ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ پیش از میلاد)

پرویز شهریاری

در تاریخ انسانی، به‌سختی می‌توان ریاضی‌دانی شبیه ارشمیدس پیدا کرد که با اندیشه‌ی خلاق خود به‌این اندازه در پیش‌رفت ریاضیات و دانش‌های نزدیک به‌آن، کار کرده باشد. در ضمن ارشمیدس میهن‌دوستی بود که به‌زادگاه خود عشق می‌ورزید. ارشمیدس برای هم‌شهریان خود اندیشمندی بود که می‌توانست دشوارترین مساله‌ها را به‌سادگی حل کند و به‌همین مناسبت دوران زندگی او را «سده‌ی زرین» یونان نامیده‌اند. مشهورترین نویسنده و تاریخ‌دان یونان، یعنی پلوتارک (سده‌ی اول پیش از میلاد) درباره‌ی او می‌نویسد:

«در ریاضیات، همتایی برای او وجود ندارد که بتواند مساله‌های دشوار را به‌این سادگی و روشنی حل کند. اگر کسی بخواهد خود را در حل این مساله‌ها بیازماید، وقتی با راه‌حل ارشمیدس آشنا شود، چنان شیفته‌ی این راه‌حل می‌شود و چنان به‌دلش می‌نشیند که گمان می‌کند راه حل را خودش یافته است، زیرا ساده‌تر و کوتاه‌تر از راه ارشمیدس، نمی‌توان پیدا کرد».

ارشمیدس در شهر سیراکوز، پای‌تخت حکومت قدرتمند سیسیل متولد شد. پدرش «فیدیاس» (سده‌ی سوم پیش از میلاد)، اخترشناس و ریاضی‌دان بود و پسرش را آموزش ریاضی خوبی داده بود. ولی، به‌احتمال زیاد، ارشمیدس نتوانست آموزش کامل خود را به‌دست آورد، زیرا خانواده‌اش چندان دولتمند نبودند که پسر خود را به‌مدرسه‌ای که ویژه‌ی خانواده‌های ممتاز بود، بفرستند. با این همه، همان آموزشی که در خانه دیده بود، برای بروز نبوغ ارشمیدس جوان، کافی بود.

به‌جز هندسه، که در زمان ارشمیدس به‌خاطر کارهای اقلیدس به‌مرز بالایی رسیده بود، ارشمیدس به‌اخترشناسی و مکانیک هم علاقه نشان می‌داد. از جمله ارشمیدس وسیله‌ای ابتکاری برای نشان دادن کره‌ی آسمان ساخت که تا مدت‌ها پس از مرگ او، در موزه‌ی رُم،

نگه‌داری می‌شد.

«هیدرون» یکی از هم‌شهری‌های ارشمیدس (که او هم از خانواده‌ی متوسطی بود)، در جنگی که به‌رهبری «پیر» در سیراکوز جریان داشت علیه رومی‌ها، شرکت کرده بود. در این جنگ، «هیدرون» چنان مردانه و قهرمانانه ایستادگی کرد که در بازگشت به‌سیراکوز، خلعت‌های زیادی گرفت و سرانجام به‌عنوان شاه سیراکوز بر تخت نشست. این وضع در سرنوشت ارشمیدس هم اثر گذاشت: «هیدرون» ارشمیدس را به‌مصر در اسکندریه فرستاد تا آموزش لازم را در آن‌جا ببیند.

آموزش اولیه‌ای که ارشمیدس در اخترشناسی دید، تمامی زندگی او را دربر گرفت. از نوشته‌های ارشمیدس در زمینه‌ی اخترشناسی چیزی به‌ما نرسیده است، ولی از روی نوشته‌های دیگر او این آگاهی به‌دست می‌آید که وسیله‌ای برای مشاهده‌های اخترشناسی ساخته است. به‌جز این وسیله، او ابزاری برای اندازه‌گیری قطر خورشید درست کرد (زاویه‌ی دید خورشید)، که با آن توانست با دقت بالایی خورشید را اندازه بگیرد.

