ویلهلم بلاشکه   برگردان: پرویز شهریاری

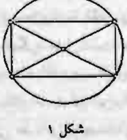
از تاریخ دانش و فن

اقلیدس و «مقدمات» او

۱. دوره‌ی پیش از اقلیدس

آگاهی‌های ما از هندسه‌ی یونانی پیش از *اقلیدس*، خیلی کم و نارساست. آسیای صغیر، ایونی، که در سده‌ی هشتم پیش از میلاد ترانه‌های هومر در آن به‌وجود آمد، در واقع، گهواره‌ی علوم‌پایه، در اروپا بود. در سده‌ی ششم پیش از میلاد، در شهر تجارتی و ثروتمند میلت، تالس افسانه‌ای زندگی و کار می‌کرد، که با گرایشی که به‌آب داشت، نقشی استثنایی در قسمت دوم «فاوست» گوته، بازی کرده است (به‌ظاهر، خود گوته، که از نسل خانواده‌ای شراب‌فروش بود، از این گرایش تالس به‌دور بود، و نسبت به‌ریاضیات هم، با سردی کامل برخورد می‌کرد).

تالس (تولد در حدود سال ۶۲۵ و مرگ در سال ۵۴۶ پیش از میلاد)، از جزیره‌ی لسبوس و هم‌زمانِ *سولون*، قانون‌گذار آتنی و ساپفوی شاعر بود. گمان می‌رود که تالس شکل‌هایی را بررسی می‌کرد که از راه رسم قطرهای مستطیل و دایره‌ی محیطی آن، به‌دست می‌آمد (شکل ۱)، در ضمن، تالس باید کشف کرده باشد که اگر زاویه‌ای، در یک نیم‌دایره محاط باشد، قائمه است. امکان دارد که او برای اثبات، از ویژگی تقارن، در این شکل، استفاده کرده باشد. به‌ظاهر، تالس می‌توانست، با استفاده از مثلث‌های متشابه، ارتفاع هرم



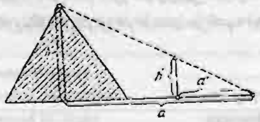
شکل ۱

را، از روی سایه‌ی آن، اندازه بگیرد (شکل ۲):

$$\frac{h}{a}=\frac{h'}{a'} \text{ و } h=\frac{a}{a'}h'$$

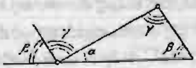
به‌جز این، تالس نشان داد که چگونه می‌توان، فاصله‌ی برج دیده‌بانی را تا کشتی، پیدا کرد. موضوع‌های مشابهی را می‌توان در متن‌های میخی هم پیدا کرد. این کشف‌های هندسه‌دان‌های یونانی را، مصری‌ها در زمان تالس، به‌خوبی می‌شناختند و به‌ظاهر تالس این آگاهی‌ها را، از همان‌ها گرفته است.

این قضیه را هم، که مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر است با دو قائمه، به‌او یا مکتب او، نسبت می‌دهند



شکل ۲

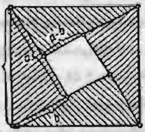
(شکل ۳). این مطلب که زاویه‌ها را هم، می‌توان، مثل فاصله‌ها، روی هم قرار داد، در نظر اول روشن نیست. آنا کسیمندرس، هم‌زمانِ کوچک‌ترِ تالس هم، در پیش‌برد ریاضیات قدیم، نقش مهمی داشت. به‌او هم، مانند تالس، کشف‌هایی در زمینه‌ی نجوم، نسبت می‌دهند.



شکل ۳

ولی، مشهورترین ریاضیدان این دوره‌ی پیش‌رس، فیثاغورس ساموسی بود (تولد در حدود سال ۵۸۰ و مرگ در سال ۵۰۰ پیش از میلاد). فیثاغورس، در حدود سال ۵۵۰ پیش از میلاد، به‌کورتون آمد، که در کناره‌ی خلیج تارنت در جنوب ایتالیا قرار دارد. آن‌جا در کالابری، و به‌احتمالی در سیسیل، جامعه‌ی فلسفی ـ سیاسی فیثاغوریان را بنیان گذاشت، که آگاهی درباره‌ی آن‌ها، از راه ارستو به‌ما رسیده است و به‌احتمالی، این‌ها، نخستین کسانی هستند که ریاضیات را، به‌عنوان یک «علم خالص» مورد مطالعه قرار دادند. (خود من، به‌تازگی از کناره‌های «یونان بزرگ» برگشته‌ام، آن‌جا، من امید داشتم که به‌گونه‌ای، هوای فیثاغوریان را استنشاق کنم). درست، همان‌طور که در سال ۱۴۵۳ میلادی، با اشغال قسطنطنیه به‌وسیله‌ی ترک‌ها، دانش بیزانسی به‌ایتالیا منتقل شد، دو هزار سال پیش از آن و حدود ۵۵۰ پیش از میلاد هم، بعد از اشغال کناره‌های آسیای صغیر به‌وسیله‌ی ایرانی‌ها، مهاجران ایونی، دانش ایونی و بابلی را به‌غرب یونان، به‌ایتالیای جنوبی، جایی که در آن زمان پوشیده از جنگل بود، منتقل کردند.

از فیثاغورس، و همان‌طور بعدها از سقرات، هیچ



شکل ۲

اثر و نوشته‌ای باقی نمانده است. همه چیز در تاریکی اسرارآمیزی پنهان است، در حالی که فیثاغوریان، که نوعی بستگی پیامبرانه با هم داشتند و به‌عدد و به‌هم‌آهنگی به‌نظر وجودهای مقدسی می‌نگریستند، حتا تا زمان کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) بر ریاضی‌دانان بعد از خود، تأثیر عمیقی گذاشته بودند.

با وجود این، حتا در همان زمان‌های باستانی هم، این نظریه‌ی صوفیانه‌ی فیثاغورس، مورد سرزنش دیگران قرار می‌گرفت، از جمله هراکلیت اهل افه‌سوس، معاصر جوان‌تر فیثاغورس، درباره‌ی او می‌نویسد:

«فیثاغورس، فرزند منه زارخ، بیش از هر کس دیگری به‌تحقیق پرداخته است. با این بررسی‌ها، حکمت خاص خود را بیرون آورد که پرمعنی و فریب‌دهنده است».

ارستو هم نقل می‌کند که فیثاغورس، در آغاز به‌ریاضیات پرداخت و ویژگی عددها را بررسی می‌کرد، ولی بعدها از آن دور شد و به‌افسانه‌های فره‌دیک نزدیک شد.

از جمله قضیه‌هایی که فیثاغورس، از مصر و یا از مکتب ایونی تالس، گرفته است، قضیه‌ی فیثاغورس است که می‌گوید: در مثلث راست‌گوشه به‌ضلع‌های a و b و c (شکل ۴)، همیشه داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

اثبات این قضیه از شکلی که در این‌جا داده شده است، و از مدت‌ها پیش در چین و هند شناخته بوده است، روشن است و ثابت می‌کند که:

$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2} ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

به‌ویژه، از مدت‌ها پیش (دست کم از ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد)، مثلث با ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ را می‌شناخته‌اند و کشاورزان مصری، برای ساختن زاویه‌های قائمه، به‌کمک ریسمان، از آن استفاده می‌کرده‌اند. دورترین یادی که از قضیه‌ی فیثاغورس شده است، در شعرهای *آپولودار* ریاضی‌دان پیدا می‌شود، که خیلی شناخته شده نیست. در این شعرها گفته می‌شود:

«وقتی که *فیثاغورس* توانست شکل مشهور خود را پیدا کند، به‌افتخار آن قربانی بزرگی داد...»

