پرویز شهریاری

از تاریخ دانش و فن

هندسه‌ی تحلیلی

در بسیاری از شاخه‌های دانش، به‌مختصات دکارتی نیاز داریم به‌یاری مختصات دکارتی می‌توانیم به‌صورت عینی و هندسی و به‌یاری یک نمودار، بستگی یک کمیت را با دیگری درک کنیم. برای نمونه، پزشک به‌درجه‌ی حرارت بیمار در جریان بیماری یا اقتصاددان به‌جریان رشد تولید و... علاقه‌مند است و به‌آن نیاز دارد.

اصطلاح مختصات دکارتی ناشی از یک اشتباه تاریخی است و گمان می‌رود که این مختصات به‌وسیله‌ی «رنه دکارت» (۱۵۹۶-۱۶۵۰) ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی کشف شده است. در واقع، کاربرد مختصات قائم در هندسه، حتا به‌پیش از میلاد می‌رسد. دکارت با وارد کردن نشانه‌ها و نمادها در مختصات، آن را تکمیل کرد. ولی مهم‌تر از آن، دکارت با استفاده از مختصات قائم، هندسه‌ی تحلیلی را روی صفحه سامان داد و در آن، رابطه‌ی هندسه را با جبر برقرار کرد. با این همه، باید گفت هم‌زمان دکارت، یکی دیگر از دانشمندان فرانسوی، پییر فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵)، مختصات قائم را کشف کرد. نام فرما روی مساله‌ای باقی مانده است که تا همین چند سال پیش، با همه‌ی تلاش ریاضی‌دانان حل نشده بود و آن را «قضیه‌ی بزرگ فرما» نام داده‌اند: قضیه‌ی بزرگ فرما می‌گوید: اگر n عدد درست و مثبتی باشد، معادله‌ی

$$x^n+y^n=z^n$$

در مجموعه‌ی عددهای درست، به‌جز برای $n=2$ دارای جواب نیست.

در سده‌ی هفدهم، یعنی زمان زندگی دکارت و فرما، همه‌ی شرط‌ها برای ساختن هندسه‌ی تحلیلی ـ سنتز جبر و هندسه ـ آماده شده بود. ولی حمله‌ی آخر را دکارت و فرما وارد کردند. با این همه، به‌تقریب همگان، تنها درباره‌ی دکارت می‌دانند. باید گفت که این مطلب، درباره‌ی بیش‌تر کشف‌های ریاضی درست است. این کشف‌ها، در طول سده‌ها و به‌وسیله‌ی ریاضی‌دانان مختلف آماده شده است، ولی هر کشفی به‌نام یک دانشمند ثبت و همه‌ی افتخارها به‌او نسبت داده شده است. در این‌جا به‌کوتاهی از وضع دانش در سده‌ی هفدهم، صحبت می‌کنم تا دلیل پیدایش هندسه‌ی تحلیلی روشن شود.

دستگاه مختصات را روی صفحه، به‌وسیله‌ی دو خط راست ـ محورهای مختصات ـ نشان می‌دهیم. خط راست افقی برای محور طول و خط راست عمود بر آن برای محور عرض. نقطه‌ی برخورد و محور را O می‌نامیم که مبدا مختصات است. M را نقطه‌ای از صفحه‌ی شکل بگیرید. از این نقطه، عمود MP را بر محور طول و عمود MQ را بر محور عرض رسم می‌کنیم. این وضع برای ما این امکان را پدید می‌آورد که نقطه‌ی M را با دو عدد نامنفی نشان دهیم: پاره‌خط‌های راست OP و OQ. با وجود این، اگر

نقطه‌ی M'، قرینه‌ی M نسبت به‌محور عرض را درنظر بگیریم، برای هر دو نقطه‌ی M و M'، پاره‌خط‌های راست برابر به‌دست می‌آید. همین وضع، برای حالتی هم که دو نقطه، نسبت به‌محور طول قرینه‌ی یکدیگرند، درست است. همین وضع موجب شد که دکارت به‌علامت رو آورد. اگر نقطه‌ی M سمت راست محور عرض باشد، نخستین عدد مختصات مثبت گرفته می‌شود و اگر سمت چپ قرار گیرد، نخستین عدد مختصات ما منفی است. این عدد، به‌طور معمول، طول نقطه‌ی M نامیده می‌شود و با oc نشان داده می‌شود. عدد دوم مختصات هم، به‌همین ترتیب معین می‌شود. این عدد عرض نقطه‌ی M است و با y معرفی می‌شود. عددهای x و y هم مختصات دکارتی نقطه‌ی M نام دارند. اگر متغیرهای x و y با یک معادله‌ی جبری یا به‌صورت دیگری به‌هم مربوط باشند، در این صورت مجموعه‌ی نقطه‌های M که مختصات آن‌ها در این معادله صدق کنند، یک خط و اغلب یک منحنی را در صفحه تشکیل می‌دهند و در حالتی که y به x بستگی داشته باشد، نمایش تغییر آن را به‌این ترتیب می‌سازند.