در دورانی که ارشمیدس در اسکندریه بود، در ریاضیات و مکانیک هم کار می‌کرد. و در آن‌جا بسیاری از مساله‌های ریاضی را به‌یاری مکانیک حل کرد.

پس از بازگشت از اسکندریه به‌سیراکوز، فوری به‌دانش‌های مورد علاقه‌ی خود مشغول شد. او مدتی پیش از آنکه به‌سرزمین خود برگردد، کشف خود را که نیاز به‌نبوغ زیادی داشت کرده بود. زمانی که در اسکندریه بود، سفری به‌مصر داشت که خدمت بزرگی به‌مصریان بود. او برای آن‌ها ماشین کاملی برای آب‌یاری کشتزارها ساخت، ماشینی که بعدها برای تخلیه‌ی آب معدن‌ها هم به‌کار رفت. در سیراکوز، ارشمیدس توانست دشوارترین مساله‌های هندسه و مکانیک را حل کند و با ادامه‌ی کار خود بسیاری از مساله‌های فنی را حل کرد.

ارشمیدس در نامه‌ای به‌«هیدرون» می‌نویسد، با نیروی اندکی می‌توان هر جسم سنگینی را به‌حرکت درآورد و تاکید می‌کند، اگر در خارج زمین تکیه‌گاهی به‌او بدهند می‌تواند حتا زمین را به‌حرکت وادارد. «هیدرون» خواست این ادعا را ثابت کند، ارشمیدس یک کشتی با سه دکل انتخاب و آن را پر از مردم و بارکرد و توانست با دست‌های خودش و به‌یاری یک اهرم، کشتی را حرکت دهد. «هیدرون» که به‌توانایی علمی ارشمیدس پی برد، به‌او دستور داد، ماشین‌ها و ابزارهایی که برای دولت او سودمند باشد، بسازد. ارشمیدس دستور را انجام داد. آن چه ارشمیدس آماده کرده بود، بعدها، وقتی که دیگر «هیدرون» مرده بود، در جنگی که رومی‌ها

علیه سیراکوز به‌راه انداختند، به‌کار آمد.

درباره‌ی زندگی ارشمیدس در سیراکوز، روایت‌های زیادی وجود دارد، این روایت‌ها نشان می‌دهد که او چنان به‌کارهای علمی خود مشغول بوده است که همه‌ی آن چه دور و برش می‌گذشت و حتا خود را، از یاد می‌برد، پلوتارک نقل می‌کند که ارشمیدس، اغلب غذا خوردن و حتا مواظبت از جسم خود را فراموش می‌کرد. اغلب به‌حمام می‌رفت و در وان می‌نشست و با روغن خاصی سر خود را می‌شست، ولی در همان حال روی دیوار یا جسم شوینده، شکل‌های هندسی رسم می‌کرد. در یک مورد «ویتردوی» (سده‌ی دوم پیش از میلاد) معمار و مهندس رومی کشف قانون جسم‌های غوطه‌ور در آب را به‌وسیله‌ی ارشمیدس، این‌گونه شرح می‌دهد: «هیدرون دستور داد تاجی از زر برای او بسازند؛ وقتی تاج آماده شد، این شک پیدا شد که آیا تمامی تاج از زر است یا نقره هم در آن به‌کار رفته است؟ هیدرون به‌ارشمیدس دستور داد، راهی برای تعیین میزان فلزها پیدا کند تا درجه‌ی خلوص تاج پیدا شود. ارشمیدس مدت‌ها و با جدیت درباره‌ی این مساله اندیشید، تا این‌که یک روز که در وان آب بود، متوجه شد جسمی که در آب غوطه‌ور است، سبک‌تر می‌شود. ارشمیدس فهمید جسمی که در آب باشد، به‌اندازه‌ی وزن آب هم‌حجم خودش سبک‌تر می‌شود. این کشف چنان او را به‌هیجان آورد که از وان بیرون پرید و در حالی که در خیابان می‌دوید، فریاد می‌زد «یافتم... یافتم». کشف ارشمیدس موجب شد تا میزان استفاده از زر را در تاج پیدا کنند».

