پرویز شهریاری

از تاریخ دانش و فن

باز هم درباره‌ی عددهای کامل

● **عددهای کامل و هندسه**

درباره‌ی عددهای کامل، زیاد نوشته شده ولی، آن چه از این عددها پیدا شده است، زیاد نیست: تمام عددهای کاملی که تاکنون پیدا شده بیست و چهار عدد است.

به‌یاد آوریم: به‌عددی کامل گوییم که برابر مجموع همه‌ی بخش‌یاب‌های کوچکتر از خودش باشد. برای نمونه همه‌ی بخش یاب‌های عدد ۶ (که در ضمن، از ۶ کوچکترند) عبارت است از ۱ و ۲ و ۳ و داریم:

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

همچنین، بخش‌یاب‌های عدد ۲۸ (به‌جز خود ۲۸) عبارتند از:

$$۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴$$

و داریم:

$$۲۸ = ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴$$

یعنی، عددهای ۶ و ۲۸، عددهایی کامل‌اند.

این نخستین دو عدد کامل، از زمان‌های بسیار قدیم شناخته شده بود. دو عدد کامل بعدی (یعنی ۴۹۶ و ۸۱۲۸) را اقلیدس، در سده‌ی چهارم پیش از میلاد پیدا کرد. هزار و پانصد سال گذشت تا پنجمین عدد کامل (۳۳۵۵۰۳۳۶) شناخته شد تا میانه‌های سده‌ی بیستم، تنها ۷ نمونه از این عددها به‌دست آمده بود. از سال ۱۹۵۲، ماشین‌های محاسبه‌ی الکترونی (رایانه‌ها) به‌کمک آمدند. اگر نخستین عدد کامل (یعنی ۶) یک‌رقمی است، بیست و چهارمین عدد کامل، بیش از ۱۲۰۰۰ رقم دارد.

اقلیدس، نه تنها دو عدد کامل را پیدا کرد، بلکه کلید جست و جوی همه‌ی عددهای کامل زوج را هم به‌دست داد. او ثابت کرد که هر عدد زوج کامل به‌صورت $(۲^p-۱)۲^{p-۱}$ است، که در آن، هم p و هم $۲^p-۱$ باید عددهایی اول باشند. دو پرسش در برابر ما قرار می‌گیرد: آیا تعداد عددهای زوج کامل بی‌پایان است؟ و آیا، دست کم، یک عدد فرد کامل وجود دارد؟ به‌هیچ کدام از این دو پرسش، تاکنون پاسخی داده نشده است. *مرسن*، ریاضی‌دان فرانسوی هم، در سده‌ی هفدهم، به‌بررسی عددهای کامل پرداخت، او حدس زد که به‌ازای مقدارهای ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ برای p، رابطه‌ی *اقلیدس*، منجر به‌عدد کامل می‌شود. خود مرسن نتوانست، فرضیه‌ی خود را مورد آزمایش قرار دهد، زیرا بغرنجی و تفصیل

محاسبه‌ها، موجب اشتباه می‌شد. حقانیت مرسن را، برای عددهای ۱۷، ۱۹ و ۳۱ (برای p)، *لئونارد اولر* در سده‌ی هجدهم ثابت کرد. بعدها، روشن شد که پیش‌بینی مرسن درباره‌ی p=۶۷ و p=۲۵۷ اشتباه است، برای این که از این به‌بعد، عددهای مختلف به‌هم مخلوط نشوند، عددهای از نوع $2^p - 1$ را عددهای مرسن می‌نامیم.

