برگردان: نگار نادری

عمر خیام، ریاضی‌دان

د. ج. استرویک[1]، ام. آی. تی[2]، کمبریج، ماساچوست

پیش‌گفتار

رباعی‌های عمر خیام به‌ترجمه‌ی زیبای ادوارد فیتز جرالد[3] و اغلب آراسته به‌تصاویری لطیف، برای بسیاری از ما آشناست. بسیاری از کسانی که *رباعی‌ها* را دوست دارند، چه به‌خاطر انگلیسی آهنگین قطعه‌ها، که فلسفه‌ی زندگی در آن‌ها شبیه فلسفه‌ی کتاب جامعه در کتاب مقدس یا فلسفه‌ی اپیکور است، و چه به‌خاطر تصویرهای زندگی در حکومت ساسانیان، یا پادشاهان سلجوقی در ایران [که در این رباعی‌ها آمده است]، نمی‌دانند سراینده‌ی آن‌ها، ابوالفتح عمربن ابراهیم خیام اهل نیشابور در شمال ایران، فیلسوف، منجم و ریاضی‌دانی نامدار نیز بوده است. او به‌عنوان فیلسوف، طرفدار ارستو بود و او را با خِرَدگرایی دقیقی تفسیر کرد؛ به‌عنوان منجم، تقویمی نگاشت دقیق‌تر از تقویمی که سده‌ها پس از آن پاپ گرگوری سیزدهم عرضه کرد و اینک بیش‌تر مردم آن را پذیرفته‌اند. ریاضیات او برای خوانندگان انگلیسی زبان با ترجمه‌ی *جبر و مقابله* توسط کثیر (Kasir) که در سال ۱۹۳۱ چاپ شد، آشناتر است[4]؛ ترجمه‌ی فرانسوی آن توسط وُپکه نیز از سال ۱۸۵۱ موجود است. به‌تازگی ترجمه‌ی روسی این اثر منتشر شده که همراه است با ترجمه‌ی برخی دیگر از نوشته‌های علمی وفلسفی خیام، به‌گونه‌ای که اکنون می‌توانیم درک به‌نسبت بیش‌تری از موقعیت خیام در تاریخ اندیشه داشته باشیم.

زندگی خیام را بیش‌تر میان سال‌های ۱۰۴۰ و ۱۱۲۳ میلادی / ۴۳۱ و ۵۱۸ هجری قمری می‌دانند، اما این‌ها قطعی نیستند و می‌توان گفت شکوفایی او در دوره‌ای مقارن با اولین جنگ

---

1. D. J. Struik
2. Massachusetts Institute of Technology
3. Edward Fitzgerald

۴. پس از آن، ترجمه‌ی انگلیسی کتاب *جبر و مقاله* یک بار دیگر در سال ۱۹۵۰ توسط وینتر و عرفات انتشار یافت، و در سال ۱۹۸۱ رشدی راشد و احمد جبار متن «مقاله فی جبر و المقابله» را با ترجمه و تفسیر به‌زبان فرانسه منتشر کردند (قربانی، *زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دان دوره‌ی اسلامی*، ص ۳۳۱ ـ ۳۳۲، تهران، ۱۳۶۵ ش).

صلیبی بود. در سال ۱۸۵۹ فیتز جرالد که اولین چاپ رباعی‌ها را منتشر کرد (که آن زمان هر نسخه به‌قیمت یک پنی فروخته شد و اکنون به‌نسخه‌ای ۸۰۰۰ دلار رسیده است)، مقدمه و زندگی‌نامه‌ی خیام را به‌آن افزود. این زندگی‌نامه بارها تجدید چاپ شد و نیازی به‌تکرار جزییات آن نیست. یادآوری همین مقدار کافی است که خیام پس از تحصیل در نیشابور، به‌عنوان یک متفکر زندگی آرامی در جوار دربار سلاطین سلجوقی، ابتدا در بغداد و سپس در مرو داشت. او در نیشابور دفن شد، که حکومت ایران در ۱۹۳۴ (۱۳۱۳ ه. ش.) بنایی مرمرین بر گور او بنا کرد.