سال‌های آخر زندگی ارشمیدس، میزان میهن‌دوستی او را به‌ما نشان می‌دهد. او همه‌ی خرد و دانش خود را در خدمت دفاع از میهن خود قرار داد.

سیراکوز که بزرگ‌ترین جزیره در بین جزیره‌های سیسیل است، موجب درگیری بین دو دولت قدرتمند شد: رومی‌ها و کارتاژی‌ها، هم رومی‌ها و هم کارتاژی‌ها ادعای مالکیت سیراکوز را داشتند و می‌خواستند آن را به‌حکومت خود پیوند دهند، هیدرون در سال ۲۱۲ پیش از میلاد به‌دست جاسوس رومی به‌قتل رسید. حمله وحشتناک رومی‌ها به‌شهرهای «لئون تین» و «ارانه» و وحشی‌گری‌های آن‌ها علیه ساکنان صلح‌طلب آن‌جا مردم سیراکوز را خشمگین کرد، به‌گونه‌ای که علیه رومی‌ها خود را مجهز کردند، رومی‌ها هم از دریا و از زمین نیروهای آزموده‌ی خود را علیه سیراکوز بسیج کردند. مردم سیراکوز هم از دریا و هم از طرف خشکی محاصره شدند. شهر تنها می‌توانست با نیروهای خاص خود به‌مقابله بپردازد؛ جنگ مخوف و ویران‌کننده‌ای در انتظار آن‌ها بود. ولی رومی‌ها تا مدت‌ها نتوانستند سیراکوز را تصرف کنند. بین

سیراکوزی‌ها ارشمیدس هم بود، او توانست با کشف‌های فنی خود به‌مقابله‌ی جدی با رومی‌ها بپردازد. او به‌ساکنان سیراکوز کمک کرد تا امکان تصرف شهر را از رومیان بگیرند نزدیک به‌دو سال رومی‌ها در دریا میخ‌کوب شدند و مردم شهر هم در خشکی جلوی دشمن را گرفتند و سیراکوز را حفظ کردند. شهر تنها در اثر خیانت هواداران رومی‌ها سقوط کرد، به‌این ترتیب که وقتی ساکنان سیراکوز در جشن سنتی خود مشغول نوشیدن شراب بودند، خائنان یکی از دروازه‌های شهر را گشودند. رومی‌ها به‌شهر ریختند و مردم را از دم تیغ گذراندند. در همین زمان ارشمیدس هم کشته شد. روایت می‌کنند ارشمیدس به‌این ترتیب به‌قتل رسید: ارشمیدس از ورود رومی‌ها آگاه نشد، در گوشه‌ای نشسته بود و روی مساله‌ی هندسی فکر می‌کرد. سرباز رومی به‌سمت او رفت. ارشمیدس رو برگرداند و گفت: «مواظب باش، تصویر مرا خراب نکنی». جنگ‌جوی رومی از این حرف خشمگین شد، شمشیر خود را کشید و ارشمیدس را کشت. به‌این ترتیب بود که یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان در سن ۷۵ سالگی کشته شد. روی آرامگاه و بر سنگ قبرش تصویر یک استوانه و کره‌ای محاط در آن قرار دادند. این نشانی از کارهای ارشمیدس در زمینه‌ی ریاضی بود که خود او به‌آن افتخار می‌کرد.

بسیاری از آن چه به‌قلم ارشمیدس درآمده، تا زمان ما باقی مانده است. مهم‌ترین کارهای ارشمیدس در زمینه‌ی هندسه است، ولی نوشته‌های فراوانی هم در مکانیک و محاسبه‌ی عددی دارد. این نوشته‌های ریاضی از ارشمیدس به‌ما رسیده است: درباره‌ی هم‌ارزی شکل‌ها و درباره‌ی گرانیگاه (مرکز ثقل) آن‌ها، درباره‌ی مساحت سهمی، درباره‌ی کره و استوانه، درباره‌ی اندازه‌گیری محیط و مساحت دایره، درباره‌ی اسپیرال‌ها، درباره‌ی سکون، شمارش شن‌ها، درباره‌ی روش (نامه‌ی ارشمیدس به‌اراتوستن در زمینه‌ی برخی قضیه‌های هندسی)، درباره‌ی جسم‌های غوطه‌ور در آب، پیش قضیه‌ها (لم‌ها).

