) آن سطح باشد. دوباره با استفاده از قضیه مینکوفسکی داریم:

$$F_1\vec{e_1} + F_2\vec{e_2} + F_3\vec{e_3} + F_4\vec{e_4} = 0$$

بیرون سه‌وجهی این چهاروجهی با سطح‌های به‌مساحت F_i(۳, ۲, ۱=i) به‌ترتیب منشورهایی مثلثی با بردارهای یالی $\vec{f_i}$(۳ و ۲ و ۱=i) را می‌سازیم. فرض می‌کنیم T نقطه‌ی برخورد صفحه‌های متعلق به‌قاعده‌های دیگر (موازی) باشد. بیرون وجه چهارم با مساحت F_4 منشوری با بردار یالی $\overrightarrow{TA_4}$ را می‌سازیم و منشورهای حاصل را با V_i (۴ و ۳ و ۲ و ۱ = i) مشخص می‌کنیم سپس $(i = 1, 2, 3)$ $V_i = F_i\vec{e_i}.\vec{f_i}$ و $V_4 = F_4\vec{e_4}.\overrightarrow{TA_4} = -F_4\vec{e_4}.\overrightarrow{TA_4}$ و این روشن است که (ارتفاع منشور) (۳ و ۲ و ۱ = i) $\overrightarrow{A_4T}.\vec{e_i} = \vec{f_i}.\vec{e_i}$ می‌شود از این جا به‌بعد داریم:

$$V_4 = -F_4\vec{e_4}.\overrightarrow{A_4T} = (F_1\vec{e_1} + F_2\vec{e_2} + F_3\vec{e_3}).\overrightarrow{A_4T} =$$
$$F_1\vec{e_1}.\overrightarrow{A_4T} + F_2\vec{e_2}.\overrightarrow{A_4T} + F_3\vec{e_3}.\overrightarrow{A_4T} = F_1\vec{e_1}.\vec{f_1} + F_2\vec{e_2}.\vec{f_2} + F_3\vec{e_3}.\vec{f_3} = V_1 + V_2 + V_3$$

در این‌جا قضیه‌ی پاپوس در فضای سه‌بعدی به‌اثبات رسید. با تغییراتی روشن می‌توان اثبات مشابهی را نیز برای فضای ساده‌ی n بعدی به‌کار برد. توجه داشته باشید که در اثبات بالا ما می‌توانیم به‌جای منشور از یک هرم، با شرط این‌که قاعده و ارتفاع منشور و هرم با هم برابر و حجم هرم $\frac{1}{3}$ حجم منشور باشد استفاده کنیم.

* حالا می‌خواهیم به‌تعمیم متفاوتی از قضیه‌ی فیثاغورس بپردازیم. در ابتدا اثبات چهارم قضیه‌ی فیثاغورس (در کتاب چو-پی-سان چینگ) را یادآوری می‌کنیم. اگر F_x نشان‌گر مساحت مربع به‌ضلع x , F مساحت مثلث قایم‌الزاویه $A\hat{B}C$ باشد آن‌گاه آن قضیه نشان می‌دهد که

$$F_{a+b} = F_c + 4F$$

پس $F_a + F_b = F_c$ تنها اگر $F_{a+b} = F_c + 4F$ باشد، قضیه‌ی فیثاغورس می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

مساحت مربع ساخته شده از مجموع ضلع‌های زاویه‌ی قایمه
برابر مجموع مساحت مربع ساخته شده بر روی وتر به‌اضافه‌ی ۴
برابر مساحت مثلث می‌باشد.

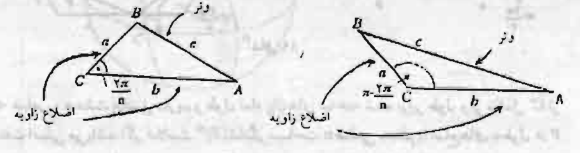
حالا فرض می‌کنیم $A\hat{B}C$ یک مثلث (به‌جای مثلث قایم‌الزاویه) با زاویه‌ی

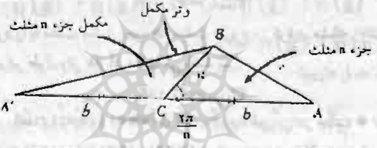
$$\gamma = \pi - \frac{2\pi}{n} \quad \text{یا} \quad \gamma = \frac{2\pi}{n} \quad (n \in Z, n \geq 3)$$

باشد. همان‌طور که در قضیه‌ی فیثاغورس مربع‌هایی را می‌ساختیم (بر روی ضلع یا مجموع ضلع‌ها، حالا نیز قصد داریم که یک n ضلعی منتظم را بناکنیم. در این‌جا نیز برای حالتی که n=4

باشد سازه‌ی ما به‌قضیه‌ی فیثاغورس تبدیل می‌شود.(*)

برای این منظور فرض می‌کنیم ΔABC مثلثی با زاویه $(n \geq 3)$ $\gamma = \frac{\gamma}{n}$ باشد و آن را جزء n مثلث می‌نامیم. و اگر از مکمل آن زاویه (یعنی $\gamma = \pi - \frac{2\pi}{n}$) استفاده کنیم مثلثی حاصل می‌شود که آن را مکمل جزء n مثلث می‌نامیم. ما ضلع‌های b,a را که مجاور γ می‌باشند ضلع‌های زاویه می‌نامیم و ضلع c را که روبه‌روی γ است وتر مثلث نام‌گذاری می‌کنیم. هر مثلث دارای مثلثی مکمل و وتری مکمل می‌باشد.





