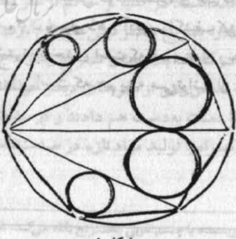
راجر هونسن برگر — برگردان: پرویز شهریاری

از تاریخ دانش وفن

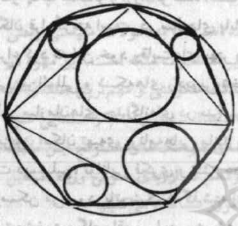
یک قضیه‌ی کهن ژاپونی

ژاپونی‌ها رسمی کهن دارند: آن‌ها کشف‌های خود را روی لوحی یا تخته‌ای می‌نویسند و بعد آن را در معبدها به احترام خدایان و به افتخار کسی که این کشف را کرده است، آویزان می‌کنند. (راجر جونسون هم در کتاب خود «گسترش هندسه‌ی اقلیدسی» در این باره حکایت کرده است). در سال ۱۸۰۰ در یکی از معبدهای ژاپونی، این قضیه‌ی زیبا روی لوحی نوشته شده است:

چندضلعی کوژی در دایره محاط شده است. از یک راس این چندضلعی همه‌ی قطرهای آن را رسم می‌کنیم. در هر یک از مثلث‌هایی که پدید می‌آید، دایره‌ای محاط می‌کنیم. مجموع شعاع‌های این دایره‌ها، مقدار ثابتی است و به انتخاب راس چندضلعی



شکل ۱

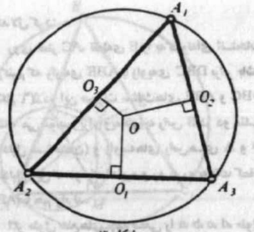


شکل ۲

بستگی ندارد.

به نظر می‌رسد که همین مقدار ثابت برای مجموع شعاع‌ها برای هر روش دیگری از تقسیم چندضلعی مفروض هم به دست می‌آید (شکل ۲) ما می‌خواهیم که این هر دو مساله به سادگی و به یاری قضیه‌ی عجیب کارنو (۱۷۵۳-۱۸۲۳) حل شوند.

پیش از آن که قضیه‌ی کارنو را تنظیم کنیم، شرط‌هایی را درنظر می‌گیریم. مثلث $A_1A_2A_3$ را محاط دایره‌ی به مرکز O در نظر می‌گیریم (شکل ۳). روشن است که نقطه‌ی O همیشه در درون به مثلث واقع نمی‌شود. بنابراین فاصله‌ی OO_i $(i = 1,2,3)$ از نقطه‌ی O تا ضلع مثلث را مقداری می‌گیریم که بتواند مثبت یا منفی باشد. فاصله‌ی OO_i را تنها در حالتی منفی می‌گیریم که پاره‌خط راست OO_i به طور کامل در



شکل ۳

بیرون مثلث واقع باشد (شکل ۴). با این شرط برای علامت فاصله‌ی OO_1، همیشه مساحت مثلث $A_1A_2A_3$ برابر مجموع جبری مساحت‌های مثلث‌های OA_1A_2 و OA_2A_3 و OA_3A_1 خواهد بود.

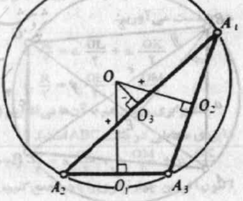
قضیه‌ی کارنو می‌گوید:

مجموع جبری فاصله‌های از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تا ضلع‌های مثلث، برابر است با مجموع شعاع‌های دایره‌ی محیطی و دایره‌ی محاطی مثلث، یعنی

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$$

که در آن، R شعاع دایره‌ی محیطی و r شعاع دایره‌ی محاطی مثلث است.[۱]

به مساله‌ی مربوط به تقسیم چندضلعی محاط در



شکل ۴

دایره، به مثلث برگردیم. مثلث‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. r_i شعاع دایره‌ای می‌گیریم که در مثلث iام محاط شده است؛ در ضمن OO_1^i، OO_2^i، OO_3^i را فاصله‌ی از O مرکز دایره‌ی بزرگ تا ضلع‌های iامین مثلث فرض می‌کنیم. در این صورت بنا به قضیه کارنو:

$$r_i+R= OO_1^i + OO_2^i + OO_3^i$$

بنابراین، مجموع مورد علاقه‌ی ما، یعنی مجموع شعاع‌های r_i را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$S=(OO_1^1+OO_2^1+OO_3^1)+(OO_1^2+OO_2^2+OO_3^2)+\dots$$
$$\dots - R - R - \dots - R$$