درباره‌ی شمارش و محاسبه، ارشمیدس کتاب «شمارش شن‌ها» را دارد. در این رساله کوشش می‌کند، تعداد شن‌هایی که در تمام جهان هستی جا می‌گیرد، محاسبه می‌کند. او جهان هستی را کره‌ای می‌گیرد که مرکزش در زمین و شعاع آن تا فاصله‌ی ستارگان ثابت باشد. ممکن است به‌نظر آید که چنین محاسبه‌ای، امکان کاربرد ندارد. پیش از همه، رساله‌ی «شمارش شن‌ها» نشان می‌دهد که دنباله‌ی عددها بی‌پایان است و هر عددی را، هر قدر بزرگ باشد، درنظر بگیریم، عدد بزرگ‌تر از آن وجود دارد. پیش از ارشمیدس، یونانی‌ها عدد شماری را از ده‌ها هزار، جلوتر نمی‌بردند؛ در ضمن آن‌ها ده را «میریاد» می‌نامیدند. ارشمیدس «میریاد» را

واحدی برای مرتبه‌ی جدید و «میریاد میریاد» را واحد مرتبه‌ی بعدی گرفت با ادامه‌ی همین روش، ارشمیدس راه بیان و نشان دادن هر عدد دلخواه را نشان می‌دهد.

ارشمیدس در نوشته‌های هندسی خود، از دو روش اساسی استفاده می‌کند. یکی از این روش‌ها را در «نامه‌ای به‌اراتوستن درباره‌ی برخی قضیه‌های هندسی» شرح می‌دهد. در این نوشته از روشی صحبت می‌شود که قضیه‌های هندسی را به‌یاری مکانیک حل می‌کند.

ولی معلوم است که ارشمیدس به‌این روش با شک نگاه می‌کرده است و به‌همین مناسبت نتیجه‌های به‌دست آمده را با روش دیگر خود (روش افنا)، به‌آزمایش می‌گذارد. این دو روش شامل اندیشه‌ای است که تنها دو هزار سال بعد از ارشمیدس به‌صورت روش انتگرالی به‌وجود آمد.

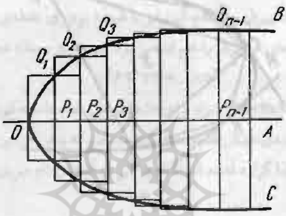
ساده‌ترین روش افنای ارشمیدس را در اندازه‌گیری محیط دایره پیدا می‌کنیم که در رساله‌ی «درباره‌ی اندازه‌گیری دایره» شرح داده شده است. ارشمیدس برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، مساله‌ی اندازه‌گیری طول محیط دایره و محاسبه‌ی مقدار تقریبی عدد «پی»، یعنی نسبت محیط دایره به‌قطر آن را مطرح می‌کند؛ در ضمن میزان اشتباهی که در این زمینه پیش می‌آید مورد توجه قرار می‌دهد. برای محاسبه طول محیط دایره، ارشمیدس از دو سمت حرکت و طول محیط چندضلعی‌های منتظم داخلی و بیرونی (چندضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی) را به‌دست می‌آورد. او از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی آغاز می‌کند و سپس با دو برابر کردن تعداد ضلع‌ها، خود را به‌۹۶ ضلعی منتظم محاطی و محیطی می‌رساند. درباره‌ی ۹۶ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به‌قطر واحد، نسبت محیط به‌قطر را برابر $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و درباره‌ی ۹۶ ضلعی بیرونی، این نسبت را برای $۳\frac{۱}{۷}$ پیدا می‌کند. به‌این ترتیب، برای عدد «پی» مقدار $\frac{۲۲}{۷}$ را انتخاب می‌کند که به‌«عدد ارشمیدس» معروف است و ما اغلب آن را به‌جای عدد π، به‌کار می‌بریم. سپس ارشمیدس به‌محاسبه‌ی مساحت دایره می‌پردازد و آن را برابر مساحت مثلثی می‌داند که قاعده‌ی آن برابر محیط دایره و ارتفاعش برابر با شعاع دایره باشد.