کشف عددهای گنگ، به‌همین قضیه‌ی فیثاغورس مربوط می‌شود، یعنی کشف این مطلب که معادله‌ی $x^2=2$، جواب گویایی به‌صورت $x = \frac{p}{q}$ (p و q، عددهایی درست‌اند) ندارد. یکی از هندسه‌دان‌ها را، که این آگاهی نگران‌کننده را پخش کرده بود، غرق کردند. احتمال دارد که نظریه‌ی فلسفی *فیثاغورس*، به‌بازماندگان شرقی او منتقل شده باشد، ممکن است که خود فیثاغورس، سفری به‌مصر کرده باشد. کشف چندوجهی‌های منتظم هم، که به‌افتخار افلاتون (تولد حدود ۴۲۹ و مرگ در ۳۴۸ پیش از میلاد)، اجسام افلاتونی نامیده می‌شود (شکل‌های ۷ را ببینید)، به‌احتمال زیاد، مربوط به‌فیثاغوریان، *آرخیتاس* تارنتی بود که حدود سال ۳۶۰ پیش از میلاد مرد و به‌کمک او و *اقلیدس* و *افلاتون*، دانش ریاضی به‌آتن منتقل شد. شهری که در آن آکادمی *افلاتون* بنیان گذاشته شد. از آن مکتب، که *تئودیوس*، *اودوکسوس* و *منایخموس*، در سده‌ی چهارم پیش از میلاد، به‌آن منسوب‌اند، بعدها *اقلیدس* پیدا شد.[1]

۲. دوره‌ی اقلیدس

پیش از آن‌که به‌خود اقلیدس بپردازیم، نگاهی به‌وضع یونان آن زمان می‌اندازیم. از سال ۴۳۱ تا سال ۴۰۴ پیش از میلاد، جنگ‌های داخلی پلوپونز در یونان جریان داشت که شرح آن به‌وسیله‌ی توکیدید داده شده است. این جنگ‌ها چنان یونانی‌ها را ضعیف کرد که با وجود تهدید از خارج نتوانستند با هم متحد شوند و قربانی هجوم *فیلیپس* مقدونی شدند (پیکار در خرونه واقع در بئوسی در سال ۳۳۸). بعد از آن‌که *فیلیپس* در سال ۳۳۶ پیش از میلاد کشته شد، حکومت به‌پسر بزرگ‌تر او *اسکندر* ـ پرورش یافته‌ی *ارسطو* ـ رسید. اسکندر، در سال ۳۳۴ پیش از میلاد، به‌طرف ایران لشکر کشید و سرزمین‌های ایرانی، رسوخ کرد. بعد از مرگ *اسکندر* (در سال ۳۲۳ پیش از میلاد)، امپراتوری او بین فرماندهانش تقسیم شد، مهم‌ترین بخش این امپراتوری، در مصر و به‌وسیله‌ی بطلمیوس اداره می‌شد که شهر با شکوه اسکندریه را، که به‌وسیله‌ی *اسکندر* ساخته شده بود، مرکز خود قرار داد. در زمان بطلمیوس دوم، معروف به‌فیلادلفوس (یعنی محبوب پدر)، که در سال‌های ۲۸۵ تا ۲۴۶ پیش از میلاد بر مصر حکومت می‌کرد، در مصر، مرکزی برای الاهه‌ی هنر بنیان گذاشته شد. این نخستین موزه‌ی دولتی بود که در آن، شبیه دانشگاه‌ها و فرهنگستان‌های امروزی، برای مشاهده‌های نجومی و بررسی‌های کالبدشکافی، امکان‌های کافی به‌وجود آمده بود، کتاب‌خانه‌ی بزرگی داشت که شامل تعداد بسیار زیادی دست‌نویس از همه‌ی نقطه‌های جهان و از

۱. ف. انریکس، هندسه‌دان ایتالیایی (۱۸۹۱-۱۹۴۶) به‌طور شفاهی، اظهار عقیده می‌کرد که هندسه‌ی یونانی پیش از اقلیدس، برای پژوهشگر تاریخ، امتیاز بیش‌تری دارد، زیرا تصورهای او به‌ندرت، سرچشمه‌های معتبری پیدا می‌کند.

جمله فرهنگ یونانی بود. و روشن است که بدین ترتیب، اسکندریه به‌صورت مرکز سیاست، اقتصاد و فرهنگ جهان متمدن آن روز درآمد.

اسکندریه و موزه‌ی آن، بیش از پانصد سال، و تا زمانی که موزه‌ی آن به‌وسیله‌ی حامیان متعصب مسیحیت نابود شد، مرکز دانش و فرهنگ یونانی باقی ماند. از همان زمان بتلمیوس اول، که از سال ۳۰۶ تا سال ۲۸۳ پیش از میلاد، حکومت می‌کرد، فعالیت اقلیدس در اسکندریه آغاز شد که شاه‌کار خود، «مقدمات»، را به‌وجود آورد.

«مقدمات» *اقلیدس*، پر انتشارترین کتاب علمی است که تاثیری چنان عمیق و طولانی در نسل‌های بعد از خود داشته است و تا خود سده‌ی بیستم، کتاب اصلی در آموزش هندسه به‌شمار می‌رفته است و در سده‌های پی در پی، بارها و بارها چاپ شده است، تفسیرهای متعدد بر آن نوشته و به‌بسیاری از زبان‌ها، ترجمه شده است.

همان‌قدر که درباره‌ی «مقدمات» *اقلیدس* زیاد می‌دانیم، به‌همان اندازه، چهره‌ی خود *اقلیدس* را کم می‌شناسیم، حتا گاهی، مانند هومر، چهره‌ای افسانه‌ای به‌خود می‌گیرد. اغلب، این *اقلیدس* ریاضی‌دان را با *اقلیدس* فیلسوف اهل مگارا، که در حدود سده‌ی پنجم پیش از میلاد می‌زیسته است، اشتباه می‌کنند.

دو افسانه درباره‌ی اقلیدس وجود دارد:

جوانی از *اقلیدس* پرسید که فایده‌ی هندسه چیست؟ *اقلیدس*، به‌برده‌ی خود گفت، پولی به‌این جوان بدهید، زیرا او انتظار فایده‌ی عملی از هندسه دارد. این افسانه نشان می‌دهد که هندسه‌دانان یونانی تا چه اندازه از دانش‌های عملی متنفر بودند. البته، این موضوع مانع آن نشد که *اقلیدس*، کتابی درباره‌ی نور بنویسد. به‌ظاهر، سقرات هم از این عقیده دفاع می‌کرد که ریاضیات بر همه‌ی دانش‌هایی که کاربرد عملی دارند، برتری دارد.