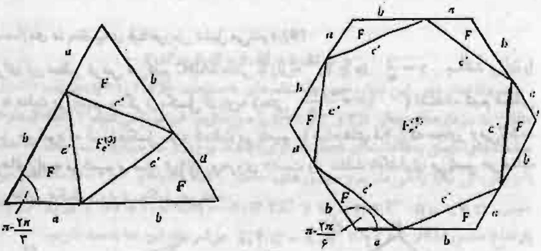
شکل ۱۸

طول وتر مکمل از قانون روبه‌رو محاسبه می‌شود: $C'^2 = 2(a^2+b^2)-c^2$.

(این قانون برای هر مثلثی صادق است و می‌تواند به‌راحتی توسط قانون کسینوس‌ها و یا هم‌چنین بدون استفاده از مثلثات برای مثلث‌های $A'\hat{B}C$, $A\hat{B}C$ به‌اثبات برسد).

حالا ما بر روی ضلع حاصل از مجموع اضلاع b, a از جزء n مثلث یک n ضلعی منتظم را می‌سازیم. زاویه‌ی درون این n ضلعی برابر $\pi\frac{2\pi}{n}$ می‌باشد. بر روی تمامی ضلع‌های یال‌های n-ضلعی طول‌های b, a را مشخص می‌کنیم. و نقطه‌هایی را که این طول‌ها را از هم جدا می‌سازد به‌هم وصل می‌کنیم.

با استفاده از هم‌نهشتی، (ضلع، زاویه، ضلع) متوجه می‌شویم که در راس‌هایی از این



شکل ۱۹

n- ضلعی، n مثلث مکمل داریم و طول تمام یال‌های ساخته شده برابر طول وتر مکمل C' از مثلث اصلی می‌باشد اگر علامت $F_x^{(n)}$ نشان‌گر مساحت n ضلعی منتظم با ضلع‌های به‌طول x، F مساحت جزء nام مثلث باشد نتیجه می‌گیریم که مساحت مثلث مکمل برابر مثلث اصلی است.

در شکل قبل می‌بینیم که رابطه‌ی زیر صادق است:

$$F^n_{(a+b)} = F^n_{c'} + nF \qquad (**)$$

اگر ما کار خود را با مثلث مکمل جزء nام مثلث شروع می‌کردیم مشابه روش قبل می‌دهیم که طول هر یال برابر طول وتر c از آن مثلث می‌باشد پس:

$$F^n_{(a+b)} = F^n_c + nF$$

برای n=۴ در رابطه‌ی (**) و (***) در قضیه‌ی فیثاغورس در حالت * تبدیل شود پس اگر و تنها اگر c=c' باشد، روابط (**) و (***) در قضیه‌ی زیر خلاصه می‌شوند:

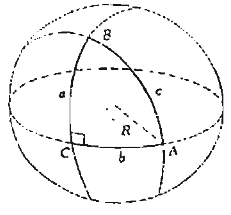
قضیه‌ی ۴: فرض می‌کنیم مثلث ABC جزء nام مثلث باشد مساحت n ضلعی منتظم ساخته شده بر روی ضلع حاصل از مجموع ضلع‌های مثلث برابر با جمع مساحت n مثلث و مساحت n ضلعی منتظم ساخته شده بر روی وتر مکمل می‌باشد. پس ما بی‌نهایت بار، مقیاس‌پذیری قضیه‌ی فیثاغورس را فراهم نمودیم.

این نیز جالب است که بدانیم اگر a, b را ثابت نگاه داریم و سپس $n\to\infty$ میل دهیم آن گاه $2F=ab\sin(\frac{2\pi}{n})$ می‌شود و ما از (**) و (***) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(F^{(n)}_{(a,b)} - F^{(n)}_{c}\right) = \lim_{n\to\infty} nF = ab\pi$$

این مساحت بیضی با نیم‌قطرهای a, b می‌باشد. در این‌جا پرسش جالب دیگری نیز وجود دارد: و آن این‌که آیا موردهای یادشده، در فضا نیز مقیاس پذیراند؟ آیا ممکن است در هندسه‌ی

کروی یا هذلولوی نیز مقیاس‌پذیر شوند؟ بیان دوباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورس در هندسه کروی، بر روی کره به‌شعاع R به‌صورت $\frac{Cosc}{R}=Cos\frac{a}{R}\times Cos\frac{b}{R}$ می‌باشد.