اگر ارشمیدس در رساله‌ی «اندازه‌گیری دایره»، به‌محاسبه‌ی طول محیط و مساحت دایره می‌پردازد، در رساله‌ی «درباره‌ی کره و استوانه» وارد فضا می‌شود و سطح و حجم کره را محاسبه می‌کند. او با یاری گرفتن از همین روش «افنا»، ثابت می‌کند مساحت سطح کره برابر است با چهار برابر مساحت دایره‌ی عظیمه (دایره‌ای که از مقطع قطری کره به‌دست می‌آید)، و حجم کره برابر است با حجم مخروطی که قاعده‌ی آن برابر همین دایره‌ی عظیمه و ارتفاع آن

برابر با شعاع کره باشد.

در همین رساله، ارشمیدس، یک رشته نتیجه‌گیری‌های مهمی هم دارد. از جمله ثابت می‌کند که مساحت قطعه کره برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن برابر پاره‌خط راستی باشد که راس این قطعه را به‌دایره‌ی قاعده‌ی قطعه وصل می‌کند. به‌جز این، ارشمیدس ثابت می‌کند که اگر در یک استوانه‌ی متساوی‌الاضلاع (استوانه‌ای که قطر قاعده با ارتفاع آن برابر باشد)، کره‌ای محاط کنیم، سطح و حجم این کره به‌ترتیب برابر است با $\frac{2}{3}$ سطح و حجم استوانه.

ارشمیدس در رساله‌ی «درباره‌ی کونوئیدها و سفه روئیدها»، بیش از هر جای دیگری به‌روش انتگرال‌گیری نزدیک می‌شود. «کونوئید» را ارشمیدس جسمی می‌داند که از دوران سهمی یا هذلولی دور محور خود به‌دست آید، جسمی که ما آن را سهموی یا هذلولوی می‌نامیم.



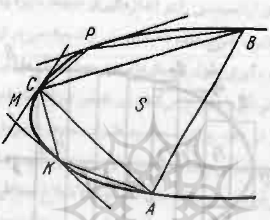
شکل ۱

یادآوری می‌کنیم نام‌گذاری ارشمیدس منطقی‌تر از نامی است که ما به‌کار می‌بریم، زیرا سهموی یعنی «شبیه سهمی»، در حالی که «کونوئید» به‌معنای «شبیه مخروط» است. اصطلاحی که ما به‌کار می‌بریم، از این جهت نادرست است که جسم با صفحه ارتباطی ندارد، در حالی که وقتی از «کونوئید» صحبت می‌کنیم، منظور جسمی است که با مخروط شباهت دارد.

برای محاسبه‌ی حجم «کونوئید»ی که از دوران قطعه سهمی BOC دور محور آن OA به‌دست می‌آید، ارشمیدس به‌این ترتیب عمل می‌کند (شکل ۱). ارتفاع قطعه سهمی، یعنی OA را، به‌بخش‌های برابر OP_1، P_1P_2، ...، $P_{n-1}A$ تقسیم می‌کند. سپس از نقطه‌های تقسیم، عمودهای P_1Q_1، P_2Q_2، ...، $P_{n-1}Q_{n-1}$ را بر محور سهمی رسم می‌کند و با آن‌ها، مستطیل‌های محاطی و

محیطی را می‌سازد. وقتی سهمی دور محور خود دوران کند، دو جسم پله‌مانند به‌دست می‌آید که شامل استوانه‌های محاطی و محیطی سهموی هستند. حجم جسم محیطی از حجم سهموی بیش‌تر و حجم جسم محاطی از حجم سهموی کم‌تر است. با آغاز از حجم‌های این دو جسم، ارشمیدس حجم سهموی را پیدا می‌کند. معلوم می‌شود، حجم سهموی برابر است با نصف حجم استوانه‌ای که ارتفاع آن برابر OA و شعاع قاعده‌اش برابر AB باشد.