در قدیم، عددهای کامل را، به‌خاطر دشواری پیداکردن آن‌ها و به‌خاطر ویژگی اسرارآمیزی که داشتند، عددهای خدایی می‌نامیدند. کلیسای سده‌های میانه اعلام کرده بود که مطالعه‌ی عددهای کامل نجات روح را به‌همراه دارد و اگر کسی بتواند یک عدد کامل جدید کشف کند، به‌سعادت ابدی خواهد رسید. همچنین اعتقاد داشتند جهان از آن جهت زیبا و دل‌فریب است که آفریدگار آن را در ۶ روز آفریده است. و نوع بشر، به‌این جهت ناقص است که آفرینش آن با عدد غیرکامل ۸ مربوط می‌شود. در واقع، تنها ۸ نفر بودند که از طوفان جهانی حضرت نوح جان به‌سلامت بردند. البته می‌توان در این باره اعتراض کرد، زیرا در همین طوفان، هفت زوج حیوان اصیل و هفت زوج حیوان غیراصیل نجات یافتند که روی هم برابر عدد کامل ۲۸ می‌شود. و می‌توان به‌چنین تصادف‌هایی، بسیار برخورد. برای نمونه دست‌های آدمی، مجهز به‌یک عدد کامل‌اند، زیرا در ده انگشت دست، ۲۸ بند وجود دارد.

از افسانه بگذریم و به‌ریاضیات برگردیم.

مربعی رسم کنید و قطرهای آن را بکشید. راس‌های مربع به‌وسیله‌ی ۶ پاره‌خط به‌هم وصل شده‌اند. این را می‌توان پیش‌آمد جالبی دانست، زیرا ۶، عددی کامل است.

بدیهی است که تا این‌جا، مطلب چندان مهمی نیست و با همه‌ی جالب بودن آن، باید گفت که از یک گل بهار نمی‌شود. جست‌وجو را ادامه می‌دهیم. مکعبی در نظر می‌گیریم و همه‌ی قطرهای آن را، چه روی وجه‌ها و چه در داخل خود مکعب، رسم می‌کنیم. مکعب دارای ۱۲ یال است، روی ۶ وجه آن به‌تعداد ۲×۶ یعنی ۱۲ قطر وجود دارد، ۴ قطر هم در داخل مکعب رسم می‌شود. روی هم ۲۸ پاره‌خط، باز هم عددی کامل.

بعد چه؟ یک چهاروجهی در نظر می‌گیریم، می‌بینیم که رأس‌های آن، به‌وسیله‌ی ۶ یال به‌هم وصل شده‌اند. کمی فکر کنیم، چرا چنین است؟ مربع و چهاروجهی هر کدام چهار رأس دارند و مکعب هشت وجه و داریم: $2^2=4$ و $2^3=8$. نوعی ارتباط پیدا شد، ولی نه چندان روشن و پاسخ‌گو.

حالا یک هشت ضلعی رسم می‌کنیم. هشت ضلعی، مانند مکعب دارای هشت رأس است و، در ضمن ۲۰ قطر دارد. باز هم مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها، برابر عدد کامل ۲۸ می‌شود.

جست و جو را ادامه می‌دهیم و به‌هرم با قاعده‌ی هفت‌ضلعی توجه می‌کنیم (این چندوجهی هم ۸ رأس دارد). این هرم، هفت یال جانبی دارد، قاعده‌ی آن دارای هفت‌ضلع و چهارده قطر است. یعنی در این جا هم، رأس‌های چندوجهی، به‌وسیله‌ی ۱۳ + ۷ + ۷، یعنی ۲۸ پاره‌خط به‌هم وصل شده‌اند.

حالا دیگر نمی‌شود وضع را تصادفی پنداشت. مساله را در حالت کلی خود، بررسی می‌کنیم. استدلال، تا حد زیادی، مقدماتی است.

مـــی‌دانـــیم کـــه n نـقطه را مـــی‌توان به‌وسیله‌ی $\frac{n(n-1)}{2}$ پاره‌خط به‌هم وصل کرد. بنابراین، اگر تعداد این رأس‌ها را برابر 2^p بگیریم (به‌شرطی که p و $1-2^p$، عددهایی اول باشند)، برای تعداد این پاره‌خط‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{2^p(2^p-1)}{2}=2^{p-1}(2^p-1)$$

و این همان شرط اقلیدس برای عددهای کامل است.