افسانه‌ی دوم مربوط به‌اقلیدس را، پروکلوس دیادوخوس (دیادوخوس ـ به‌زبان یونانی یعنی جانشین ـ خلیفه ـ مترجم)، اهل بیزانس (قسطنطنیه، ۴۱۲-۴۸۵ میلادی) برای ما نقل می‌کند. ما، بسیاری از آگاهی‌های مربوط به‌هندسه‌ی یونانی را مدیون همین پروکلوس هستیم. بتلمیوس اول، پادشاه مصر، از اقلیدس پرسید: آیا راهی ساده‌تر از «مقدمات» در هندسه وجود ندارد؟ اقلیدس هندسه‌دان پاسخ می‌گوید: «نه. در هندسه، راه شاهانه وجود ندارد». البته، وقتی که در سده‌ی نوزدهم، هندسه‌ی تصویری کشف شد، معلوم شد که چنین راه شاهانه‌ای وجود دارد.

بنابر آگاهی پروکلوس، «مقدمات» *اقلیدس* براساس کار مشترک گروهی از هندسه‌دان‌ها، تنظیم شده است که در سال‌های از ۳۷۰ تا ۳۵۰ پیش از میلاد، در آکادمی افلاتون انجام داده بودند. بدین ترتیب، «مقدمات»، پیش از هر چیز، مجموعه‌ای است از آن چه که پیش از اقلیدس کشف شده بود، با وجود این، شامل چیزهای تازه‌ای هم هست. پروکلوس می‌گوید:

«*اقلیدس*، با تنظیم «مقدمات»، بسیاری از قضیه‌های *اودوکسوس* را جمع آوری کرد، آن چه را که تئودیوس آغاز کرده بود، تمام کرد و برای آن چه که پیشینیان او پیدا کرده بودند، استدلال دقیق ارایه داد».

معمول است، اثر *اقلیدس* را، نقطه‌ی آغازی می‌پندارند که پیشرفت هندسه از آن‌جا شروع شده است، ولی در واقع، بهتر است آن را به‌عنوان جمع‌بندی نتیجه‌هایی دانست که در جریان سیصد سال در زمینه‌ی هندسه به‌دست آمده بود. این دوره سیصد ساله، از مکتب *ایونی* در آسیای صغیر (حدود سده‌ی ششم پیش از میلاد) آغاز می‌شود، سپس در ایتالیای

جنوبی- در سده‌ی پنجم پیش از میلاد - به‌وسیله‌ی فیثاغوریان ادامه می‌یابد و سرانجام، در آتن (آکادمی افلاتون) در سده‌ی چهارم پیش از میلاد، به‌کمال خود می‌رسد (اگر آغاز پیشرفت ریاضیات جدید را از زمان لایپ نیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) بدانیم، هنوز سیصد سال از آن نگذشته است). قدیمی بودن «مقدمات» و بستگی کامل آن با مکتب فلسفی، دستاویزی برای مفیستوفل بوده است که می‌گوید:

«حال، آغاز کن تا عقل خود را رام کنی
و آن را زیر اراده‌ی خود درآوری
تا با آرامش، بدون خیال واهی،
و بدون شتاب زیادی،
از پلکان اندیشه بالا بروی،
تا عقل تو در هر مسیر،
این‌جا و آن‌جا، به‌راه کج نرود».

به‌این ترتیب، هندسه‌ی اقلیدس، از «اندازه‌گیری زمین» خیلی دورتر می‌رود و «عینی بودن» هم در آن خیلی کم دیده می‌شود. در «مقدمات» برای نخستین بار «روش اصل موضوعی» به‌کار رفته است که سرآغازی است برای منطقی کردن دانش‌ها براساس بعضی حکم‌های ساده و بنیانی غیرقابل اثبات.

فراگرفتن «مقدمات» اقلیدس، از جمله از «هندسه‌ی اصولی» هیلبرت (۱۸۹۹) از نظر علت‌یابی، پیچیده‌تر است. هیلبرت، از این جهت توانست کار خود را ساده‌تر کند که حساب (یعنی عددهای حقیقی) را دانسته گرفته است، و در نتیجه، اصل موضوعی کردن هندسه را براساس آموزش درباره‌ی عددها، طرح‌ریزی کرده است؛ درحالی‌که، *اقلیدس* برعکس او، می‌خواهد نظریه‌ی عددهای حقیقی را براساس هندسه، بنیان‌گذاری کند که به‌مراتب دشوارتر است.

۳. «مقدمات»

اکنون، به‌شرح مختصری از محتوای «مقدمات» می‌پردازیم. این کتاب از ۱۳ قسمت، یا «کتاب» تشکیل شده است که قسمت‌های دیگری هم، به‌وسیله‌ی نویسندگان بعدی به‌آن اضافه شده است. کتاب‌های I تا VI، به‌طور عمده از هندسه‌ی مسطحه، VII تا X از آموزش عدد و XI تا XIII از هندسه‌ی فضایی صحبت می‌کند.

کتاب اول، شامل سه بخش مقدماتی است که عبارت‌اند از: بخش اول تعریف‌ها، بخش دوم، «پوستولاها» و بخش سوم، «حکم‌های کلی». در این‌جا بعضی از تعریف‌ها را می‌آوریم:

۱- نقطه، چیزی است که هیچ جزیی ندارد.

۲- خط عبارت است از درازی بدون پهنا.

۳- خط، به‌وسیله‌ی نقطه‌ها محدود می‌شود.

۴- خط راست، خطی است که نسبت به‌همه‌ی نقطه‌های خودش به‌طور یکنواخت مرتب باشد.

۵- سطح، تنها درازا و پهنا دارد.

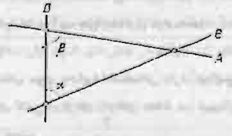
۶- سطح، به‌وسیله‌ی خط‌ها، محدود می‌شود.

۷- یک سطح را، صفحه گویند، وقتی که نسبت به‌همه‌ی خط‌های راست خودش، به‌طور یکنواخت مرتب باشد.

...

۲۳- دو خط راستی که بر یک صفحه باشند، موازی نامیده می‌شوند به‌شرطی که هراندازه آن‌ها را ادامه بدهیم، به‌هم نرسند.

به‌این ترتیب، در این‌جا صحبت بر سر چیزی از نوع هندسه‌ی عینی است و چنان مفهوم‌هایی را برمی‌شمرد که بعدها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در آن‌چه که برشمردیم، مفهوم عمیقی وجود دارد. در واقع تعریف‌های ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶، مبنایی برای نظریه‌ی بُعدها شد که به‌وسیله‌ی ل. براور (تولد در سال



شکل ۵

۱۸۸۱) و ا. شپرنر (تولد در سال ۱۹۰۵) طرح‌ریزی شد.[1] تعریف ۴، ناروشن و هم‌چنین تعریف ۷، مبهم است و هیچ مفهوم دقیقی را نمی‌رساند. کوشش‌هایی برای تغییر تعریف ۴ شد و خط راست را با این ویژگی که هر دو بخش دلخواه آن، «وضع مشابهی» نسبت به‌هم داشته باشند، معرفی کردند. همرون، تعریف ۷ را به‌این صورت تغییر داد: صفحه، می‌تواند هر خطی را که از دو نقطه‌ی واقع بر آن عبور می‌کند، دربر بگیرد. این تعریف از بعضی جهت‌ها مورد مخالفت ک. ف. گوس (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) قرار گرفت. اگرچه این «تعریف‌ها» در هر بار سودمند بود، ولی به‌هر حال برای اصولی کردن هندسه، به‌اندازه‌ی کافی نارسا بودند. تنها د. هیلبرت (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) است که به‌احتمالی در «هندسه‌ی اصولی» خود (۱۸۹۹) راهی را نشان داده باشد که بتوان از طریق آن، از سد اقلیدسی گذشت.