عادت شده است، این ساختمان را به‌دکارت نسبت دهند. در حالی که مدت‌ها پیش از دکارت و به‌صورت ناقصی از آن‌ها استفاده می‌کرده‌اند ریاضی‌دان قدیمی اهل اسکندریه، یعنی «آپولونیوس» (که در سده‌های سوم و دوم پیش از میلاد زندگی می‌کرد) هم، از مختصات قائم استفاده می‌کرد. او منحنی‌هایی را که در آن زمان شناخته شده بود (یعنی سهمی، بیضی و هذلولی)، به‌یاری مختصات تعریف کرد. آپولونیوس، معادله‌ی آن‌ها را هم پیدا کرد:

$$y^2 = px \text{ (سهمی)}$$

$$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2 \text{ (بیضی)}$$

$$y^2 = px + \frac{p}{a}x^2 \text{ (هذلولی)}$$

که در آن‌ها، عددهای a و p مثبت‌اند. البته آپولونیوس مقدارها را به‌صورت جبری مطرح نمی‌کرد، زیرا در زمان او، نمادهای جبری وجود نداشت. او معادله‌ها را به‌صورت هندسی می‌نوشت: y^2 را به‌معنای مربعی با ضلع y می‌گرفت؛ px را به‌معنای مستطیلی با بُعدهای p و x و غیره و این معادله‌ها را، معادله‌های منحنی‌ها می‌نامید. سهمی از نظر یونانی‌ها، یعنی مربع با ضلع برابر y (y^2)، مساحتی برابر مستطیل px دارد. به‌همین ترتیب هذلولی و بیضی را هم تعریف می‌کردند.

بعدها خیام که در پایان سده‌ی دهم و آغاز سده‌ی یازدهم میلادی می‌زیست، از مقطع‌های مخروطی برای حل معادله‌های درجه سوم استفاده کرد. از توضیح‌های خیام ریاضی‌دان ایرانی درباره‌ی این مقطع‌ها روشن می‌شود که او به‌معادله‌ی آن‌ها و حتا به‌مکان آن‌ها در دستگاهی از محورهای مختصات توجه داشته است. خیام ۱۳ حالت برای معادله‌ی درجه سوم درنظر می‌گیرد که تنها در یک حالت از آن‌ها دچار اشتباه شده است.

اُرسم ریاضی‌دان فرانسوی در سده‌ی چهاردهم میلادی، که از دستگاه مختصات قائم استفاده می‌کرد، منحنی نمایش تغییرات y را نسبت به x به‌دست آورد؛ در ضمن به‌جای اصطلاح‌های امروزی طول و عرض، اصطلاح‌های «درازا» و «پهنا» را به‌کار می‌برد. با این همه، اندیشه‌ی اُرسم منتشر نشد، زیرا در آن زمان، مفهوم رابطه‌ی تابعی (منظور من، رابطه‌ی کمیت y با کمیت x است)، به‌خوبی روشن نبود.

به‌این ترتیب اندیشه‌ی مختصات دکارتی و کشف آن متعلق به‌دکارت نیست. با وجود این، این حقیقت که این مختصات را مختصات دکارتی می‌نامند، خیلی هم نادرست نیست. او چنان از این اندیشه استفاده کرد که آن را به‌یکی از عامل‌های پیشرفت ریاضیات تبدیل کرد، شاید بتوان گفت به‌عامل اصلی پیشرفت ریاضیات. دکارت هندسه‌ی تحلیلی را ساخت و چنان مساله‌هایی را مطرح کرد که در جریان هزاران سال، چنین گامی

برداشته نشده بود. نوشته‌ی معروف دکارت به‌نام «هندسه»، که هندسه‌ی تحلیلی روی صفحه را در آن آورده است، در سال ۱۶۳۷ چاپ شد. باید یادآوری کرد، هم‌زمان با دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی دیگری، یعنی «پییر فرما» (۱۶۰۱-۱۶۶۵ میلادی) هم به‌همین اندیشه رسیده بود. ولی نوشته‌های او، تنها در سال ۱۶۷۹ چاپ شد. در سال ۱۶۳۷، اندیشه‌های فرما برای هم‌عصران او شناخته نبود، او بنا بر روش زمان از راه نامه‌های خود به‌سایر ریاضی‌دانان، صحبت از این اندیشه‌ها می‌کند.