از لحاظ تبار، او خراسانی و اهل منطقه‌ای بود که در دوران باستان به‌عنوان بلخ شناخته می‌شد و مردان برجسته‌ای چون فردوسی و ابن‌سینا از آن جا برخاسته‌اند. نفوذ هر دوی آن‌ها در کار خیام دیده می‌شود. مولف نامدار دیگر، هم‌درس خیام در نیشابور، نظام‌الملک [۱] بود که در دربار سلجوقی وزیر شد و کتابش *سیاستنامه* در ایران شهرت دارد و در سال ۱۹۴۹ ترجمه‌ی روسی آن تجدید چاپ شد. علاقه‌ی آکادمیک به‌خیام که از قبل در ایران بود، اکنون در اتحاد شوروی فزونی یافته است. البته علاقه‌ی عمومی دراز مدتی وجود داشته، چون رباعی‌های خیام، به‌سان شعرهای فردوسی، دهن به‌دهن در تمام دوره‌ها در میان ساکنان نزدیک به‌مرزهای ایران، شوروی و افغانستان نقل می‌شده است.

حل معادله‌های درجه‌ی سوم

دانش ما از عمر خیام به‌عنوان یک اندیشمند، امروزه با انتشار نوشته‌هایش فزونی یافته است. به‌تازگی در یک ترجمه‌ی روسی، از دو اثر ریاضی، اثری در فیزیک، و پنج رساله‌ی فلسفی که باکتابی درباره‌ی زندگی و آثار خیام بر پایه‌ی اطلاع دقیق از تمام منابع دنبال شده، در دسترس قرارگرفته است. انتشار این کتاب مرهون کوشش پروفسور س. ب. ماروچنیک [۲]، ب. ا. روزنفلد [۳]، و آ. پ. یوشکیویچ [۴] است. در این جا در ابتدا باید به‌دستاورد ریاضی خیام بپردازیم. اولین آن‌ها *جبر و مقابله* [مقاله فی الجبر و المقابله] یا به‌صورت کامل [انگلیسی] آن:

On Demonstrations of Problems of Algebra and Almucabala

۱. این داستان افسانه‌ای نادرست است و حقیقت ندارد، چراکه نظام‌الملک به‌هنگام تولد خیام در حدودسی سال داشته است (قربانی، همان، ص ۳۲۶).

2. S. B. Moročnik
3. B. A. Rozenfeld
4. A. P. Juškevič

ترجمه‌ای از همان نسخه‌ی عربی لیدن که مورد استفاده‌ی وُپِلَه[1] بود. (ترجمه‌ی کثیر از نسخه‌ای متعلق به‌پروفسور د. ا. اسمیت از کالج معلمانِ[2] دانشگاه کلمبیا است). برای ما که پیش از این به‌ترجمه‌ی انگلیسی دست‌رسی داشته‌ایم، جذابیت آن بیش‌تر به‌خاطر تفسیری است که مکمل کار کثیر است. در این کتاب ۱۰۷۹ میلادی / ۴۷۱ هجری قمری به‌عنوان سال پایان کتاب ذکر شده است. کسانی که ترجمه‌ی کثیر را نخوانده‌اند ممکن است بخواهند بدانند خیام در *جبر و مقابله‌ی* خود روش‌هایی را که در *اصول* اقلیدس (۳۰۰ پیش از میلاد) برای حل معادله‌های درجه‌ی دوم آمده است به‌صورت موفقیت‌آمیزی به‌معادله‌های درجه سوم گسترش داد. روش اقلیدس، هندسی بود؛ برای او هر معادله‌ی درجه دوم نشانگر مساله‌ای درباره‌ی مساحت‌هاست، پس معادله‌ی $x^2 - ax + b = 0$ به‌عنوان مساله‌ای برای یافتن مربعی (با ضلع x) تعبیر می‌شد که با افزودن آن به‌مساحت مشخصی (b) مستطیلی به‌ضلع معلوم a و ضلع مجهول x حاصل می‌شد. بنابراین معادله‌ی ما به‌شکل $x^2 + b = ax$ در می‌آمد، با a و b مثبت، و هر سه عبارت نشانگر مساحت بودند. بنابراین اقلیدس باید سه نوع معادله‌ی درجه دوم را در نظر می‌گرفت: (۱) $x^2 + b = ax$، (۲) $x^2 + ax = b$، (۳) $x^2 = ax + b$، که تنها ریشه‌های مثبت آن‌ها مورد قبول بود و صورت رایج امروزی آن $x^2 - ax + b = 0$ منظور نمی‌شد. این نظریه‌ی کهن با برخی اصلاح‌ها تا دوره‌ی دکارت (سال ۱۶۳۸) باقی ماند.