تعداد مثلث‌هایی که چندضلعی به آن‌ها تقسیم می‌شود، بستگی به روش تقسیم ندارد و در هر تقسیم n ضلعی کوژ به مثلث‌ها، به شرطی که قطرها یکدیگر را قطع نکنند، برابر است با $(n-2)$ مثلث. بنابراین، مقدار

$$- R - R - \dots - R$$

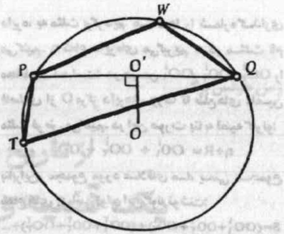
که در مجموع S وجود دارد، برای هر نوع تقسیمی، یکی و برابر $R(n-2)$ است. تنها این می‌ماند که برای همه‌ی روش‌های تقسیم، مجموع

$$S=(OO_1^1+OO_2^1+OO_3^1)+\dots(OO_1^{n-2}+OO_2^{n-2}+OO_3^{n-2})$$

مقداری ثابت و به نوع تقسیم بستگی نداشته باشد. ولی این، در یک دقیقه ثابت می‌شود.

قطر دلخواهی مانند PQ را در نظر می‌گیریم. این قطر بین دو مثلث تقسیم مشترک است (شکل ۵). عمود 'OO برای یکی از این مثلث‌ها، در بیرون مثلث قرار می‌گیرد و منفی است. در نتیجه مجموع آن برای همه‌ی مثلث‌ها برابر صفر است، زیرا «فاصله‌ی 'OO» در 'S دوبار آمده است: یک‌بار با علامت مثبت و بار دیگر با علامت منفی. بنابراین، مجموع 'S به طور ساده برابر می‌شود با مجموع فاصله‌ی از O تا ضلع‌های چندضلعی، و روشن است که این مجموع، مقدار ثابتی است. □

۱. حل قضیه‌ی کارنو را در پایان مقاله ببینید.



شکل ۵

لازار کارنو، که هونس برگر، در طرح قضیه‌ی خود به او اشاره می‌کند، بیش از آن که به خاطر کارهای ریاضی خود شناخته شده باشد، به خاطر فعالیت‌های سیاسی خود در دوران انقلاب کبیر فرانسه مشهور است. در آن زمان او را «سازمان‌ده پیروزی» می‌نامیدند. او در زمان ناپلئون وزیر جنگ و وزیر کشور در فرانسه بود.

سادی کارنو (۱۷۹۶ - ۱۸۳۲)، پسر لازار کارنو، نامی است که برای فیزیک‌دانان آشناست. او یکی از بنیان‌گذاران ترمودینامیک بود.

قضیه‌ی لازار کارنو، به خودی خود، بسیار جالب و مرواریدی بین قضیه‌های ریاضی است و نمی‌توان از اثبات آن گذشت. ظریف‌ترین اثبات شناخته شده‌ی قضیه‌ی لازار کارنو به قضیه‌ی بطلمیوس تکیه می‌کند که در سده‌ی دوم میلادی در اسکندریه می‌زیست و بیش‌تر به خاطر کارهایی که در اخترشناسی انجام داده است، مشهور است. او بنیان‌گذار دستگاه زمین‌مرکزی جهان است که تا زمان پیدایش کارهای کوپرنیک به رسمیت شناخته می‌شد. جدا از کارنو، درباره‌ی زندگی بطلمیوس چیز زیادی نمی‌دانیم.

قضیه‌ی بطلمیوس می‌گوید:

حاصل ضرب طول‌های دو قطر در چهارضلعی محاطی، برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های طول‌های هر دو ضلع روبه رو در چهارضلعی. برای اثبات قضیه‌ی بطلمیوس، از جمله می‌توان این گونه استدلال کرد:

روی قطر AC، نقطه‌ی E را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که زاویه‌ی ABE با زاویه‌ی DBC برابر باشد (شکل ٦). در این صورت مثلث‌های ABE و DBC متشابه می‌شوند، زیرا زاویه‌های به راس B در دو مثلث (به دلیل ساختمان) و زاویه‌های راس‌های A و D (به دلیل این که در یک دایره و رو به رو به یک کمان ABC) با هم برابرند.