به‌این ترتیب، اگر در فضا (یا در صفحه) 2^p نقطه داشته باشیم (برای P باید شرط‌های اقلیدس برقرار باشد)، و هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط راست واقع نباشند، تعداد پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنند، برابر با یک عدد مرسن خواهد بود.

و به‌این ترتیب، رابطه‌ی اقلیدس درباره‌ی عددهای کامل، به‌هندسه‌ی اقلیدسی مربوط می‌شود.

یک ویژگی دیگر از عددهای کامل

عددی طبیعی در نظر بگیرید، رقم‌های آن را با هم جمع کنید تا عدد طبیعی تازه‌ای به‌دست آید. سپس، رقم‌های عدد تازه را با هم جمع کنید، و این روند را ادامه دهید تا به‌عددی یک رقمی برسید. این عدد یک رقمی را «مجموع نهایی رقم‌ها» می‌نامیم و آن را با σ نشان می‌دهیم. برای نمونه σ برای عدد ۲۷۸۱۶۳۶۵ برابر است با ۲، زیرا داریم:

$$2+7+8+1+6+3+6+5=38$$

$$3+8=11 \qquad 1+1=2$$

باقی مانده‌ی هر عددی بر ۹، برابر است با «مجموع نهایی رقم‌ها»ی آن عدد. روشن است که اگر عددی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۹ برابر صفر، و «مجموع رقم‌های نهایی» در آن برابر ۹ می‌شود.

این عدد طبیعی را در نظر می‌گیریم:

$$10^{n}.a+10^{n-1}.b+10^{n-2}.c+...+10p+r$$

آن را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(1^{n}0-1)a+(10^{n}-1)^{-1}b+(10^{n-2}-1)c+$$
$$+...+(10-1)p+(a+b+c+...+p+r)$$

روشن است که جمله‌های شامل عامل‌های به‌صورت $(1-10^k)$ بر ۹ بخش‌پذیرانـد. جمله‌های بعدی را ـ که در واقع، همان مجموع رقم‌های عدد مفروض است، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(10^{m}-1)a_1+(10^{m-1}-1)b_1(10^{m-2}-1)_1+c_1$$
$$+...+(10-1)p_1+(a_1+b_1+c_1+...+p_1+r_1)$$

مجموع رقم‌های $(a_1+b_1+c_1+...+p_1+r_1)$، باز تازه هم عدد کوچکتری است. اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام، به‌عددی یک رقمی می‌رسیم که همان «مجموع نهایی رقم‌ها» یا σ برای عدد مفروض است.

به‌این ترتیب، برای محاسبه‌ی σ لازم نیست مرتب رقم‌های عدد را با هم جمع کنیم. کافی است، ضمن جمع کردن رقم‌ها، مضرب‌های ۹ را کنار بگذاریم، تا در نتیجه، به‌عددی یک رقمی برسیم. برای نمونه، در عدد ۲۷۸۱۶۳۶۵ از ۷+۲ و ۱+۸ و ۳+۶ (که همه برابر ۹ هستند) صرف نظر می‌کنیم و در ۱۱=۵+۶، از عدد ۱۱، ۹ واحد کنار می‌زنیم، به‌همان عدد ۲، یعنی «مجموع نهایی رقم‌ها» می‌رسیم: $\sigma=2$.

از این جا نتیجه می‌شود که همیشه، اختلاف بین عدد مفروض A و «مجموع نهایی رقم‌ها»ی آن، برابر مضربی از ۹ می‌شود. بنابراین، می‌توانیم این رابطه‌ی هم‌نهشتی را بنویسیم:

$$A\equiv\sigma(\text{mod}.9) \qquad (1)$$

جدول ۱

۱	۱۰	۱۹	۲۸	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	...
۲	۱۱	۲۰	۲۹	۳۸	۴۷	۵۶	۶۵	...
۳	۱۲	۲۱	۳۰	۳۹	۴۸	۵۷	۶۶	...
۴	۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	۶۷	...
۵	۱۴	۲۳	۳۲	۴۱	۵۰	۵۹	۶۸	...
۶	۱۵	۲۴	۳۳	۴۲	۵۱	۶۰	۶۹	...
۷	۱۶	۲۵	۳۴	۴۳	۵۲	۶۱	۷۰	...
۸	۱۷	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۲	۷۱	...
۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	...

