برگردان: پرویز شهریاری

از تاریخ دانش و فن

● نابرابری اقلیدس و نابرابری برنولی

حکم بیست و پنجم کتاب پنجم «مقدمات» اقلیدس[۱] ریاضی‌دان مشهور می‌گوید: اگر چهار مقدار به‌تناسب هندسی باشند، آن وقت مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها، از مجموع دو تای دیگر بزرگ‌تر است (یعنی مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله‌ها، از مجموع دو تای دیگر بزرگ‌تر). به‌نظر خواننده‌ی امروزی، این حکم خیلی دشوار نیست، ولی این حکم نتیجه‌های مهمی از حساب و آنالیز را در خود پنهان دارد. برای نمونه، به‌یاری آن می‌توان یکی از قضیه‌های جالب را درباره‌ی تصاعدها ثابت کرد که از آن نابرابری مشهور یاکوب برنولی[۲] نتیجه می‌شود. ولی صحبت در این باره را برای بعد می‌گذاریم.

اکنون به‌نابرابری اقلیدس می‌پردازیم. باید گفت، استدلال اقلیدس در این باره، همان گونه که در تمام کتاب، با روش خالص هندسی بیان شده است. به‌طور کلی، اقلیدس در «مقدمات»، با خواننده‌ی خود، به‌زبان هندسی صحبت می‌کند: نه تنها مطالب هندسی را، بلکه حتا قضیه‌هایی که جنبه‌ی حسابی خالص دارند (حتا استدلال مربوط به‌بی‌پایان بودن عددهای اول: قضیه‌ی بیستم از کتاب نهم)، در «مقدمات»، با استدلال هندسی بیان شده‌اند.

یونانی‌ها در دوران شکوفایی و دانش خود، در نظام برده‌داری به‌سر می‌بردند. این نظام بر اساس برده‌داری خصوصی بود. «اعتبار» هرکس بسته به‌تعداد برده‌های او بود. حتا افلاتون در جمهور خود،

---

۱. اقلیدس، ریاضی‌دان بزرگ یونان باستان، در سده‌ی سوم پیش از میلاد می‌زیست. کار اساسی او، کتاب شش جلدی «مقدمات» است، که تاثیر عظیمی بر پیشرفت تمامی ریاضی‌دانان داشت.

۲. یاکوب برنولی، سرسلسله‌ی خاندان مشهور برنولی، ریاضی‌دان سویسی، در نیمه‌ی دوم سده‌ی هفدهم می‌زیست. به‌فرانسه، هلند، بلژیک و انگلستان سفر کرد و در ۱۶۸۲ به‌سویس بازگشت. استاد ریاضی دانشگاه بال بود و در زمینه‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال کار می‌کرد.

به‌گونه‌ای برده‌داری را می‌پذیرد. جامعه به‌دو طبقه‌ی «آزادها» و برده‌ها تقسیم شده بود. همه‌ی کارهای عملی به‌عهده‌ی برده‌ها بود و «آزادها» تنها درباره‌ی اداره‌ی جامعه و مساله‌های فلسفی بحث می‌کردند. حتا دانشی که کاربرد عملی داشت دور از مقام آزادها بود. تنها عده‌ی کمی از دانشمندان یونانی (مانند ارشمیدس که گویا برده‌ای آزاد شده بود) به‌دانش‌هایی پرداخته‌اند که جنبه‌ی کاربردی دارد. به‌همین مناسبت، برای نمونه، یونانی‌ها در حساب و ریاضیات محاسبه‌ای هیچ پیشرفت چشم‌گیری نداشتند، ولی در هندسه ــ که گمان می‌کردند، کاربرد عملی ندارد ــ تا درون هندسه‌ی عالی پیش رفتند. به‌این دلیل است که اقلیدس همه جا، تکیه‌ی استدلال‌های خود را بر هندسه می‌گذارد.

ولی اندیشه‌ای که اقلیدس برای اثبات این قضیه‌ها با روش هندسی به‌کار برده است، آن قدر روشن است که انتقال آن‌ها از روش هندسی به‌روش حسابی یا جبری، هیچ دشواری به‌وجود نمی‌آورد.

باید ثابت کنیم: اگر a، b، c و d، عددهایی مثبت باشند و داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

آن وقت، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد از این عددها، از مجموع دو عدد دیگر بزرگ‌تر است.

درواقع، بی آن که به کلی بودن حکم لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم a را بزرگ‌ترین جمله به‌حساب آوریم. از تناسب

$$d = b\frac{c}{a} = c\frac{b}{a}$$

و چون هر دو کسر $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ از واحد کوچک‌تر هستند، نتیجه می‌گیریم $d < b$ و $d < c$. بنابراین d کوچک‌ترین جمله‌ی تناسب است و باید این نابرابری را ثابت کنیم:

$$a + d > b + c$$

به‌ترتیب داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow a-b=\frac{b}{d}(c-d)$$

چون $c - d > 0$ و $\frac{b}{d} > 1$، پس

$$a - b > c - d$$

و یا $a + d > b + c$. و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

□

اکنون قضیه‌ی برنولی را درباره‌ی تصاعدها تنظیم و ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر (a_n) یک تصاعد حسابی و (b_n) یک تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت باشند، در ضمن بدانیم $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ و $a_1 \neq a_2$، آن وقت جمله‌های تصاعد هندسی با آغاز از جمله‌ی سوم بزرگ‌تر از جمله‌های نظیر در تصاعد حسابی‌اند.