شکل ۲۰

از بسط رشته‌ی توانی.... $Cosx=1=\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}$ داریم:

$$۱-\frac{۱}{۲!}\left(\frac{c}{R}\right)^{۲}+\frac{۱}{۴!}\left(\frac{c}{R}\right)^{۴}-\cdots=\left(۱-\frac{۱}{۲!}\left(\frac{a}{R}\right)^{۲}+\frac{۱}{۴!}\left(\frac{a}{R}\right)^{۴}-\cdots\right)\times\left(۱-\frac{۱}{۲!}\left(\frac{b}{R}\right)^{۲}+\frac{۱}{۴!}\left(\frac{b}{R}\right)^{۴}-\cdots\right)$$

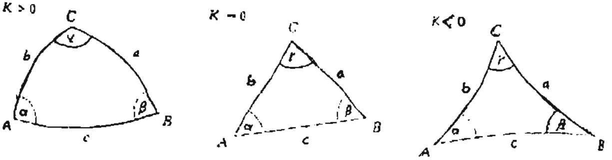
و بعد از انجام چند عمل داریم:

$$c^{۲}-\frac{۱}{۱۲}\frac{c^{۴}}{R^{۲}}+\cdots=a^{۲}+b^{۲}-\frac{a^{۲}b^{۲}}{۲R^{۲}}-\frac{a^{۴}}{۱۲R^{۲}}-\frac{b^{۴}}{۱۲R^{۲}}+\cdots$$

اگر ضلع‌های مثلث ثابت باشد و مرکز کره را به‌دورتر و دورتر انتقال دهیم یعنی اگر $R\to\infty$ میل کند. آن‌گاه برابری بالا به‌قانون فیثاغورس $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ تبدیل می‌شوند.

در هندسه‌ی هذلولوی، قضیه‌ی فیثاغورس به‌صورت Coshc=Cosha.coshb درمی‌آید. و با شیوه‌ی بالا از بسط رشته‌ی $\cosh x=۱+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}+\cdots$ و با توجه به‌این‌که Cosh c=Cosh a .Cosh b می‌باشد داریم $c^{۲}\approx a^{۲}+b^{۲}$ (برای عددهای کوچک b, a)

پرسشی که این‌جا مطرح می‌شود این است که چگونه باید تعمیم‌ها و متشابهات قضیه‌ی فیثاغورس را در بعدهای بالاتر هندسه‌ی کروی یا هذلولوی به‌دست آوریم؟ تنها برای به‌دست آوردن اندیشه‌ی دلخواه به‌شکل زیر توجه کنید. جایی که ما تفاوت بین هندسه‌ی اقلیدسی و نااقلیدسی را برای مثلث‌ها به‌اندازه‌ی لازم کوچک، که خمیدگی هریک از آن‌ها به‌انحنای K (ریمانی) بستگی دارد، نشان داده‌ایم.



$\alpha + \beta + \gamma > \pi$
a۲<a۲-b۲-۲ab cosγ
(کروی)

$\alpha - \beta - \gamma = \pi$
γ۲ - a۲ - b۲ - ۲ab cosγ
(اقلیدوسی)

$\alpha + \beta - \gamma < \pi$
γ۲ > a۲ - b۲ - ۲ab cosγ
(هذلولوی)

شکل ۲۱

پس پرسش اصلی این است که چگونه قضیه‌ی کسینوس‌ها (یا قضیه‌ی فیثاغورس) را به‌ایجاد فرمی یک‌سان در هر هندسه به‌کار ببریم؟

این پرسش و پرسش‌های مشابه آن در زمان‌های بسیار دور توسط اقلیدس سازمان داده شد و با کوشش اویلر (۱۷۸۷-۱۷۸۳)ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶)، اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) و از هم‌عصرهای ما میلنور، تورستون، کرمر و ویتن ادامه پیدا کرده و تمامی این داستان در ۲۵۰۰ سال پیش توسط فیثاغورس آغاز گردید.

سرچشمه‌ها:

۱ـ تاریخ ریاضیات جلدهای ۱ و ۲، ایوز، محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی.
۲ـ قضیه فرما، م. م. پوستینکف، برگردان پرویز شهریاری، نشر نی.
۳ـ گزیده‌هایی از نظریه‌ی اعداد، اویستن اور. برگردان منوچهر وصال. مرکز نشر دانشگاهی.
۴ـ مساله‌های تاریخی ریاضیات، و. د. چیستیاکوف، برگردان پرویز شهریاری، نشر نی.
۵ـ اثبات بدون کلام، راجر. ب. نلسن، برگردان سپیده چمن‌آرا، انتشارات فاطمی.
۶ـ تاریخ ریاضیات (از سری کتاب‌های کوچک ریاضی)، پرویز شهریاری انتشارات مدرسه.
۷ـ تاریخ فلسفه‌ی کاپلستون، جلد یک، انتشارات علمی و فرهنگی.