از همه قانع‌کننده‌تر، «پوستولاها» است که بستگی مفهوم‌هایی را که در «تعریف‌ها» وارد شده است، نشان می‌دهد. پوستولاها بیان می‌کنند:

۱ـ از دو نقطه‌ی متفاوت، درست یک خط راست می‌گذرد.

۲ـ هر خط راست را می‌توان به‌دلخواه امتداد داد[2].

۳ـ در صفحه، درست یک دایره با مرکز و قطر معلوم، وجود دارد.

۴ـ همه‌ی زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵ـ اگر مجموع زاویه‌های $\alpha+\beta$، از دو قائمه کوچک‌تر باشد (شکل ۵)، خط‌های راست A و B، در همان طرف خط راست C، یکدیگر را قطع می‌کنند.

این حکم آخری، در پیشرفت بعدی هندسه، نقش اساسی و مهمی به‌عهده داشته است. در اساس این حکم، حکم دیگری وجود دارد مبنی بر این‌که، خط راست C، صفحه را به‌دو «کناره» می‌برد. اگر به‌جای صفحه، شکل کره را در نظر بگیریم و دو سر یکی از قطرهای آن را مشخص کنیم، و به‌جای خط‌های راست در صفحه، دایره‌های عظیمه‌ی کره را در نظر بگیریم، دیگر مفهوم «کناره‌ها» نیروی خود را از دست می‌دهد. بسیاری از هندسه‌دان‌ها کوشش کردند تا پوستولای پنجم را، از دیگر اصل‌های اقلیدس نتیجه بگیرند. عدم امکان این نتیجه‌گیری، به‌وسیله‌ی *کارل فردریک گوس* (۱۷۷۷ـ۱۸۵۰)، *یانوش بایای* مجارستانی (۱۸۰۲ ـ ۱۸۶۰) و *نیکلای ایوانویچ لباچوسکی* (۱۷۹۲ـ۱۸۵٦)، و از طریق ساختن *هندسه‌ی نااقلیدسی* معلوم شد، که در آن همه‌ی بنیان‌های اقلیدس، به‌جز پوستولای پنجم وجود دارد.[3]

---

۱. در واقع باید گفت که تعریفهای ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ مبنایی برای نظریه‌ی بُعدها پ. س. اوریسون (۱۸۹۸ ـ ۱۹۲۴) شد. تعریف بُعد به‌وسیله‌ی براور و شپنر و یا درست‌تر به‌وسیله‌ی آ. لدیگ (۱۸۷۵ـ۱۹۲۴) و براور اساس به‌کلی دیگری دارد. برای اطلاع بر نظریه‌ی بُعدهای اوریسون، می‌توانید به‌ترجمه‌ی فارسی کتاب «داستان مجموعه‌ها» از صفحه‌ی ۱۷۰ به‌بعد مراجعه کنید. (مترجم).

۲. اقلیدس، اصطلاح‌های «پاره‌خط»، «نیم‌خط» و «خط راست» را از هم جدا نکرده است.

۳. گوس، بایای و لباچوسکی، بدون ارتباط با هم، هندسه‌ی نااقلیدسی را به‌وجود آوردند، ولی ←

چند جمله از «فرض‌های عمومی» کتاب اول می‌آوریم، که با توجه به‌نامگذاری فیثاغورس و ارستو، آن‌ها را آکسیوم هم می‌نامند؛ در واقع، بین آکسیوم و پوستولا، تفاوت ماهیتی وجود ندارد. آکسیوم‌ها به‌این ترتیب‌اند:

۱ـ از a=b و b=c نتیجه می‌شود a=c

۲ـ از a=b نتیجه می‌شود a+c=b+c

۳ـ از a=b نتیجه می‌شود a-c=b-c

....

۷ـ چیزهایی که یکدیگر را می‌پوشانند، برابرند.

۸ـ کل از جزء بیش‌تر است.

همه‌ی این‌ها، تنها از نظر هندسی، بررسی می‌شود. اگر از اصطلاح‌های امروزی استفاده کنیم، در آکسیوم ۷، این فکر نهفته است که مفهوم برابری باید نسبت به‌حرکت بدون تغییر بماند، یعنی هم‌نهشتی شکل‌ها را باید به‌مثابه برابری متری آن‌ها گرفت. درک روشن معنای حرکت در هندسه‌ی مقدماتی، بعد از ۱۸۷۰ و به‌یاری بررسی‌های س. لی و ف. کلین، به‌دست آمد. از جمله، مفهوم‌هایی که مربوط به‌قرار گرفتن نقطه‌ها برخط می‌شود، و با مفهوم «بین» بیان می‌شود، به‌کلی در «مقدمات» اقلیدس وجود ندارد. این موضوع، خیلی بعد و به‌وسیله‌ی گوس، پاشر، هیلبرت و باز هم بعد از آن‌ها شپرنر روشن شده است.

سپس در کتاب اول «مقدمات»، حکم‌ها یا قضیه‌هایی داده شده: که به‌کلی به‌اصل توازی بستگی دارند، مانند قضیه‌ی مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث در شماره‌ی ۴۷ این کتاب، قضیه‌ی فیثاغورس ثابت شده است. ناروشنی این اثبات مورد سرزنش شوپنهاور قرار گرفته است که کوشش ناموفقی هم در تکمیل آن کرده است.[۱]

در کتاب دوم، علاوه بر موضوع‌های دیگر، اثبات هندسی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

و در ارتباط با آن، حل معادله‌ی درجه دوم، آمده است.

کتاب سوم، به‌دایره اختصاص دارد، در این‌جا، قضیه‌ی تالس درباره‌ی زاویه‌ی محاط در نیم‌دایره آمده است.

بحث عمده‌ی کتاب چهارم، به‌روش ساختن چندضلعی‌های منتظم، به‌کمک پرگار و خط‌کش اختصاص داده شده است. این بخش، از کارهای فیثاغوریان مایه گرفته است. در این باره، بعدها هه‌رون (حدود یک سده پیش از میلاد)، و بعد دانشمندان ایرانی، و بعدتر ایتالیایی‌ها ـ در دوره‌ی نوزایی، مانند *پیروفرانچسکا* (۱۴۹۲-۱۴۱۰)، بعد آلمانی‌ها: *آلبرخت دیورر* (۱۵۲۸-۱۴۷۱) و *ای. کپلر* (۱۶۳۰ -۱۵۷۱) در کتاب بزرگ خود به‌نام «هم‌آهنگی جهان» (۱۶۱۹) هم کارهای زیادی کردند. مساله‌ی مربوط به‌تقسیم دایره به‌قسمت‌های برابر، به‌وسیله‌ی ک. ف. گوس و در الرش به‌نام Disquisitiones Arithmeticae، (۱۸۰۱) حل شد.

---

* ـ اندیشه‌های لباچوسکی بود که برای نخستین بار منتشر شد.