روش «افنا» به‌تقریب در رساله‌ی «درباره‌ی مساحت سهمی» هم به‌چشم می‌خورد. این رساله به‌محاسبه‌ی مساحت قطعه سهمی مربوط می‌شود. فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را به‌دست آوریم که از سهمی با وتر MB جدا شده است استدلال ارشمیدس برای محاسبه‌ی مساحت این قطعه سهمی به‌تقریب چنین است (شکل ۲).



شکل ۲

بر سهمی خط راستی موازی وتر AB رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی تماس C به‌نقطه‌های A و B می‌پیوندیم. مساحت مثلث ACB از نصف مساحت قطعه سهمی AMB، بیش‌تر است. در قطعه سهمی های تازه‌ی AKC و CPB به‌همان ترتیب که در قطعه سهمی AMB عمل کردیم، کار را ادامه می‌دهیم، یعنی مثلث‌های AKC و CPB را می‌سازیم. شکل محاطی AKCP را به‌دست می‌آوریم. همین روش را مرتب ادامه می‌دهیم. مساحت چندضلعی محاط در سهمی، به‌طور دایم به‌مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود. ارشمیدس ثابت می‌کند که مساحت مثلث ACB برابر است با $\frac{1}{4}$ مساحت‌های مثلث‌های AKC و CPB. بنابراین مساحت تمامی چندضلعی محاطی (که به‌مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود)، با به‌حساب آوردن S برای مساحت مثلث ACB، مساحت قطعه سهمی را چنین می‌دهد:

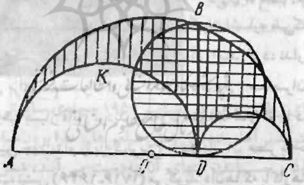
$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\frac{1}{64}S+\ldots=\frac{4}{3}S$$

نوشته‌ی ارشمیدس به‌نام «درباره‌ی اسپیرال‌ها»، از جهت‌های گوناگون بسیار جالب است. پیش از همه تعریف جالبی است که ارشمیدس از اسپیرال می‌کند. سخن خود ارشمیدس را می‌آوریم: «اگر در یک صفحه، خط راستی با حرکت یکنواخت دور یکی از نقطه‌های بی‌حرکت آن تا رسیدن به‌جای نخستین آن دوران کند، و اگر به‌طور هم‌زمان، نقطه‌ای روی خط راست متحرک، باز هم به‌طور یکنواخت از نقطه‌ی بی‌حرکت انتقال داده شود، نقطه‌ی اخیر یک اسپیرال رسم می‌کند». بنابراین، ارشمیدس در تعریف اسپیرال، حرکت را قرار می‌دهد. پیش از ارشمیدس، حتا در بین هندسه‌دانان بزرگی هم‌چون اقلیدس حرکت در هندسه به‌هیچ رو به‌کار نمی‌رفت، ولی ارشمیدس با تعریفی که درباره‌ی اسپیرال می‌دهد، این وهم را که مانعی برای پیش‌رفت هندسه بود، از میان برمی دارد. با بررسی این منحنی جدید که ما امروز آن را اسپیرال ارشمیدس می‌نامیم، ارشمیدس مشخص کرد که مساحت محدود به‌شعاع نخستین و پیچ نخستین اسپیرال، یعنی وقتی که خط راست ۳۶۰ درجه دوران می‌کند، برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت دایره‌ای که مرکز آن آغاز اسپیرال و شعاع آن برابر با شعاع برداری نقطه‌ی انتهایی پیچ اسپیرال. در ضمن او برخی ویژگی‌های اسپیرال را هم کشف کرد. در همین رساله مجموع رشته‌های

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

و مجموع $a+2a+3a+4a+\dots+na$ را، برای عدد طبیعی n، محاسبه کرده است.