دستاورد خیام بسط این نظریه به‌معادله‌های درجه‌ی سوم بود، که در آن‌ها باید مکعب‌ها و مکعب مستطیل‌هایی را به‌تصور در می‌آورد و در این جا هم تنها ریشه‌های مثبت معنی داشتند. پس خیام باید سه معادله‌ی دو جمله‌ای: $x^3 = a$، $x^3 = ax$، $x^3 = ax^2$؛ نُه معادله‌ی سه جمله‌ای: $x^3 + bx^2 = a$، $x^3 + a = bx$ و غیره؛ و هفت معادله‌ی چهار جمله‌ای: $x^3 + cx^2 + bx = a$، $x^3 + cx^2 = bx + a$ و غیره را در نظر می‌گرفت.

اقلیدس می‌توانست ترسیم عملی پاره‌خط مجهول (x) را با پرگار و خط‌کش انجام دهد[3]، ولی خیام باید از روش‌های پیشرفته‌تری استفاده می‌کرد، پس به‌پیروی از برخی نمونه‌های خاص یونانی (برای نمونه در آثار ارشمیدس)، راه‌حل‌های خود را از طریق برخورد مقاطع مخروطی به‌دست آورد. روی‌کرد او به‌معادله‌های درجه سوم در برداشت خاصی که از آن‌ها داشت، فراگیر بود. او حل برخی معادله‌های دیگری که منجر به‌معادله‌ی درجه دوم و درجه سوم می‌شوند، مانند $\frac{5}{4} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$، $\frac{10}{x^2} = \frac{10}{x} + 2 + x$ و مانند آن را نیز به‌آن افزود.

1. Woepcke
2. Teachers College

۳. دکتر تقی ارانی، *رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس للحکیم عمربن ابراهیم الخیامی*، تهران، ۱۳۱۴ ش.

عبارت «با برخی اصلاح‌ها» را به‌کار بردیم. به‌موازات نظریه‌ی هندسی معادله‌ها، که بر پایه‌ی تجانس جمله‌ها بود و به‌آسانی به‌معادله‌های بیش از درجه‌ی سوم تعمیم‌پذیر نبود ـ مفهوم فضای چهار بعدی از سده‌ی نوزدهم به‌بعد مرسوم شد ـ نظریه‌ای ریاضی وجود داشت. این نظریه پیش از این در میان دوورود در هزاره‌ی سوم پیش از میلاد رواج داشت و در آن معادله‌ها به‌عنوان رابطه‌هایی میان عددها در نظر گرفته می‌شد، و عبارت بود از جست و جوی عددهایی با بیش‌ترین دقت ممکن یا مطلوب که در روابط خاصی صدق کنند. هیچ محدودیت طبیعی در درجه‌ی سوم وجود نداشت، و در میان دوورود باستان، حتا به‌معادله‌های غیرجبری هم‌چون $a^x = b$ برمی‌خوریم (که به‌طور طبیعی در مسایل ربع مرکب ظاهر می‌شوند). به‌هر حال این نظریه فاقد دقت ساختار اقلیدسی بود، که زیر نفوذ افلاتون و اودُکسوس[۱] برای پرداختن به‌هر دو نوع کمیت متوافق و نامتوافق با حفظ دقت ریاضی بود، بنا شد.