۱ـ شوپنهاور، ساختگی بودن اثبات‌های هندسی، و به‌ویژه، اثبات اقلیدس از قضیه‌ی فیثاغورس را سرزنش می‌کند (در حالی که، اگر به‌محتوای آن دقت شود، به‌اندازه‌ی کافی، منطقی است). او معتقد است که چنین استدلالی را می‌توان درباره‌ی هر حرکت فکری، با یک مراجعه به‌شکل، انجام داد. از این نقطه نظر، او حالت خاصی از قضیه‌ی فیثاغورس را (در مثلث متساوی‌الساقین) با دقت تمام ثابت کرد. به‌این ترتیب که مربعی روی وتر مثلث ساخت و آن را به‌وسیله‌ی قطرهایش به‌چهار بخش تقسیم کرد و ثابت کرد که هر کدام از این بخش‌ها برابر است با نیمی از مربعی که روی ضلع مجاور به‌زاویه‌ی قائمه ساخته می‌شود.

او ثابت کرد: یک چندضلعی منتظم را، تنها وقتی می‌توان به‌کمک خط‌کش و پرگار رسم کرد که تعداد ضلع‌های آن تنها شامل عامل‌های فرد اول به‌این صورت باشد.[۱]

$$P = 2^{2^n} + 1$$

از جمله، ۱۷ ضلعی منتظم را می‌توان ساخت $17 = 2^{2^2} + 1$ [گوس، این را در ۳۰ مارس سال ۱۷۹۶ ثابت کرد]. بر سنگ قبر گوس در گوتینگن، یک ۱۷ ضلعی ستاره‌ای نقش شده است.

در کتاب‌های پنجم، هفتم و هشتم، از کمیت‌ها، به‌صورت هندسی آن‌ها، صحبت می‌شود، چیزی که برای کشف عددهای گنگ، ضروری است. در کتاب هفتم، الگوریتم اقلیدس داده شده است که روش تعیین بزرگترین بخشیاب مشترک را به‌دست می‌دهد. در کتاب ششم، از تشابه‌ها و در کتاب نهم از استقرای کامل، یعنی نتیجه‌گیری $n+1$ از n، صحبت شده است. در کتاب دهم، عددهای گنگ به‌کمک اندازه‌گیری پاره‌خط‌ها، تفسیر می‌شود. در کتاب دهم، نتیجه‌گیری‌های فیثاغوریان، بحث‌های انتقادیِ زنون (حدود ۴۶۰ پیش از میلاد) و بررسی‌های آکادمی افلاتون گذاشته شده است.

بقیه‌ی کتاب‌ها، یعنی کتاب‌های یازدهم، دوازدهم و سیزدهم، به‌روشن کردن هندسه در فضا (هندسه‌ی فضایی) پرداخته است. این کتاب‌ها کامل نیستند (احتمال دارد که نویسنده نتوانسته باشد آن‌ها را تمام کند، زیرا بلافاصله بعد از نوشتن آن‌ها از دنیا رفته است) و به‌صورت ناقص به‌ما رسیده است. موضوع اصلی این کتاب‌ها، شرح ویژگی‌های اجسام منتظمی است که به‌اجسام افلاتونی مشهورند، و این نام به‌آن مناسبت است که در مکالمه‌های افلاتون از آن‌ها نام برده شده است. در کتاب یازدهم، تلاشی برای اصل موضوعی کردن نقطه، خط راست و صفحه، در فضا شده است، کتاب دوازدهم، به‌محاسبه‌ی مساحت‌ها و حجم‌ها (و به‌ویژه، به‌پیدا کردن حجم هرم) پرداخته است، و سرانجام در کتاب سیزدهم، از جسم‌های افلاتونی صحبت می‌شود.

در این‌جا، نمونه‌هایی از روش‌هایی که در این بررسی‌های فضایی به‌کار رفته است می‌آوریم. در این نمونه‌ها، از روش بیان و شیوه‌ی استدلالی که در زمان ما به‌کار می‌رود، پرهیز نکرده‌ایم.

۴. جسم‌های کوژ (محدب)

P_1، P_2، ..... و P_n را نقطه‌های ثابتی می‌گیریم.[۲] در هر نقطه‌ی P_i، جرم $M_i \geq 0$ را قرار می‌دهیم و گرانی‌گاه (مرکز ثقل) دستگاه را به‌دست می‌آوریم:

$$S = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2 + \dots + m_n P_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

اگر M_i، همه‌ی مقدارهای غیرمنفی را اختیار کند، نقطه‌ی S شبکه‌ی کوژ H را رسم می‌کند. اگر بین مجموعه‌ی M از نقطه‌های مفروض P_i، نقطه‌ای وجود داشته باشد که با حذف آن، H تغییر نکند، این نقطه‌ی P_i را کنار می‌گذاریم. بقیه‌ی نقطه‌ها، راس‌های شکل کوژ H خواهند بود.

ما، تنها به‌حالتی علاقه‌مندیم که M، و بنابراین H، در یک صفحه قرار نگیرد. در چنین حالتی، H یک چندوجهی با m وجه است. هر وجه، در صفحه‌ای واقع است و قطعه‌ی کوژی را تشکیل می‌دهد که دست کم

---

۱. یعنی، تعداد ضلع‌های چندضلعی به‌صورت $2^k P_1 P_2 \dots P_r$ باشد که در آن P_i $(i=1,2,\dots,n)$ عددهای مختلف اول به‌صورت $P_i = 2^{2^{n_i}}+1$ و r و k، عددهایی درست و مثبت هستند.

۲. در این‌جا، منظور از P_i، شعاع حامل i امین نقطه است.

شامل سه نقطه از M است؛ بنابراین

$$m \le \frac{n+(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}$$

فرض کنید وجه h از جسم H، دارای r راس در صفحه‌ای مانند c باشد. در این صورت، این وجه در صفحه‌ی c، دارای r راس است و به‌وسیله‌ی r یال از جسم H، محصور شده است. دو یال مجاور، در یک راس p از وجه h (و خود جسم H) به‌هم می‌رسند و زاویه‌ی داخلی α را در این راس تشکیل می‌دهند ($0<\alpha<\pi$)؛ زاویه‌ی متناظر خارجی در این راس برابر $\pi-\alpha$ می‌شود، که در آن π طبق معمول، برابر است با دو قائمه. مجموع زاویه‌های خارجی h برابر است با چهار قائمه:

$$\Sigma(\pi-\alpha)=2\pi$$

اگر همه‌ی زاویه‌های داخلی با هم برابر باشند، از برابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$r\alpha=\pi(r-2)$$

وجه h را منتظم گویند، وقتی که همه‌ی r ضلع و همه‌ی r زاویه‌ی داخلی آن برابر باشد. در هر یال k از جسم H، به‌هم می‌رسند. زاویه‌ی داخلی β ($0<\beta<\pi$) را که صفحه‌های این دو وجه با هم تشکیل می‌دهند، در نظر می‌گیریم. فرض کنید در راس p از جسم H، s یال به‌هم رسیده باشند: $3\le s\le n-1$. اگر همه‌ی زاویه‌های β، که s یال متقارب در راس p تشکیل می‌دهند، با هم برابر باشند، و اگر همه‌ی زاویه‌های دو سطحی α، که وجه‌های متقارب در p تشکیل می‌دهند، برابر یکدیگر باشند، در این صورت گویند که در راس p، یک کنج منتظم وجود دارد.