حالا، همه‌ی عددهای طبیعی را در جدول ۱، به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که مقدار σ برای عددهای هر سطر، ثابت و برابر عدد ستون سمت چپ در همان سطر باشد.

اگر عددهای نخستین ستون (یعنی ستون سمت چپ) را به a_i نشان دهیم، در آن صورت، هر عدد سطر iام (A_i) به‌این ترتیب نوشته می‌شود:

$$A_i \equiv a_i (\mathrm{mod}.۹) \qquad (۲)$$

هم نهشتی‌ها را، مانند تساوی‌های معمولی، می‌توان با هم جمع کرد (و بنابراین، می‌توان در هم ضرب کرد و یا به‌توان رساند).

$$\begin{array}{l} A_۱ \equiv a_۱ (\mathrm{mod}.۹) \\ A_۲ \equiv a_۲ (\mathrm{mod}.۹) \\ \hline A_۱ + A_۲ \equiv (a_۱ + a_۲)(\mathrm{mod}.۹) \end{array} \qquad (۳)$$

این حکم را ثابت می‌کنیم. از (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{A_۱ - a_۱}{۹} = B_۱, \quad \frac{A_۲ - a_۲}{۹} = B_۲$$

که در آن‌ها، $B_۱$ و $B_۲$، عددهایی طبیعی‌اند. از همین جا، صحت هم‌نهشتی (۳) روشن می‌شود.

اثبات مربوط به‌ضرب هم‌نهشتی‌ها و یا به‌توان رساندن یک هم‌نهشتی را، خودتان می‌توانید به‌سادگی به‌دست آورید.

a)
$$\begin{array}{l} ۲۱ \equiv ۳ (\mathrm{mod}.۹) \\ ۳۲ \equiv ۵ (\mathrm{mod}.۹) \\ \hline ۵۳ \equiv ۸ (\mathrm{mod}.۹) \end{array}$$

b)
$$۲۱ \times ۳۲ \equiv ۱۵ (\mathrm{mod}.۹)$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$۲۱ \times ۳۲ \equiv ۶ (\mathrm{mod}.۹)$$

بنابراین، برای این که روشن کنیم، مجموع چند عدد طبیعی (یا حاصل ضرب یا توان آن‌ها)، در چه سطری از جدول ۱ قرار گرفته‌اند، کافی است σهای آن‌ها را جمع کنیم (یا ضرب کنیم و یا به‌توان برسانیم).

حالا، جدول ۲ را، از توان‌های ۹ عدد طبیعی اول، با شروع از توان ۲، تشکیل می‌دهیم؛ در داخل پرانتزها σهای عددها نوشته شده است.

در جدول ۲ دیده می‌شود که در هر سطر، مقدار σ، بعد از ۶ توان فاصله، تکرار می‌شود. (σ برای توان ۲ و توان ۸ برابر هستند) بنابراین، کافی است تنها توان‌های از ۲ تا ۷ را در نظر بگیریم.