ملاحظه‌های حسابی ـ جبری طی سده‌ها پرورده شد. ما آن‌ها را در دنیای یونانی با وجود تمام موهوم‌پردازی‌های افلاتونی‌ها می‌بینیم و آن‌ها حتا جایگاه مهمی در کار دیوفانتوس[۲] (۲۵۰ میلادی) یافتند. این نظریه هم چنین در هند و چین با موفقیت روبه‌رو شد و دوباره در میان‌دوورود و ایران دوره‌ی اسلامی ظهور یافت. خیام از این گرایش آگاه بود و به‌دشواری‌های یافتن راه حلی جبری برای معادله‌های درجه سوم اشاره می‌کند. در واقع پیش از سده‌ی شانزدهم این راه حل در حالت کلی یافت نشد و تنها در دوره‌ی رنسانس ایتالیا بود که «هنر بزرگ» اول بار توسط کاردان[۳] در سال ۱۵۴۵، به‌دنیای نو عرضه شد.

قضیه‌ی دو جمله‌ای

به‌نظر می‌رسد خیام به‌واقع راه‌حل‌های عددی را، دست کم در مورد معادله‌هایی به‌شکلِ $x^n = a$ (n عدد صحیح مثبت است) مطالعه کرده است. او در **جبر و مقابله‌ی** خود اشاره می‌کند به‌کتابی که نوشته و در آن درباره‌ی این مساله بحث کرده است. دست‌نوشته‌ی این کتاب یافت نشده است[۴]. از مفهوم آن به‌نظر می‌رسد خیام باید فرمول بسط دو جمله‌ای $(a + b)^n$ را، که در آن n عدد صحیح مثبتی است، می‌دانسته است. اگر چنین بوده باشد، پس در مورد نتیجه‌ای که تا

1. Eudoxus
2. Diophantus
3. Cardan

۴. نام این کتاب *مشکلات الحساب* است که تاکنون نشانه‌ای از وجود آن به‌دست نیامده است (قربانی همان، ص ۳۳۳ ـ ۳۳۴).

این سال‌های اخیر بیش‌تر به‌حساب وزیر لوتری مایکل استیفل[1] (۱۵۴۴) گذاشته می‌شد، تقدم دارد، اما پیش از این در آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، دانشمند ایرانی و از ملازمان الغ بیگ در سمرقند در دهه‌ی اول سده‌ی پانزدهم میلادی / نهم هجری یافت می‌شود.

اصل موضوع توازی

دومین اثر ریاضی خیام که اکنون با شرحی کامل به‌روسی انتشار یافته است، ***شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس*** نام دارد. متن اصلی عربی، از یک نسخه‌ی خطی لیدن در سال ۱۹۳۶ [/ ۱۳۱۷ ش] در تهران چاپ شده بود. مضمون این کتاب به‌وسیله‌ی رساله‌ی آموزنده‌ی د. ا. اسمیت در نشریه‌ی ***اسکریپتا ماتماتیکا***[2]ی سال ۱۹۳۵ تا حدی برای خواننده‌ی انگلیسی‌زبان آشنا بود. پروفسور اسمیت برخی از نقل قول‌های متن خیام را در دست‌نوشته‌ای قدیمی که خریده بود، یافت. اکنون که ما امکان بررسی تمام کتاب را داریم، می‌بینیم این مقاله‌ی ***اسکریپتا*** گزارش خوبی از بخش اول کتاب خیام عرضه می‌کند و این بخشی است که خیام در آن به‌اصل موضوع توازی می‌پردازد.

اصل موضوع توازی که (با اندکی تفاوت) می‌گوید از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد در ***اصول*** اقلیدس به‌عنوان اصل پنجم آمده است. در تمام سده‌ها، ذهن‌های جسور سعی کرده‌اند این اصل را ثابت کنند، یعنی آن را از سایر اصل‌ها که آشکارترند نتیجه بگیرند، یا در غیر این صورت اصلی را که کم‌تر پیچیده باشد جای‌گزین آن کنند. خیام که سعی داشت این اصل را با اصل موضوع چهارم که طبق آن همه‌ی زاویه‌های قائمه با هم برابرند، مرتبط کند، کوشید با کمکِ پنج اصلی که هشت قضیه در پی آن می‌آمد روی فاصله‌ی میان دو ***اصل موضوع*** پلی بزند. این اصل‌ها، یا سنگ‌های زیرین در استدلال او، مستقیم یا غیرمستقیم از ارسطو گرفته شده‌اند که دو یا سه نسل پیش از اقلیدس می‌زیست. برای نمونه اصل اول این است که کمیت‌ها را می‌توان تا بی‌نهایت تقسیم کرد، یعنی غیرقابل تقسیم وجود ندارد. اصل دوم می‌گوید خط مستقیم را می‌توان تا بی‌نهایت امتداد داد. دو اصل بعدی مربوط به‌خط‌های راست متقاطع‌اند و آخرین اصل، اصل ارشمیدس است.