سرانجام، جسم H را وقتی منتظم گویند که همه‌ی وجه‌ها و همه‌ی کنج‌های آن، منتظم باشد، در ضمن عدد r، یعنی تعداد ضلع‌های هر وجه، مقداری ثابت و برای همه‌ی وجه‌ها یکی باشد، همچنین تعداد s یالی که در هر راس به‌هم رسیده‌اند، برای همه‌ی راس‌ها، یکی باشد. در این صورت، برای هر وجه داریم:

$$r\alpha=\pi(r-2)$$

و برای هر رأس

$$s\alpha<2\pi$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

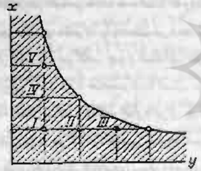
$$\frac{2\pi r}{s}>(r-2)\pi$$

و بنابراین

$$rs<2(r+s)$$

در ضمن فرض کردیم که $r>2$ و $s>2$ برای این‌که جواب‌های درست سه نابرابری اخیر را پیدا کنیم، فرض می‌کنیم: $r=x+2$ و $s=y+2$ در این صورت برای x و y داریم:

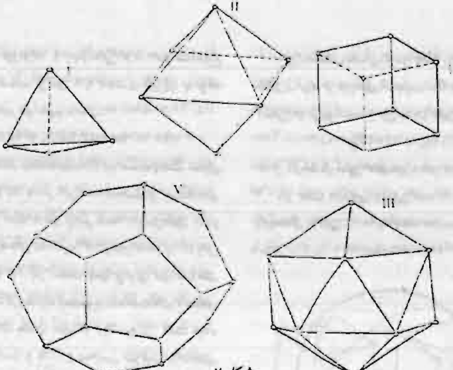
$$x>0,\ y>0,\ xy<4$$



شکل ۶

	I	II	III	IV	V
x	۱	۱	۱	۲	۳
y	۱	۲	۳	۱	۱
r	۳	۳	۳	۴	۵
s	۳	۴	۵	۳	۳

این نابرابری‌ها را می‌توان در صفحه‌ی (x,y)، به‌وسیله‌ی مثلثی نشان داد که به‌هر دو محور و یکی از شاخه‌های یک هذلولی محدود شده است (شکل ۶). در این مثلث پنج نقطه با مختصات صحیح وجود دارد، یعنی



شکل ۷

متناظر با این‌ها، می‌توان پنج جسم منتظم افلاتونی را به‌دست آورد. اگر n_0، n_1 و n_2 را به‌ترتیب تعداد راس‌ها، یالها و وجه‌های چندوجهی بگیریم، به‌این جدول می‌رسیم:

	I	II	III	IV	V
n_0	۴	۶	۱۲	۸	۲۰
n_1	۶	۱۲	۳۰	۱۲	۳۰
n_2	۴	۸	۲۰	۶	۱۲

که در آن، I با چهاروجهی، II با ۸ وجهی، III با ۲۰ وجهی، IV با ۶ وجهی (مکعب) و V با ۱۲ وجهی منتظم متناظر است (شکل ۷) در هر پنج حالت، این رابطه برقرار است:

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

اکنون می‌خواهیم، با پیروی از رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰) و لئوناراولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ثابت کنیم که این رابطه درباره‌ی هر چندوجهی کوژ H درست است، چندوجهی‌هایی که پیش از این آن‌ها را به‌صورت شبکه‌ی کوژی از n نقطه در نظر گرفتیم. برای این منظور، نقطه‌ی O را در داخل جسم H در نظر می‌گیریم، به‌مرکز O و شعاع واحد، دایره‌ی S را رسم می‌کنیم و با رسم شعاع‌هایی که در O به‌هم می‌رسند، وجه‌های جسم را بر این کره تصویر می‌کنیم. به‌این ترتیب، روی S، n_0 راس، P_i° (تصویر راس P_i از چندوجهی H) به‌دست می‌آید که به‌وسیله‌ی n_1 کمان دایره‌ی عظیمه، به‌هم مربوط شده‌اند. این کمان‌ها، S را به n_2 قسمت کوژ (چندضلعی‌های کروی)، تقسیم می‌کند که همان تصویر وجه‌های H هستند. اگر h° یکی از این قسمت‌ها روی S، و α° زاویه‌ی راس آن باشد، در این صورت مساحت f قسمت h° برابر است با

$$f = 2\pi - \Sigma(\pi - \alpha^\circ)$$

که در آن، مجموع را باید برای همه‌ی راس‌های قسمت h° در نظر گرفت. این رابطه، مربوط به ای. مولیر (۱۴۳۶-۱۴۷۶) است (که به‌نام رگیو مونتان مشهور شده است)، او در کینگسبرگ متولد شد و زمان کوتاهی

را در وین، نورنبرگ و رم زندگی کرد. اگر مجموع همه‌ی n_2 قسمت کره‌ی S را به‌دست آوریم، با توجه به‌رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$4\pi = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 + 2\pi n_0$$

در واقع، تعداد جمله‌های 2π، در سمت راست تساوی برابر است با n_2، به‌جز این، تعداد همه‌ی جمله‌های $(-\pi)$، برابر است با دو برابر تعداد یال‌های n_1 و مجموع زاویه‌های داخلی α° در هر کدام از n_0 راس برابر است با 2π. در سمت چپ برابری هم، مساحت کره‌ی واحد قرار دارد (مجموع مساحت‌های f همه‌ی بخش‌های h°)، همان طور که *ارشمیدس* ثابت کرده است، برابر است با 4π. و به‌این ترتیب، رابطه‌ی دکارت ـ *اولر* ثابت شد.

اکنون، به‌اثبات رابطه‌ی رگیو مونتان برای مساحت حوزه‌ی کوژ h° از کره‌ی واحد S، می‌پردازیم. اگر به‌جای زاویه‌ی داخلی α° زاویه‌ی خارجی $\gamma = \pi-\alpha^\circ$ را در نظر بگیریم، رابطه‌ی مورد نظر به‌این صورت درمی‌آید:

$$f = 2\pi - \Sigma\gamma$$

در این جا، مجموعی که در طرف راست برابری قرار دارد، به‌معنای *اندازه‌ی دوران*، ضمن دور زدن محدوده‌ی حوزه است.

اگر نیم‌دایره‌ای از کره‌ی S، که دو انتهای قطر کره را به‌هم وصل کرده است، دور قطر کره به‌اندازه‌ی زاویه‌ی γ دوران کند، سطح $f\gamma$ را «می‌پوشاند»، که با γ متناسب است. چون $f_{2\pi} = 4\pi$ بنابراین

$$f\gamma = 2\gamma$$

اکنون، اگر صفحه‌ی e، بر جسم کوژی که از وصل همه‌ی نقطه‌های h° به‌نقطه‌ی O، مرکز کره، به‌دست می‌آید، «بغلتد»، دایره‌ی عظیمه‌ای که این صفحه از s جدا می‌کند، سطحی از S را می‌پوشاند که برابر است با

$$\Sigma f_\gamma = 2\Sigma\gamma$$

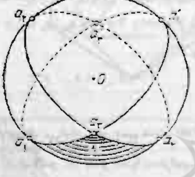
این مساحت، همه‌ی کره را به‌جز بخش h° و «بخش مقابل» آن‌که از قرینه‌ی h° نسبت به O به‌دست می‌آید (شکل ۸) می‌پوشاند. از این‌جا خواهیم داشت

$$4\pi = 2f + 2\Sigma\gamma$$

که از آن‌جا، درستی حکم مورد نظر ثابت می‌شود.