جدول ۲

(۱)	$۱^{۵}=۱$	(۱)	$۱^{۴}=۱$	(۱)	$۱^{۳}=۱$	(۱)	$۱^{۲}=۱$
(۵)	$۲^{۵}=۳۲$	(۷)	$۲^{۴}=۱۶$	(۸)	$۲^{۳}=۸$	(۴)	$۲^{۲}=۴$
(۹)	$۳^{۵}=۲۴۳$	(۹)	$۳^{۴}=۸۱$	(۹)	$۳^{۳}=۲۷$	(۹)	$۳^{۲}=۹$
(۷)	$۴^{۵}=۱۰۲۴$	(۴)	$۴^{۴}=۲۵۶$	(۱)	$۴^{۳}=۶۴$	(۷)	$۴^{۲}=۱۶$
(۲)	$۵^{۴}=۳۱۲۵$	(۴)	$۵^{۴}=۶۲۵$	(۸)	$۵^{۳}=۱۲۵$	(۷)	$۵^{۲}=۲۵$
(۹)	$۶^{۵}=۷۷۷۶$	(۹)	$۶^{۴}=۱۲۹۶$	(۹)	$۶^{۳}=۲۱۶$	(۹)	$۶^{۲}=۳۶$
(۴)	$۷^{۵}=۱۶۸۰۷$	(۷)	$۷^{۴}=۲۴۰۱$	(۱)	$۷^{۳}=۳۴۳$	(۴)	$۷^{۲}=۴۹$
(۸)	$۸^{۵}=۳۲۷۶۲$	(۱)	$۸^{۴}=۴۰۹۶$	(۸)	$۸^{۳}=۵۱۲$	(۱)	$۸^{۲}=۶۴$
(۹)	$۹^{۵}=۵۹۰۴۹$	(۹)	$۹^{۴}=۶۵۱۱$	(۹)	$۹^{۳}=۷۲۹$	(۹)	$۹^{۲}=۸۱$

(۱)	$۱^{۸}=۱$	(۱)	$۱^{۷}=۱$	(۱)	$۱^{۶}=۱$
(۴)	$۲^{۸}=۲۵۶$	(۲)	$۲^{۷}=۱۲۸$	(۱)	$۲^{۶}=۶۴$
(۹)	$۳^{۸}=۶۵۶۱$	(۹)	$۳^{۷}=۱۲۸۷$	(۹)	$۳^{۶}=۷۲۹$
(۷)	$۴^{۸}=۶۵۵۲۶$	(۴)	$۴^{۷}=۱۶۳۸۴$	(۱)	$۴^{۶}=۴۰۹۶$
(۷)	$۵^{۸}=۳۹۰۶۲۵$	(۵)	$۵^{۷}=۷۸۱۲۵$	(۱)	$۵^{۶}=۱۵۶۲۵$
(۹)	$۶^{۸}=۱۶۷۹۶۱۶$	(۹)	$۶^{۷}=۲۷۹۹۳۶$	(۱)	$۶^{۶}=۴۶۶۵۶$
(۴)	$۷^{۸}=۵۷۶۴۸۰۱$	(۷)	$۷^{۷}=۴۲۳۵۴۳$	(۱)	$۷^{۶}=۱۱۷۶۴۹$
(۱)	$۸^{۸}=۱۶۷۷۷۲۱۶$	(۸)	$۸^{۷}=۲۰۹۷۱۵۲$	(۱)	$۸^{۶}=۲۶۲۱۴۴$
(۹)	$۹^{۸}=۴۳۰۴۶۷۲۱$	(۹)	$۹^{۷}=۴۷۸۲۹۶۹$	(۹)	$۹^{۶}=۵۳۱۴۴۱$

از مقایسه‌ی دو جدول ۱ و ۲، نتیجه‌های بسیار جالب و زیادی به‌دست می‌آید. برای نمونه: توانی (به‌جز توان واحد) وجود ندارد که در آن: σ برابر ۳ یا ۶ باشد. σ برای توان ششم تنها برابر ۱ یا ۹ است و برای توان سوم علاوه بر ۱ و ۹، عدد ۸ هم برای σ پیدا می‌شود. برای توان‌های دوم و چهارم، مقدار σ (در هر دو مورد)، تنها عددهای ۱، ۴، ۷ و ۹ می‌شود، ولی جای ۴ و ۷ در آن‌ها عوض شده است.

این هم از این نتیجه‌ها: $\sigma=۲$ تنها در دو حالت پیدا شده است ـ در $۵^{۵}$ و $۲^{۷}$؛ و $\sigma=۵$ هم در دو حالت ـ $۲^{۵}$ و $۵^{۷}$. پایه‌ی عددها در هر دو حالت یکی است، ولی نماهای آن‌ها جابه‌جا شده است.