قضیه‌ها شامل برخی نکته‌های جالب‌اند. در اولین قضیه، خیام ثابت می‌کند اگر دو پاره خط برابر AC و BD عمود بر پاره‌خط AB رسم شوند، آنگاه زاویه‌ی ACD با زاویه‌ی BDC برابر است (شکل ۱). او در دومین قضیه ثابت می‌کند، اگر در همان شکل، E وسطِ AB و EG عمود

1. Michael Stifel
2. Scripta Mathematica

بر AB باشد (شکل ۲)، آنگاه GD = CG و EG بر DC عمود است. سپس در قضیه‌ی سوم، به‌این نتیجه می‌رسد که زاویه‌های ACD و BDC قائمه‌اند، که در واقع اصل موضوع توازی را به‌اثبات می‌رساند، که از آن قضیه‌های دیگر مانند AB = CD نتیجه می‌شود. برای اثبات قضیه‌ی سوم، خیام در می‌یابد باید سه حالت را در نظر بگیرد، بسته به‌این که زاویه‌های BDC و ACD هریک (الف) کم‌تر از زاویه‌ی قائمه باشند، (ب) بیش‌تر از زاویه‌ی قائمه باشند، (ج) برابر با زاویه‌ی قائمه باشند. او فرض‌های (الف) و (ب) را با رسم CDFH بر ABDC و با امتداد دادن EG به‌طول خودش تا K، و رسم HKF عمود بر GK برای قطع کردن AC و امتداد BD در H و F رد می‌کند. سپس با تاکردن شکل اول حول CD و سپس حول AB نشان می‌دهد در هر دو حالت الف و ب او به‌تضاد با اصل‌های خود می‌رسد (یعنی به‌شکل نامحسوس، با اصل پنجم)؛ پس تنها حالت (ج) باقی می‌ماند.

جنبه‌ی جالب این بحث این است که به‌ظاهر برای اولین بار در تاریخ، سه وضعیتی را می‌یابیم که بعدها به‌عنوان فرضیه‌ی زاویه‌ی حاده (حالت الف)، زاویه‌ی منفرجه (حالت ب)، و زاویه‌ی قائمه (حالت ج) معروف شده‌اند. اکنون می‌دانیم این سه وضع به‌ترتیب به‌هندسه‌ی غیراقلیدسی بابای ـ لوباچفسکی[1]، ریمان[2]، و هندسه‌ی اقلیدسی منجر می‌شوند. این سه حالت را ریاضی‌دان و منجم ایرانی [خواجه] نصیرالدین [توسی] (سال ۱۲۰۱ ـ ۱۲۷۴ میلادی / ۵۹۷ ـ ۶۷۲ هجری قمری) نقل کرده و پروفسور اسمیت آن‌ها را در کار او یافته است. تحقیق‌های نصیرالدین [توسی] درباره‌ی اقلیدس در سال ۱۵۹۴ میلادی / ۹۹۲ هجری قمری از طریق متن عربی و در سال ۱۶۵۱ میلادی / ۱۰۴۹ هجری قمری از طریق ترجمه‌ی لاتینی آن شناخته شد. نسخه‌ی لاتینی حاصل کوشش جان والیس[3]، ریاضی‌دان معروف اکسفورد بود، که با اقبال وسیع خوانندگان روبه‌رو شد. تعبیرهای «فرضیه‌های زاویه‌های حاد، منفرجه و قائمه» از جیرو لاموساکری[4]، ریاضی‌دان یسوعی است که برخی آرای او در کتابی به‌سال ۱۷۳۶ به‌نام «اقلیدس رها از تمام خدشه‌ها»[5] چاپ شد و پیشرفت‌های بعدی در هندسه‌ی غیراقلیدسی را پیش‌بینی کرد. از آن جا این تعبیرها در کتاب‌های کنونی در این زمینه وارد شد.