در حالت خاص، وقتی که h° یک مثلث با زاویه‌های داخلی $\alpha_i=\pi-\gamma_i$ باشد، به‌دست می‌آید:

$$f=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi$$

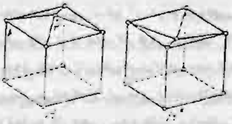


شکل ۸

مقداری را که در سمت راست برابری قرار گرفته است، *زیادتی کروی* گویند. زیرا در واقع نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های مثلث، چقدر از π تجاوز کرده است. این رابطه، که به‌ظاهر برای نخستین بار در سال ۱۶۳۲ و به‌وسیله‌ی *بوناونتورا کاوالیری* (۱۵۹۸ (۱) ـ ۱۶۴۷) ثابت شد، ساده‌ترین حالت رابطه‌ی *انتگرالی گوس ـ بونا*، در نظریه‌ی سطح‌هاست. به‌این ترتیب، از اندیشه‌ی فیثاغوری، که مجموع زاویه‌های مثلث مسطحه را دو قائمه می‌دانست، از طریق آغاز و پایان دوره‌ی رنسانس، وقتی که به‌حالت کروی تعمیم داده شد، و از طریق دوران گوس و کشف او درباره‌ی نظریه‌ی انتگرالی سطح‌های منحنی، راه مستقیمی تا امروز طی شده است.

۵. یک حکم اقلیدس درباره‌ی چندوجهی‌ها

در مورد دیگری هم، می‌توانیم چنین رابطه‌ی عمیقی را بین نتیجه‌گیری‌های جدید با موفقیت‌هایی که در طول دو هزار سال، و از زمان اقلیدس به‌دست آمده است، پیدا کرد. در تعریف‌های ۹ و ۱۰ از کتاب یازدهم «مقدمات»، به‌تقریب این حکم وجود دارد که: دو سطح وقتی همنهشت‌اند که به‌وجه‌های همنهشت، محدود شده باشند. درباره‌ی مفهوم این بیان، بیش‌تر دقت می‌کنیم.

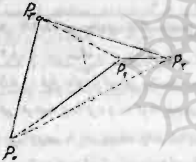


شکل ۹

به‌عنوان نمونه، مکعب W را با مرکز o در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی p را در خارج w، انتخاب می‌کنیم، به‌گونه‌ای که اگر مکعب W را دور op (که از راس مکعب نمی‌گذرد) به‌اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم، مکعب w بر خودش قرار گیرد. شبکه‌ی محدب W و P کوژ H است که یک بنا و شیروانی آن را به‌خاطر می‌آورد (شکل ۹). وجه‌های این جسم تشکیل شده است از ۵ مربع و ۴ مثلث که در P به‌هم می‌رسند. به‌کمک H، چندوجهی H° را درست می‌کنیم که در آن ۵ مربع به‌جای خود باقی باشند و برای ۴ مثلث، قرینه‌ی آن‌ها را نسبت به‌وجه ششم مربع، به‌دست آورده باشیم. اگر فاصله‌ی P از مکعب، کوچک‌تر از ضلع مکعب باشد، H° هم جسم بسته‌ای خواهد بود، که البته کوژ نیست، این جسم را می‌توان از W، با جدا کردن هرمی به‌دست آورد. روشن است که H و H° از وجه‌های همنهشت درست شده‌اند، یعنی وجه‌های این دو جسم می‌توانند نظیر به‌نظیر، یکدیگر را بپوشانند، در حالی که مسلم است که H و H°، همنهشت نیستند.

با توجه به‌همین نمونه ساده، روشن می‌شود که حکم اقلیدس، اگر دقیق‌تر نشود، درست نیست. به‌سادگی معلوم می‌شود که در این نمونه، نمی‌توان با یک حرکت پیوسته، از H به H° رسید، که ضمن آن همنهشتی و ردیف وجه‌هایی که یکدیگر را می‌پوشانند، حفظ شده باشد. ممکن است با اضافه کردن شرط انتقال پیوسته، حکم اقلیدس را از نارسایی نجات داد. ولی، این شرط اضافی هم دشواری را حل نمی‌کند، به‌این نمونه توجه کنید.

چهار ضلعی فضایی (چهار ضلعی چپ) با راس‌های P_0، P_1، P_2 و P_3 را با ضلع‌های برابر درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰). در چنین چهارضلعی، قطرهای P_0P_2 و P_1P_3 متنافر و متعامدند.



شکل ۱۰

بنابراین، می‌توانیم صفحه‌ی e_{02} را، که شامل P_0P_2 است، عمود بر P_1P_3، و هم‌چنین صفحه‌ی e_{13} را که شامل P_1P_3 است، عمود بر P_0P_2، رسم کنیم. در ضمن، برای نمونه نقطه‌های P_1 و P_3 نسبت به‌صفحه‌ی e_{02} قرینه‌ی یکدیگر می‌شوند. P_4 را نقطه‌ی دیگری از صفحه‌ی e_{13}، و P_5 را نقطه‌ی قرینه‌ی آن نسبت به‌صفحه‌ی e_{02} می‌گیریم. نقطه‌ی P_4 (و هم‌چنین نقطه‌ی P_5) را، به‌کمک چهار مثلث، به‌ضلع‌های

چهارضلعی چپ مفروض، وصل می‌کنیم. ۸ مثلثی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، با هم چندوجهی A را تشکیل می‌دهند، که وجه‌های آن همان وجه‌های هشت‌وجهی منتظم است. این‌که، این چندوجهی، خودش را قطع کرده است، نباید ما را ناراحت کند. می‌توان تصور کرد که ۱۲ یال چندوجهی از مفتول‌هایی درست شده است که در راس‌های P به‌هم لولا شده‌اند. به‌سادگی معلوم می‌شود که می‌توان A را به‌صورت پیوسته تغییر شکل داد، بدون این‌که طول یال‌های آن تغییر کند؛ در نتیجه در این تغییر شکل، وجه‌ها هم (که مثلثی شکل هستند)، تغییر نمی‌کند. چنین هشت وجهی متحرکی را، برای نخستین بار ک. سته *فانوس* یونانی (۱۸۵۷–۱۹۱۷) و د. بریکار فرانسوی (در سال ۱۸۹۷)، نشان دادند.