چند جمله‌ای هم درباره‌ی «پیش‌نضیه»های ارشمیدس که پیش از این از آنان نام بردیم، می‌آوریم. در این رساله، ۱۵ گزاره آمده است که برخی از آن‌ها را نام می‌بریم.



شکل ۳

۱. مساله‌ای درباره‌ی چاقوی پوست‌کنی که منجر به‌این مساله می‌شود: دو نیم‌دایره‌ی مماس بر هم در نیم‌دایره‌ای که قطر آن برابر است با مجموع قطرهای دو نیم‌دایره‌ی کوچک‌تر،

محاط‌اند (شکل ۳). مطلوب است مساحت بخشی از نیم‌دایره‌ی بزرگ‌تر که در بیرون نیم‌دایره‌های کوچک‌تر قرار دارد. به‌سادگی ثابت می‌شود که مساحت مورد نظر برابر است با مساحت دایره‌ای که قطر آن پاره‌خط راست مماس بر دو نیم دایره‌ی کوچک‌تر است. در شکل ۳ مساحت ABCDKA برابر است با مساحت دایره‌ای به‌قطر BD.

۲. اگر دایره‌ای محاط بر مربع و دایره‌ای محیط بر آن رسم کنیم، دایره‌ی محیطی، سطحی دو برابر دایره‌ی محاطی دارد.

۳. اگر در دایره‌ای دو وتر عمود بر هم رسم کنیم، مجموع مربع‌های چهار پاره‌خط راستی که از این عمودها به‌دست می‌آید، برابر است با مربع قطر دایره.

۴. اگر از نقطه‌ای واقع در بیرون دایره، قاطعی رسم کنیم که از مرکز دایره بگذرد، از همان نقطه، قاطع دیگری نسبت به‌دایره بکشیم که پاره‌خط راست بیرونی آن برابر شعاع دایره باشد، آن وقت زاویه‌ی بین دو قاطع، به‌اندازه‌ی یک سوم بزرگ‌تر از کمانی است که بین دو ضلع این زاویه وجود دارد. حل این مساله وقتی ممکن است که زاویه‌ی مفروض را به‌سه بخش برابر تقسیم کنیم، یعنی حل مساله منجر به‌تثلیث زاویه می‌شود. ولی در عمل و به‌کمک خط‌کش و پرگار، نمی‌توان قاطعی در دایره رسم کرد که بخش بیرونی آن برابر شعاع دایره باشد.

در طرحی که از نوشته‌های ارشمیدس دادیم، آن‌ها را برای هر خواننده‌ای قابل فهم می‌بینیم. ولی نباید این را به‌معنای آن گرفت که با خواندن نوشته‌های ارشمیدس، می‌توانیم بلافاصله به‌اندیشه‌های او پی ببریم. ارشمیدس در زمانی این موضوع‌ها را مطرح کرده است که هیچ نشانی از نمادهای جبری نبود، و در نتیجه کار استدلال و نتیجه‌گیری را بسیار دشوار می‌کرد. روش نوشته‌های خود ارشمیدس به‌هیچ وجه ساده نیست و برای فهم آن وقت زیادی لازم است. سرانجام، وقتی ارشمیدس به‌استدلال یا اثبات دیگران اشاره می‌کند، هیچ اشاره‌ای به‌این‌که این استدلال از چه کسی است و در کجا می‌توان آن را پیدا کرد، ندارد.

نوشته‌های ارشمیدس برای هم‌عصران او هم دشوار بود. ولی معاصران ارشمیدس برای کارها و نوشته‌های او ارزش بسیار قایل بودند و به‌ویژه نوشته‌های او را درباره‌ی ریاضیات بی‌نظیر می‌دانستند، به‌همین جهت، او را بزرگ‌ترین ریاضی‌دان آن عصر به‌حساب می‌آورند. بی‌جهت نیست که لایپ نیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) می‌گوید: «آن‌ها که باکارهای ارشمیدس آشنا هستند، از کارهای بزرگ‌ترین دانشمندان زمان ما هم، شگفت‌زده نمی‌شوند».