اگر طول ضلع‌های چهارضلعی را a، b، c، d، طول قطرهای آن را e و f و طول پاره‌خط راست AE را x بنامیم (شکل ٦)، از تشابه این دو مثلث، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{x} = \frac{e}{c} \Rightarrow a.c = e.x \qquad *$$

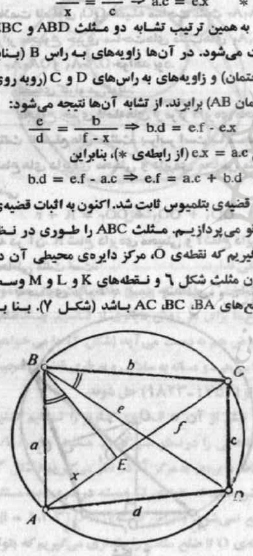
به همین ترتیب تشابه دو مثلث ABD و EBC ثابت می‌شود. در آن‌ها زاویه‌های به راس B (بنابر ساختمان) و زاویه‌های به راس‌های D و C (روبه روی به کمان AB) برابرند. از تشابه آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{e}{d} = \frac{b}{f - x} \Rightarrow b.d = e.f - e.x$$

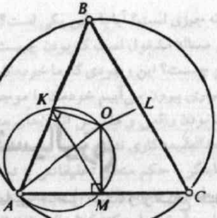
ولی $e.x = a.c$ (از رابطه‌ی *)، بنابراین

$$b.d = e.f - a.c \Rightarrow e.f = a.c + b.d$$

قضیه‌ی بطلمیوس ثابت شد. اکنون به اثبات قضیه‌ی کارنو می‌پردازیم. مثلث ABC را طوری در نظر می‌گیریم که نقطه‌ی O، مرکز دایره‌ی محیطی آن در درون مثلث شکل ٦ و نقطه‌های K و L و M وسط ضلع‌های BA، BC، AC باشد (شکل ۷). بنا بر



شکل ۶



شکل ۷

ساختمان، پاره‌خط‌های راست OL، OK و OM بر این ضلع‌ها عمودند و پاره‌خط‌های راست KL، LM و KM به ترتیب وسط ضلع‌های مثلث ABC را به هم وصل کرده‌اند. اگر دایره‌ی به قطر AO رسم کنیم، نقطه‌های K و M روی محیط آن قرار می‌گیرند، زیرا زاویه AKO و AMO قائمه‌اند. بنابراین درباره‌ی چهارضلعی محاطی AKOM می‌توان قضیه‌ی بتلمیوس را به کار برد:

$$AO.KM = AK.OM + AM.KO$$

ولی $AO=R$، $KM=\frac{a}{2}$، $AK=\frac{c}{2}$ و $AM=\frac{b}{2}$.

بنابراین، این برابری را می‌توان چنین نوشت:

$$a.\frac{R}{2} = c.\frac{OM}{2} + b.\frac{OK}{2}$$

اگر به همین ترتیب چهار ضلعی‌های محاطی BLOK و CMOL را در نظر بگیریم دو برابریِ دیگر هم به دست می‌آوریم:

$$b.\frac{R}{2} = c.\frac{OL}{2} + a.\frac{OK}{2}$$

$$c.\frac{R}{2} = b.\frac{OL}{2} + a.\frac{OM}{2}$$

یک برابری روشن هم به آن‌ها می‌افزاییم (r، شعاع دایره‌ی محاطی در مثلث ABC است).

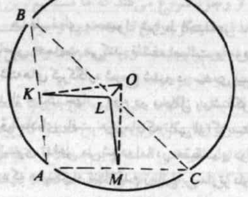
$$(a+b+c)\frac{r}{2} = a.\frac{OL}{2} + b.\frac{OM}{2} + c.\frac{OK}{2}$$

اکنون اگر این چهار برابری را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(a+b+c)\frac{R+r}{2} = (a+b+c)\frac{OM+OK+OL}{2}$$

که از آن جا بلافاصله قضیه‌ی کارنو نتیجه می‌شود.

اگر مثلث ABC در زاویه‌ی A (شکل ۸)، به جای چهار برابری که داشتیم، باید این برابری‌ها را نوشت:



شکل ۸

$$\frac{a.r}{2} = \frac{c.OM}{2} + \frac{b.OK}{2}$$

$$\frac{a.OK}{2} = \frac{c.OL}{2} + \frac{b.R}{2}$$

یا:

$$\frac{b.R}{2} = \frac{a.OK}{2} - \frac{c.OL}{2}$$

$$\frac{a.OM}{2} = \frac{b.PO}{2} + \frac{c.R}{2}$$

یا:

$$\frac{c.R}{2} = \frac{a.OM}{2} - \frac{b.OL}{2}$$

$$\frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{b.OM}{2} + \frac{c.OK}{2} - \frac{a.OL}{2}$$

از مجموع این چهار برابری به دست می‌آید:

$$\frac{(a+bc)(R+r)}{2} = \frac{a+b+c}{2}(OK+OM-OL)$$

و این استدلال قضیه‌ی کارنو برای زاویه‌ی منفرجه است.