اثبات: اگر $m > 2$ بگیریم، داریم:

$$\frac{b_m}{b_{m-1}}=\frac{b_2}{b_1}$$

اگر تصاعد (b_n) را صعودی بگیریم، معلوم می‌شود از چهار جمله‌ای که در این جا نوشتیم، بزرگ‌ترین جمله b_m و کوچک‌ترین جمله b_1 است: و اگر (b_n) یک تصاعد نزولی باشد، برعکس، b_1 بزرگ‌ترین و b_m کوچک‌ترین عدد از چهار عدد است. بنابراین، چه در حالت اول و چه در حالت دوم، بنابر قضیه‌ی اقلیدس داریم:

$$b_m + b_1 > b_{m-1} + b_2$$

به‌یاد بیاوریم که $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. اگر قدر

نسبت تصاعد (O_n) را با d نشان دهیم، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$b_m > b_{m-1} + d$$

که برای هر عدد طبیعی $m > 2$ درست است.

اگر به m عددهای ۳، ۴، ۵،...، n را نسبت دهیم به‌دست می‌آید:

$$b_3 > b_2 + d$$
$$b_4 > b_3 + d$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$b_n > b_{n-1} + d$$

با جمع کردن این نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$b_n > b_2 + (n-2)\,d = a_2 + (n-2)\,d = a_1 + (n-1)\,d = a_n$$

به‌این ترتیب، برای هر $n > 2$ داریم:

$$b_n > a_n$$

نتیجه (نابرابری برنولی). اگر $-1 < h$ و $h \neq 0$ باشد، آن وقت برای هر عدد طبیعی $1 < h$ داریم:

$$(1 + h)^n > 1 + nh$$

درواقع، اگر دو دنباله‌ی عددی در نظر بگیریم:

$$1,\quad 1 + h,\ (1 + h)^2, \dots, (1+h)^n, \dots$$
$$1,\quad 1 + h,\quad 1 + 2h, \dots, \quad 1 + nh, \dots$$

اولی یک تصاعد هندسی و دومی یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهد، در ضمن آن‌ها، با شرط قضیه‌ی برنولی سازگار هستند. بنابراین

$$(1 + h)^n > 1 + nh \ (n = 2, 3, 4, \dots)$$

یادآوری می‌کنیم، این نابرابری به‌ازای $h > 0$ از دستور بسط دو جمله‌ای نتیجه می‌شود، ولی برای $-1 < h < 0$، حتا برای آن‌ها که با دستور بسط دو جمله‌ای آشنا هستند، به‌طور کامل روشن نیست.

***

● عدد π

۱) بیست سال تمام ـ از سال ۱۸۵۳ تا ۱۸۷۳ میلادی ـ طول کشید تا ۷۰۷ رقم متوالی آن به‌دست آمد. کسی که، شجاعت این محاسبه را پیدا کرده بود، ویلیام شنکس نام داشت. و پیش از آن که بشر به‌رایانه دست یابد، کسی شهامت این را پیدا نکرد که آزمایش ویلیام شنکس را تکرار کند و مورد تحقیق قرار دهد. بیش از ۷۰ سال گذشت تا در سال ۱۹۴۵، معلوم شد ۵۱۹ رقم نخستین محاسبه‌ای که شنکس انجام داده بود درست است و بقیه‌ی رقم‌ها، از رقم ۵۲۰ به‌بعد نادرست.

در سال ۱۹۴۹، دنباله‌ی عدد π را تا ۱۱۲۰ رقم به‌کمک ماشین‌های محاسبه به‌دست آوردند و بعد از آن، وقتی با تکمیل رایانه‌ها، «قدرت» محاسبه‌ی بیشتری پیدا شد، برای نمونه در ژانویه‌ی سال ۱۹۵۸ تا ۱۰۰۰۰ رقم (در مدت ۱۰۰ دقیقه) و در ژوییه ۱۹۶۱ تا ۱۰۰۶۲۵ رقم (در مدت ۸ ساعت و ۴۳ دقیقه) را به‌دست آوردند. محاسبه‌ی اخیر به‌وسیله‌ی جون رنچ و دانیل شنکس (که خویش ویلیام شنکس بود)، انجام شد.

دانشمندان روی ۱۶۰۰۰ رقم نخستین عدد π بررسی‌هایی کرده‌اند و نتوانسته‌اند هیچ گونه وضع «غیرعادی»، برای یک یا چند رقم، از ۱۰ رقم موجود، پیدا کنند. در این «دنباله»، هر کدام از رقمهای ده‌گانه، به‌تقریب به‌اندازه‌ی ۱۰ درصد رقم‌ها، تکرار شده‌اند.

یکی از ویژگی‌های بسیار جالب وضع رقم‌ها این است که بارها و بارها ۳ یا ۴ و حتا ۶ رقم مساوی به‌دنبال هم می‌آیند.

۲) می‌دانیم که عدد $\pi = 3/14159265\dots$، نمی‌تواند ریشه‌ی معادله‌ای با ضریب‌های صحیح باشد؛ ولی عدد $x \approx 3/14160$ ریشه‌ی معادله‌ی

$$15x^2 - 78x + 97 = 0$$

و عدد $x \approx 3/14158805$ ریشه معادله‌ی $19x^2 - 39x - 65 = 0$ است.