پرسشی پیش می‌آید. آیا می‌توان، با محدود شدن به‌بررسی چندوجهی‌های کوژ، درستی حکم اقلیدس را ضمانت کرد؟

در سال ۱۸۱۲ میلادی، لاگرانژ پیر (۱۷۳۶–۱۸۱۳)، این مساله را در برابر کوشی جوان (۱۷۸۹–۱۸۵۷) قرار داد. و کوشی، اثبات بسیار جالبی برای این فرضیه پیدا کرد و ما، کوتاه شده‌ی آن را در این جا می‌آوریم. با این نمونه، یکبار دیگر، این حقیقت تایید می‌شود که بیش‌تر *اندیشه‌های تازه، از ریاضی‌دان‌های جوان زاییده می‌شود، و البته، وجود ریاضی‌دانان پیر هم، به‌عنوان مامایی که این اندیشه‌ها را به‌دنیا می‌آورند، سودمند و لازم است.*

V را یک چندوجهی کوژ، یعنی محدوده‌ای از یک شبکه‌ی کوژ از مجموعه‌ی محدودی نقطه‌ها. و V° را چندوجهی کوژ دیگری می‌گیریم، به‌گونه‌ای که نگاشت آن به‌صورت پیوسته و یک ارزشی به‌روی V ممکن باشد و این‌که هر وجه چندوجهی V با وجه متناظرش در V° همنهشت باشد. باید ثابت کنیم که حرکت یا انعکاس منحصر به‌فردی وجود دارد که این نگاشت V بر V° را ممکن می‌سازد. در این‌جا، منظور ما از «انعکاس»، نگاشتی است که در نتیجه‌ی اجرا کردن به‌تعداد فرد، تقارن نسبت به‌صفحه، به‌دست می‌آید، یعنی چنان انعکاسی، که ضمن آن طول‌ها ثابت می‌مانند، ولی مفهوم‌های «راست» و «چپ»، جای خود را عوض می‌کنند.

K را، یالی از چندوجهی V؛ K° را، یال متناظر آن در چندوجهی V°، β را ($0 < \beta < \pi$)، زاویه‌ی دووجهی به‌راس یال k در چندوجهی V، و β° را زاویه‌ی دووجهی نظیر آن در چندوجهی V° می‌گیریم. برای کوتاه شدن کار فرض می‌کنیم: $\beta \neq \beta^\circ$ برای همه‌ی kها در V، روشن است که این وضع تنها در حالتی پیش می‌اید که V راس‌هایی نداشته باشد که در آن‌ها تنها سه یال به‌هم رسیده باشند. در حالتی که داشته باشیم $\beta < \beta^\circ$ یال k از چندوجهی V را مثبت و در حالت عکس، منفی می‌نامیم.

در این صورت، بنابر اثبات کوشی، پیش تهیه‌ی زیر درست است (ما این اثبات را نمی‌آوریم): ضمن دور زدن همه‌ی یال‌هایی که در یک راس V به‌هم رسیده‌اند، دست‌کم ۴ تغییر علامت پیش می‌آید، یعنی دست‌کم ۴ زاویه‌ی مسطحه در این راس پیدا می‌شود که در هر کدام از آن‌ها، ضلع‌ها دارای علامت‌های مختلف هستند.

حال، ما با دو روش این زاویه‌های مسطحه‌ی چندوجهی V را با ضلع‌هایی که دارای علامت‌های مختلف هستند، حساب می‌کنیم و آن را به‌تناقض می‌کشانیم. n_3، n_4، n_5،.... را تعداد مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها و.... بین وجه‌های V فرض می‌کنیم. در این صورت، تعداد وجه‌های چندوجهی V (که آن را به n_2 نشان می‌دهیم)، برابر است با

$$n_2 = n_3 + n_4 + n_5 + \dots$$

اگر تعداد یال‌های این چندوجهی را n_1 بگیریم، داریم:

$$2n_1 = 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \dots$$

در ضمن، بنا بر دستور دکارت ـ اولر داریم:

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2$$

از این سه برابری، برای n_0 (تعداد راس‌های چندوجهی V) به‌دست می‌آید:

$$2n_0 = 4 + a_4 + 2a_4 + 3a_5 + \dots$$

با توجه به‌پیش قضیه‌ی کوشی، می‌توان از این برابری، این نابرابری را برای w (تعداد زاویه‌های مسطحه با ضلع‌هایی که علامت آن‌ها مختلف است) به‌دست آورد:

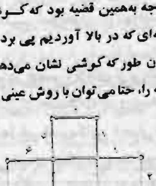
$$w \geq 4n_0 = 8 + 2a_4 + 4a_4 + 6a_5 + \dots$$

از طرف دیگر، وقتی که یک وجه مثلثی شکل از چندوجهی V را دور می‌زنیم، حداکثر دو تغییر علامت به‌دست می‌آوریم، ضمن دور زدن یک چهار ضلعی تعداد تغییر علامت‌ها از ۴ تجاوز نمی‌کند؛ به‌همین ترتیب می‌توان تعداد زاویه‌های مسطحه را، ضمن دور زدن پنج ضلعی و غیره تخمین زد. به‌این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$w < 2n_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + \dots$$

که به‌روشنی، نابرابری قبلی را نقض می‌کند.

با توجه به‌همین قضیه بود که کوشی به‌وجود پیش‌قضیه‌ای که در بالا آوردیم پی برد و آن را منظم کرد. همان طور که کوشی نشان می‌دهد، اثبات این پیش‌قضیه را، حتا می‌توان با روش عینی به‌دست اورد.



شکل ۱۱

در کنار قضیه‌ی مربوط به‌یکانگی، قضیه‌ی وجودی هم ظاهر می‌شود. برای این‌که این قضیه را منظم کنیم، به‌موضوعی می‌پردازیم که در هندسه‌ی مقدماتی، گستردن چندوجهی نامیده می‌شود. به‌عنوان نمونه، در شکل ۱۱، گسترده‌ی مکعب را داده‌ایم، یعنی مرزهای آن را مشخص کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که این مرزها، چگونه به‌هم چسبیده‌اند. در گسترده، به‌هر یال دو بار برخورد می‌کنیم، و برای این‌که چندوجهی، کوژ باشد، باید مجموع زاویه‌های داخلی که از وصل راس‌ها به‌یکدیگر به‌دست می‌آید، از چهار قائمه کم‌تر باشد. سرانجام، باید این فکر را دنبال کرد که گسترده‌ی ما، سطح توجیه‌شده‌ای را معین کند. منظور از توجیه شدن به‌این معناست که در هر وجه سطح، می‌توان چنان جهتی برای حرکت در نظر گرفت که یال مشترک این دو وجه، با دو جهت مخالف در این دو وجه باشد.

خود به‌خود این پرسش پیش می‌آید: آیا این قضیه‌ی وجودی درست نیست که:

برای هر گسترده‌ی بسته‌ی توجیه شده، که درباره‌ی آن، شرط $\Sigma a < 2\pi$ (برای زاویه‌هایی که در یک راس به‌هم می‌رسند) و قضیه‌ی اولر $n_0 - n_1 + n_2 = 2$ برقرار باشد، یک چندوجهی کوژ وجود دارد.

پیشرفت‌ها و تعمیم‌های بعدی درباره‌ی این موضوع به‌ترتیب به‌یاری بررسی‌های گوس، (۱۸۲۷)، ف. مینداینگا (۱۸۳۸)، ای. ژله (۱۸۵۳)، گ. لیبمان (۱۸۹۹)، گ. مینکوسکی (۱۹۰۰)، د. هیلبرت (۱۹۰۱)، س. کن ـ فوسن (۱۹۲۷)، آ. و. پوگورلوف (۱۹۳۹)، چه ژن ـ شن شن (۱۹۵۱) و بسیاری دیگر از ریاضی‌دان‌ها، انجام گرفت که از تفصیل درباره‌ی آن می‌گذریم.

و به‌این ترتیب، می‌بینیم، اندیشه‌ای را که اقلیدس مطرح کرده بود، توانست راهی برای پیشرفت هندسه تا زمان ما بگشاید.