هندسه‌ی تحلیلی پیش از همه به‌معنای ایجاد رابطه بین هندسه و جبر است. این دو شاخه‌ی ریاضیات تا زمان دکارت به‌پیشرفت‌های جدی رسیده بود. ولی پیشرفت آن‌ها، در جریان هزاران سال، ارتباطی به‌یکدیگر نداشت و زمانی که اندیشه‌ی هندسه‌ی تحلیلی مطرح شد، بستگی ناچیزی بین این دو شاخه‌ی دانش برقرار بود. هندسه تا زمانی که خیلی از سده‌ی بیست و یکم فاصله ندارد، به‌موفقیت‌های شگرفی رسیده بود. او در ضمن به‌آموزش پیچیده‌ی سهمی، بیضی و هذلولی می‌پرداخت، به‌ویژه به‌اثبات این مطلب که همه‌ی این منحنی‌ها از راه برخورد یک صفحه با سطح مخروطی دوار به‌دست می‌آید و از همین جا بود که نام مقطع‌های مخروطی پدید آمد. جبر اندکی کندتر از هندسه پیش می‌رفت. نخستین نشانه‌های آن را در پاپیروس مصری «آهمس» می‌بینیم که مربوط به‌نزدیک ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد است. اگر با نمادهای امروزی داوری کنیم، در این پاپیروس، معادله‌ی درجه اول یک مجهولی حل شده است؛ در ضمن نمادهای هیروگلیفی ویژه‌ای برای کمیت مجهول و همچنین نمادهایی برای جمع و تفریق و نمادی برای برابری وجود دارد. پیشرفت بعدی جبر را مدیون ایرانی‌ها در سده‌های نهم تا پانزدهم میلادی هستیم. البته آن‌ها در نوشته‌های خود از نمادها یاری نمی‌گرفتند و همه چیز را با بیان و شرح انجام می‌دادند.

در پایان سده‌ی پانزدهم نمادهای «+» و «-» به‌وسیله‌ی ایتالیایی‌ها و بعد آلمانی‌ها به‌کار گرفته شد. نمادهای بعدی هم به‌سرعت رواج یافت: توان، ریشگی، پرانتز و غیرآن. بعد فرانسوا ویت (۱۵۴۰-۱۶۰۳ میلادی) ریاضی‌دان فرانسوی، از حرف‌های الفبا برای کمیت‌های معلوم و مجهول یاری گرفت. در نتیجه، در زمان دکارت، نمادهای جبری آماده شده بود.

هندسه‌ی تحلیلی نقش ارزنده‌ای در پیشرفت مفهوم عدد داشت. عددهای منفی در سده‌های ششم تا نهم میلادی در هند و اندکی بعد در ایران شناخته شده بود، ولی ریاضی‌دانان اروپایی تا مدت‌ها عددهای منفی را بی‌معنی می‌دانستند. حتا «فرانسوا ویت» (Viète، ۱۵۴۰-۱۶۰۳ میلادی) آن‌ها را به‌رسمیت نمی‌شناخت. تنها هندسه‌ی تحلیلی (دقیق‌تر بگوییم، روش مختصاتی) بود که این عددها جای خود را در ریاضیات پیدا کردند.

به‌همین ترتیب، عددهای موهومی و مختلط هم به‌برکت مختصات دکارتی توانستند معنای واقعی خود را پیدا کنند، البته مدت‌ها پس از دکارت. ابتدا گمان می‌رفت برای معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های مختلط دارد، نباید ریشه‌ای در نظر گرفت. تنها پس از حل معادله‌ی درجه‌ی سوم، که به‌وسیله‌ی کاردان ایتالیایی در سده‌ی شانزدهم مطرح شد، عددهای مختلط تا اندازه‌ای جای خود را در ریاضیات باز کردند. ولی تا پیش از «کارل فردریک گاوس» (۱۷۷۷-۱۸۵۵ میلادی) کم‌تر از عددهای مختلط استفاده می‌شد. گاوس، قضیه‌ی اصلی جبر را ثابت کرد که بنا بر آن، هرچند جمله‌ای درجه‌ی n دارای n ریشه است. در زمان ما، عددهای مختلط و تابع‌های مختلط از متغیرهای مختلط، نقش جدی در ریاضیات کاربردی و هم ریاضیات نظری دارند.