ویژگی‌هایی از این نوع را می‌توان در این جدول‌ها پیدا کرد. ولی همه‌ی این‌ها، مقدمه‌چینی بود، مقدمه‌ای برای خود داستان.

کمی دقت می‌خواهد تا به‌خاصیت جالب و بسیار مهم دیگری از جدول ۱ پی ببریم. معلوم می‌شود همه‌ی عددهای کامل زوج (به‌استثنای ۶)، تنها در سطر

اول جدول ۱ قرار دارند. به‌زبان دیگر، همه‌ی عددهای زوج کامل (به‌جز نخستین آن‌ها) نسبت به‌مدول ۹، با ۱ هم‌نهشت هستند. اگر عدد کامل را به S نشان دهیم، داریم: $S \equiv 1 \pmod{9}$

عددهای کاملی که از آن‌ها صحبت می‌کنیم (و عددهای کامل دیگری را هم نمی‌شناسیم)، در رابطه‌ی اقلیدس صدق می‌کنند:

$$S = 2^{p-1}(2^p - 1) \tag{5}$$

که در آن، هم p و هم 2^{p-1} باید عددهایی اول باشند.

حالا، به‌اثبات این حکم می‌پردازیم. می‌دانیم که عدد p، مانند هر عدد اول (به‌جز حالت استثنایی $p=2$)، عددی فرد است. از جدول ۲ معلوم است که برای توان فرد ۲، تنها با توان‌های ۳ و ۵ و ۷ سر و کار داریم. در ضمن، مقدار σ، در این موردها، به‌ترتیب، برابر است با ۸، ۵ و ۲. در این صورت، مقدار σ برای $(2^p - 1)$، به‌ترتیب، برابر ۷، ۴ و ۱ می‌شود. از طرف دیگر، نمای نخستین عامل در رابطه‌ی (۵)، یعنی $p-1$، ۲ یا ۴ یا ۶ می‌شود و مقدار σ برای 2^{p-1}، به‌ترتیب، برابر ۴، ۷ و ۱ می‌شود.

مقدار σ را در مورد دو عامل رابطه‌ی (۵) درهم ضرب می‌کنیم، 4×7، 7×4 و ۱، یعنی ۲۸، ۲۸ و ۱ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، مقدار σ، برای هر سه حاصل ضرب برابر واحد می‌شود و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از آن‌جا که هیچ شرطی، به‌جز فرد بودن، برای p نکردیم، علاوه بر عددهای کامل، همه‌ی عددهای دیگری هم که در رابطه‌ی (۵) صدق کنند، در سطر اول جدول ۱ قرار گرفته‌اند.

آیا فرهای (اجاق‌های) مایکروویو[1] روی غذا اثر نامطلوب می‌گذارند؟

برگردان: علی ذهبی

فرمایکروویو در حقیقت هیچ تفاوتی با دیگر وسایل طبخ غذا از لحاظ تاثیر بر مواد غذایی ندارد. تنها تفاوت این‌گونه فرها با دیگر وسایل طبخ غذا در این است که فرمایکروویو غذا را سریع‌تر گرم می‌کند. انرژی مایکروویو نوعی اشعه‌ی الکترو مغناطیسی مانند UV، نور قابل رویت، اشعه‌ی مادون قرمز یا اشعه ایکس است. آب موجود در غذا این انرژی مایکروویو را جذب می‌کند. این انرژی گرمایی تغییر فیزیکی و شیمیایی [در غذا] تولید می‌کند.

با این وجود فرهای مایکروویو انرژی کافی برای شکستن پیوندهای شیمیایی را ندارند. این به‌آن معناست که فرهای مایکروویو قادر به‌انجام تغییر مضر شیمیایی همچون تشکیل مولکول‌های واکنش‌پذیر و به‌احتمالی خطرناک معروف به‌بنیان‌های (رادیکال‌های) آزاد نیستند.

1. microwave oven