کتاب خیام درباره‌ی اقلیدس دستاورد دیگری نیز دارد. او پس از بحث درباره‌ی اصل پنجم، به‌نظریه‌ی تناسب‌ها می‌پردازد. این نظریه دوبار در *اصول* ظاهر شده است، اول در مقاله‌ی پنجم به‌شکل هندسی، در مورد پاره‌خط‌ها و مستقل از متوافق یا نامتوافق بودن آن‌ها ظاهر شد و دوم

1. Bolyai - Lobačevskiĭ
2. Riemann
3. John Wallis
4. Girolamo Saccheri
5. Euclid Freed of All Blemish

در مقاله‌ی هفتم به‌شکل حسابی، برای «عددها[1]» که همیشه متوافق‌اند زیرا به‌عنوان «مرکب از واحدها» تعریف شده‌اند. دو نسبت که آن‌ها را با $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نشان می‌دهیم، طبق تعریف برابرند، اگر هرگاه $ma < nb$ آنگاه $mc < nd$، هرگاه $ma = nb$ آنگاه $mc = nb$، و هرگاه $ma > nb$ آنگاه $mc > nd$. در این جا m و n هر عددی ممکن است باشد. خیام از این تعریف ناراضی بود، زیرا تمام عددهای m و n را نمی‌توان امتحان کرد؛ هم‌چنین هنگام ضرب نسبت‌ها، مشکلاتی پدید می‌آورد. او به‌جای تعریف اقلیدس، ترجیح می‌دهد اصل اول خود را اعمال کند و نسبت‌های برابر را با روشی شبیه به‌آن چه فرایند حدی می‌نامیم، تعریف کند ـ نسبت‌ها زمانی برابرند که بتوان آن‌ها را با خارج نسبت عددهای درست با هر میزان دقت دلخواه بیان کرد. این به‌آن معنی است که هر نسبت را می‌توان با هر میزان دلخواهی از دقت به‌کمک عدد بیان کرد.

می‌بینیم که خیام این جا در راه بسط مفهوم عدد در جهتی است که منجر به‌مفهوم عدد حقیقی می‌شود. عددها و نسبت‌های آن‌ها طبق برداشت اقلیدس تنها با عددهای گویا دارای معنای حسابی هستند. می‌بینیم که ریاضی‌دانان دوره‌ی نوزایی بعدها با این موضوع بیش‌تر درگیر شدند، به‌ویژه استوین[2] (۱۵۸۵ میلادی)، گرچه با او هم مفهوم عدد هنوز محدود به‌ریشه‌هاست. سرانجام این دکارت بود که به‌تناظر کامل پیوستار حسابی و هندسی دست یافت، گرچه تعریف دقیق عدد حقیقی سده‌ی نوزدهم به‌وسیله‌ی ددِکیند[3] و کانتور[4] عرضه شد. به‌این ترتیب خیام به‌عنوان ریاضی‌دانی با نفوذ ظاهر می‌شود، که به‌نظریه‌ی معادله‌ها، به‌فهم درک اصل موضوع توازی، به‌بسط مفهوم عدد حقیقی، و به‌احتمالی به‌تعمیم قضیه‌ی دو جمله‌ای کمک کرد. همراه با این ظهورِ خیام به‌عنوان شخصیتی علمی، درک بهتری از جایگاه او به‌عنوان فیلسوف و ادیب پیدا شده است. شخصیت مبهم سده‌های میانه‌ای که وُپکه در سال ۱۸۵۱ و فیتز جرالد در سال ۱۸۵۹ طرحی کلی از او ارایه کردند، گوشت و خون یافته است. اکنون در برابر خود فیلسوفی ایرانی از مکتب ابن سینا را می‌بینیم که نماینده‌ی جناح خردگرا و ضدکلامی ارستوییان است (این جناح که ابن رشد هم متعلق به‌آن است «چپ ارستویی» خوانده شده است)، استاد نجوم و ریاضیات که ساعت‌های دشوار تحصیل و کوشش را با نوشتن شعرهای طنزآلود و کفرآمیز در قالبی همه فهم و با بهره‌گیری از ظرافت‌های زبان تلطیف می‌کند.

1. orithmoi
2. Stevin
3. Dedekind
4. Cantor